Топология – 1
Задачи к лекциям 4 и 5:
Компактность и компактно-открытая топология
7 марта 2023

Задача 1. Пусть X — хаусдорфово пространство со счётной базой.

а) Докажите, что если X компактно, то оно секвенциально компактно.

б) Докажите, что если X секвенциально компактно, то оно компактно.

Задача $1\frac{1}{2}$. Приведите пример хаусдорфова пространства

в*) компактного, но не секвенциально компактного;

г*) секвенциально компактного, но не компактного.

Задача 2. На компактном хаусдорфовом пространстве введено отношение эквивалентности. **а)** Докажите, что если факторпространство также хаусдорфово, то все классы эквивалентности замкнуты. **б)** Докажите, что факторпространство компактно.

Задача 3. Докажите, что произведение счётного числа метрических пространств (с топологией произведения) метризуемо.

Задача 4. Напомним, для компактных подмножеств в метрическом пространстве $K, K' \subset X$ *расстояние Хаусдорфа* определяется как

$$d(K,K') = \min\{r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \;\; | \;\; \forall x \in K \; \exists y \in K' : d(x,y) \leq r \;\; \text{и} \;\; \forall x \in K' \; \exists y \in K : d(x,y) \leq r\}$$

а) Убедитесь, что множество чисел r с таким условием непусто.

б) Покажите, что минимальное значение r в этом определении действительно достигается.

в) Проверьте, что функция d действительно является метрикой.

Задача 5. Пусть, $f_1, f_2, \ldots, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции.

а) Предположим, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в компактно-открытой топологии. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$?

б) Предположим, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в компактно-открытой топологии?