

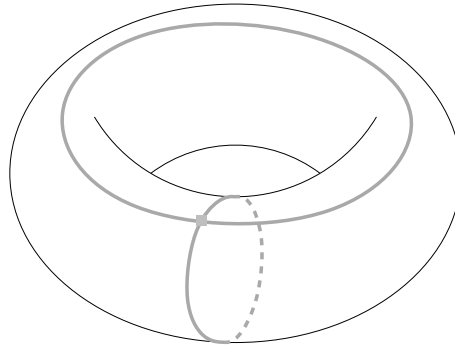
## Гомотопии и гомотопическая эквивалентность

14 марта 2023

**Задача 1.** Напомним, базу сильной топологии<sup>1</sup> на  $\text{Map}(X, Y)$  составляют множества  $S_U$  для всевозможных открытых  $U \subset X \times Y$ , определяемые как  $S_U = \{f \mid \Gamma_f \subset U\}$ . Докажите, что если  $X$  компактно, то сильная топология совпадает с компактно-открытой топологией.

**Задача 2.** Постройте отображение  $[0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывное по каждой горизонтали и каждой вертикали, но не непрерывное на квадрате.

**Задача 3.** На планете Шментаверкурий, имеющей форму тора, есть две железные дороги — вдоль параллели и вдоль меридиана, как показано на рисунке. На пересечении железных дорог находится депо. Поезд проехал по меридиану, затем по параллели, после этого по меридиану в противоположном направлении, и, наконец, по параллели в противоположном направлении. Докажите, что путь поезда, рассматриваемый как отображение  $S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ , гомотопен отображению в точку.



**Задача 4.** Пусть пространство  $X$  стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке), а пространство  $Y$  линейно связно.

а) Докажите, что любые два отображения  $X \rightarrow Y$  гомотопны.

б) Докажите, что любые два отображения  $Y \rightarrow X$  гомотопны.

**Задача 5.** Пусть пространство  $X$  линейно связно. Докажите, что пространство петель  $\Omega X$  не зависит (с точностью до гомотопической эквивалентности) от выбора отмеченной точки.

**Задача 6.** Следующие пространства гомотопически эквивалентны букетам сфер. Найдите, скольких и каких размерностей:

а) дополнение  $\mathbb{R}^7 \setminus \mathbb{R}^2$ ;

б)  $S^3$  с выкинутой  $S^1$ ;

в)  $S^2$  с двумя отождествлёнными точками;

г) дополнение  $\mathbb{R}^3$  к трём координатным осям.

<sup>1</sup>В контексте дифференциальной геометрии аналогичную конструкцию называют  $C^0$ -топологией Уитни.