# Топология — 3
## Экзамен (вторая попытка)
22 сентября 2024

**Задача 1.** Пусть $E \to X$ — вещественное векторное расслоение ранга 2 над $CW$-комплексом.

**а)** Докажите, что если $X$ одномерен, то $E$ с точностью до изоморфизма однозначно определяется классом $w_1(E)$.

**б)** Верно ли, что если $X$ двумерен, то $E$ с точностью до изоморфизма однозначно определяется классами $w_1(E)$ и $w_2(E)$?

**Задача 2.** Сколько[1] существует отображений **а)** $\mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^3$ **б)** $\mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^2$ различных с точностью до гомотопии?

**Задача 3.** Пусть $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ — замкнутое ориентированное $2n$-мерное подмногообразие. Докажите, что отображение Гаусса $M \to Gr^+(2n, \mathbb{R}^{2n+1}) \simeq S^{2n}$ имеет степень $\chi(M)/2$.

**Задача 4. а)** Вычислите $[\mathbb{RP}^6, \mathbb{CP}^4]$. Для каждого $f : \mathbb{RP}^6 \to \mathbb{CP}^4$ опишите индуцированное отображение на $H^*(-;\mathbb{Z})$ и $H^*(-;\mathbb{Z}_2)$.

**б)** Пусть $i : \mathbb{RP}^6 \to \mathbb{CP}^4$ — погружение. Докажите, что оно гомотопно тривиальному отображению.

**Задача 5.** Пусть $\xi$ — комплексное расслоение ранга $n$, а $\mu$ — комплексное расслоение ранга 1. Докажите, что

$$c(\xi \otimes \mu) = \sum_{k=0}^{n} c_k(\xi) \cdot c(\mu)^{n-k}.$$

[1] Нужно лишь оценить мощность множества гомотопических классов этих отображений. Полностью классифицировать их не обязательно.