

Топология – 1
 Задачи к лекции 12:
 Теорема о продолжении гомотопии. Накрытия
 25 апреля 2023

Задача 1. Пусть натуральные m, n и k таковы, что $m - n + k = 2$. Постройте на S^2 клеточную структуру, имеющую m нульмерных клеток, n одномерных и k двумерных.

Задача 2. Докажите, что если клеточный комплекс стягиваем, то он строго деформационно ретрагируется на любую свою точку.

Задача 3. Определим S^∞ как объединение последовательности экваториально вложенных сфер $S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$ а) Покажите, что S^∞ стягиваема.

б*) Определим S_{met}^∞ как множество последовательностей (x_1, x_2, x_3, \dots) , таких что лишь конечное число x_i отличны от нуля и $\sum x_i^2 = 1$, снабженное естественной метрикой. Постройте непрерывную биекцию $S^\infty \rightarrow S_{\text{met}}^\infty$. Может ли такая биекция быть гомеоморфизмом?

Задача 4. Выполнено ли для пары а) \mathbb{R}, \mathbb{Z} ; б) \mathbb{R}, \mathbb{Q} ; в*) $\mathbb{R}, (0; 1)$ условие продолжения гомотопии?

Задача 5. Пусть группа G действует¹ на топологическом пространстве X гомеоморфизмами, причём у любой точки $x \in X$ существует окрестность U , такая что $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$.

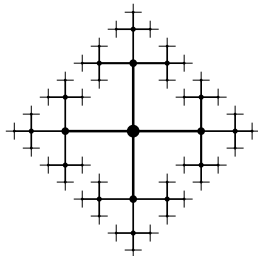
а*) Покажите, что если X хаусдорфово, то орбита каждой точки замкнута.

б*) Верно ли, что при этом фактор X/G хаусдорфов?

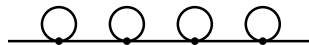
в) Покажите, что отображение факторизации $X \rightarrow X/G$ является накрытием со слоем G .

г) Покажите, что если $p : E \rightarrow B$ – накрытие, такое что $p_*(\pi_1(E)) \subset \pi_1(B)$ – нормальная подгруппа, то $B \simeq E/G$, где $g := \pi_1(B)/p_*(\pi_1(E))$.

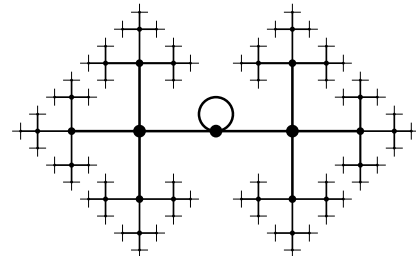
Задача 6. Для следующих бесконечных одномерных клеточных пространств K постройте накрытие $K \rightarrow S^1 \vee S^1$, опишите группу $\pi_1(K)$, вложение $\pi_1(K) \rightarrow \pi_1(S^1 \vee S^1)$ и его образ. Является ли образ нормальной подгруппой?



а)



б)



в)

¹Можно рассматривать топологические группы и их непрерывные действия на пространствах. В нашем примере топология на G дискретная, это освобождает нас от уточнения ряда деталей.