Топология – 3

Шпаргалка к лекции 1:

(Ко)гомологии и произведения

8 февраля 2024

(Все модули – над R, коммутативным ассоциативным кольцом с единицей.)

1 Стандартное cup-произведение

$\alpha \in C^k(X)$, $\beta \in C^\ell(X)$ – коцепи $\Rightarrow$ по ним строится коцепь $\alpha \smile \beta \in C^{k+\ell}(X)$,

$$\langle \alpha \smile \beta, \sigma \rangle := \langle \alpha, \sigma|_{[0,\dots,k]} \rangle \cdot \langle \beta, \sigma|_{[k,\dots,k+\ell]} \rangle.$$

То есть $\smile\colon C^k(X) \otimes C^\ell(X) \to C^{k+\ell}(X)$.

Теорема . Эта формула задаёт корректно определённое естественное ассоциативное градуированно-коммутативное умножение

$$H^k(X) \otimes H^\ell(X) \xrightarrow{\smile} H^{k+\ell}(X).$$

Более того: если $A, B \subset X$ – открытые подмножества (или клеточные подкомплексы...), то та же формула задаёт умножение

$$H^k(X, A) \otimes H^\ell(X, B) \to H^{k+\ell}(X, A + B) \cong H^{k+\ell}(X, A \cup B).$$

(Напомним, что $C^*(X, A) := \operatorname{Ker}(C^*(X) \to C^*(A))$ и $C_*(A + B) := C_*(A) + C_*(B) \subset C_*(X)$. В прошлом семестре мы доказали, что $C_*(A + B) \hookrightarrow C_*(A \cup B)$ индуцирует изоморфизм в гомологиях, если A и B открыты в X.

Здесь мы положили $C^*(X, A + B) := C^*(X, A) \cap C^*(X, B)$. Легко убедиться (упражнение!), что $C^*(X, A + B) \cong (C_*(X)/(C_*(A + B))^*$. Поэтому из 5-леммы следует, что вложение $C^*(X, A \cup B) \to C^*(X, A + B)$ тоже индуцирует изоморфизм в гомологиях.)

2 Формула Кюннета

Область главных идеалов (ОГИ) – это кольцо без делителей нуля, в котором все идеалы главные. Это гарантирует, что подмодули свободных R-модулей свободны. Примеры: $\mathbb{Z}$, любое поле.

Теорема . (Алгебраическая формула Кюннета) Пусть R – ОГИ, и пусть $C_\bullet$, $C'_\bullet$ – цепные комплексы свободных R-модулей. Тогда следующая последовательность точна и расщепима:

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(C_\bullet) \otimes H_j(C'_\bullet) \xrightarrow{\kappa} H_n(C_\bullet \otimes C'_\bullet) \to \bigoplus_{i+j=n-1} \operatorname{Tor}_1^R(H_i(C_\bullet), H_j(C'_\bullet)) \to 0.$$

Сама последовательность естественна, расщепимость неестественна.

Отметим, что отображение Кюннета $\kappa : [a] \otimes [b] \mapsto [a \otimes b]$ определено для любых комплексов.

3 Гомологии произведений

Имеем цепные отображения *Александера–Уитни* и *Эйленберга–Зильбера*

$$AW : C_*(X \times Y) \to C_*(X) \otimes C_*(Y), \quad EZ : C_*(X) \otimes C_*(Y) \to C_*(X \times Y).$$

Формулы:

1. Если $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) : \Delta^n \to X \times Y$, то

$$AW(\sigma) := \sum_{i=0}^{n} \sigma_1|_{[0,\ldots,i]} \otimes \sigma_2|_{[i,\ldots,n]}.$$

2. Если $\sigma : \Delta^k \to X$ и $\tau : \Delta^\ell \to Y$, то

$$EZ(\sigma \otimes \tau) := \Big[\text{“триангуляция” сингулярной призмы } \Delta^k \times \Delta^\ell \to X \times Y\Big] \in C_{k+\ell}(X \times Y).$$

Теорема . (Теорема Эйленберга–Зильбера). $AW \circ EZ \sim \mathrm{id}_{C_*(X)\otimes C_*(Y)}$ и $EZ \circ AW \sim \mathrm{id}_{C_*(X\times Y)}$.

