Топология — 3
Экзамен (первая попытка)
26 мая 2024

Задача 1. Докажите, что $p_k(\xi) \bmod 2 = w_{2k}(\xi)^2$.

Задача 2. Вычислите $H^{10}(BU(24);\mathbb{Z})$ и опишите образующие.

Задача 3. Докажите, что если n-мерное гладкое многообразие M можно погрузить[1] в $\mathbb{R}^{n+1}$, то $w_k(M) = w_1(M)^k$ для всех k.

Задача 4. а) Рассмотрим диагональное вложение гладкого многообразия M в $M \times M$. Докажите, что нормальное расслоение изоморфно касательному.

б) Что можно сказать про нормальное расслоение к $\Delta : M \to M \times \cdots \times M$?

Задача 5. Пусть $i : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{C}P^2$ — вложение "множества вещественных точек". Докажите[2], что i не гомотопно тривиальному отображению.

Задача 6. Существует ли вещественное векторное расслоение ранга 3 над $\mathbb{RP}^3$ такое, что все его классы Штифеля-Уитни ненулевые?

Задача 7. Пусть клеточный комплекс X таков, что $H^i(X;\mathbb{Z}) = 0$ при $i > n$. Пусть $a \in H^n(X;\mathbb{Z})$. Докажите, что $a = f^*([S^n])$ для некоторого отображения $f : X \to S^n$.

---

[1] Т. е. задать гладкое отображение, дифференциал которого имеет ранг n во всех точках M.

[2] Возможно, полезно сначала доказать: i гомотопно вложению j такому, что $i(\mathbb{R}P^2)$ и $j(\mathbb{R}P^2)$ пересекаются по трем точкам.