Топология – 1
Задачи к лекции 8:
Нестягиваемость S^1

28 марта 2023

Задача 1. Проверьте, что отображение $f : X \to Y$ является гомотопической эквивалентностью если и только если существуют $g, h : Y \to X$, такие что $f \circ g \sim \mathrm{Id}_Y$ и $h \circ f \sim \mathrm{Id}_X$.

Пусть $f : S^1 \to S^1$ — произвольное отображение. Обозначим через $c : [0; 2\pi] \to S^1$ стандартную параметризацию первой окружности, а через $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ — накрытие второй окружности прямой. Напомним, *степенью* отображения f называется разность $\widetilde{f}(2\pi) - \widetilde{f}(0)$, где $\widetilde{f} : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ — *поднятие* f, т. е. такое отображение, что $p \circ \widetilde{f} = f \circ c$.

Задача 2. Пользуясь леммами о поднятии пути и поднятии гомотопии, проверьте, что степень отображения $S^1 \to S^1$ **а)** корректно определена (т. е. не зависит от выбора поднятия, которое, вообще говоря, не единственно) и **б)** не меняется при гомотопии отображения f.

Задача 3. **а)** Покажите, что при композиции отображений $S^1 \to S^1$ их степени перемножаются.

б) Покажите, что при умножении отображений $S^1 \to S^1$ в комплексных координатах их степени складываются.

Задача 4. Гомотопны ли отображения $\gamma_p, \gamma_m : S^1 \to S^1 \times S^1$, переводящие окружность соответственно в параллель и меридиан тора?

Задача 5. Пусть $D^2_\circ = D^2 \setminus \partial D^2$ — диск без границы. Существует ли отображение $D^2_\circ \to D^2_\circ$ без неподвижных точек?

Задача 6. Пусть $P \in \mathbb{C}[z]$ — многочлен степени $n > 0$. Покажите, что для $r \gg 0$ отображение $S^1 \to S^1,\ t \mapsto \frac{P(rt)}{|P(rt)|}$ действительно имеет степень n.

Задача 7. **а)** Пусть $f : S^1 \to S^1$ — отображение, такое что $f(-t) = -f(t)$ для всех $t \in S^1$. Покажите, что степень f нечётна.

б) Пусть $g : S^2 \to \mathbb{R}^2$ — произвольное отображение. Выведите, что найдётся пара противоположных точек $x, -x \in S^2$, таких что $g(x) = g(-x)$.

Задача 8*. Возьмём пространство $X = ([0; 1] \times 0) \cup ((\mathbb{Q} \cap [0; 1]) \times [0; 1]) \subset \mathbb{R}^2$, состоящее из отрезка, к которому во всех рациональных точках примыкают перпендикулярные отрезки. Оно снабжено индуцированной топологии с плоскости (а не фактортопологией).

Пространство Y получается склейкой бесконечной в обе стороны последовательности копий X, как на рисунке. Покажите, что Y **а)** стягиваемо, но **б)** не имеет строгой деформационной ретракции ни на какую свою точку.