Поэтому AW_* и EW_* – обратные друг к другу изоморфизмы между $H_*(X\times Y)$ и $H_*[C_*(X)\otimes C_*(Y)]$. Получаем “топологическую” формулу Кюннета (если R – ОГИ):

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(X) \otimes H_j(Y) \to H_n(X \times Y) \to \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_i(X), H_j(Y)) \to 0.$$

4 Когомологии произведений

Дуализуя, получаем цепные отображения, гомотопически обратные друг к другу:

$$AW^* : C^*(X \times Y) \leftarrow (C_*(X) \otimes C_*(Y))^*, \quad EW^* : (C_*(X) \otimes C_*(Y))^* \leftarrow C^*(X \times Y).$$

Но мы хотим связать $C^*(X \times Y)$ с $C^*(X)$ и $C^*(Y)$.

Для любых цепных комплексов $C_\bullet, C'_\bullet$ имеем естественное вложение

$$\theta : (C_\bullet)^* \otimes (C'_\bullet)^* \to (C_\bullet \otimes C'_\bullet)^*, \quad \langle\theta(\alpha\otimes\beta), \sigma\otimes\tau\rangle := \langle\alpha,\sigma\rangle \cdot \langle\beta,\tau\rangle.$$

(Здесь мы игнорируем соглашение Кошуля. На самом деле при переходе от $C_*(X)$ к $C^*(X)$ мы всегда его игнорировали. Издержки производства...)

Теорема . Если R – область главных идеалов, $C_\bullet$ и $C'_\bullet$ – комплексы свободных R-модулей, и все модули $H_i(C_\bullet)$ конечно порождены, то θ индуцирует изоморфизм в гомологиях.

Получаем “топологическую” формулу Кюннета

$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H^i(X) \otimes H^j(Y) \to H^n(X \times Y) \to \bigoplus_{i+j=n+1} \mathrm{Tor}_1^R(H^i(X), H^j(Y)) \to 0$$

(если R – ОГИ, и $H_i(X)$ конечно порождены для всех i.)

5 Всякие умножения

1. $\times$-*умножение в гомологиях* – это композиция

$$\times : H_k(X) \otimes H_\ell(Y) \xrightarrow{\kappa} H_{k+\ell}\left[C_*(X) \otimes C_*(Y)\right] \xrightarrow{EZ_*} H_{k+\ell}(X \times Y).$$

То есть
$$[a] \times [b] := [EZ(a \otimes b)].$$

(Это отображение фигурирует в “топологической” формуле Кюннета.)

2. Если G – пространство с умножением $\mu : G \times G \to G$, то определено *умножение Понтрягина*: это композиция

$$m : H_k(X) \otimes H_\ell(X) \xrightarrow{\times} H_{k+\ell}(X \times X) \xrightarrow{\mu_*} H_{k+\ell}(X).$$

3. $\times$*-умножение в когомологиях* – это композиция

$$\times : H^k(X) \otimes H^\ell(Y) \xrightarrow{\kappa} H^{k+\ell}\left[C^*(X) \otimes C^*(Y)\right] \xrightarrow{\theta_*} H^{k+\ell}\left[(C_*(X) \otimes C_*(Y))^*\right] \xrightarrow{AW^*} H^{k+\ell}(X \times Y).$$

   То есть $[\alpha] \times [\beta] := [\gamma]$, где

$$\langle \gamma, (\sigma_1, \sigma_2) \rangle := \langle \alpha \otimes \beta, AW(\sigma_1, \sigma_2) \rangle.$$

   (Это отображение фигурирует в “топологической” формуле Кюннета.)

4. $\smile$*-умножение* – это композиция

$$\smile : H^k(X) \otimes H^\ell(X) \xrightarrow{\times} H^{k+\ell}(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H^{k+\ell}(X),$$

   где $\Delta : X \to X \times X$ – диагональное вложение. Оно задаётся формулой из п.1.

5. (Если отображение Кюннета – изоморфизм) Коумножение в гомологиях – это композиция

$$\Delta : H_*(X) \xrightarrow{\Delta_*} H_*(X \times X) \xrightarrow{AW_*} H_*\left[C_*(X) \otimes C_*(X)\right] \xrightarrow{\kappa^{-1}} H_*(X) \otimes H_*(X).$$