Топология – 1
Задачи к лекции 9:
Фундаментальная группа

4 апреля 2023

Задача 1. Зафиксируем произвольный гомеоморфизм $\varphi : [0;1] \to [0;1]$, сохраняющий концы.

а) Докажите, что любая петля $\alpha : [0;1] \to X$ гомотопна петле $\alpha \circ \varphi$ в классе петель с заданной отмеченной точкой $x_0 \in X$.

б) Верно ли то же, если φ может менять концы местами?

в*) Докажите, что отображение $\Omega X \to \Omega X$, которое задаёт композиция петель с φ, гомотопно тождественному[1].

Задача 2. Выберем две точки $x_0, x_1 \in X$. Выбор пути из x_0 в x_1 определяет изоморфизм $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$. Покажите, что если заменить путь из x_0 в x_1 на другой, то полученные изоморфизмы $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ отличаются сопряжением.

Задача 3. а) Приведите пример пространства X и подмножества $A \subset X$, таких что гомоморфизм $\pi_1(A) \to \pi_1(X)$, который индуцирует вложение $A \to X$, не является инъективным.

б) Пусть X ретрагируется на подмножество $A \subset X$. Докажите, что $\pi_1(A)$ является подгруппой в $\pi_1(X)$.

Задача 4. Докажите, что отображение $S^1 \to X$ гомотопно отображение в точку если и только если оно продолжается до отображения $D^2 \to X$.

Задача 5. Даны пространства X и Y с отмеченными точками $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

а) Докажите, что для любых отображений $\alpha : [0;1] \to X$ и $\beta : [0;1] \to Y$, переводящих концы отрезков в x_0 и y_0 соответственно, существует единственное отображение $[0;1] \to X \times Y$, композиции которого с проекциями $X \times Y \to X$ и $X \times Y \to Y$ равны α и β.

б) Докажите, что $\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.

Задача 6. а) Дано отображение $[0;1] \to S^n$, где $n > 1$. Докажите, что $[0;1]$ можно разбить на конечное число отрезков, образ каждого из которых не покрывает S^n.

б) Выведите, что $\pi_1(S^n)$ — тривиальная группа при $n \neq 1$.

---

[1] Указание: для этого может быть полезно доказать непрерывность естественного отображения

$$\mathrm{Map}(A, B) \times \mathrm{Map}(B, C) \to \mathrm{Map}(A, C)$$

для локально компактного хаусдорфова B.