Топология – 3

Шпаргалка к лекции 2:

Ещё про кольцо когомологий

15 февраля 2024

(Все кольца ассоциативные с единицей. Все модули – над коммутативным кольцом R.)

1 Операции с цепными комплексами

1. Прямая сумма $C_\bullet \oplus C'_\bullet$:
$$(C_\bullet \oplus C'_\bullet)_n := C_n \oplus C'_n, \quad d(c + c') := d(c) + d'(c').$$

2. Тензорное произведение $(C_\bullet \otimes C'_\bullet, D = d \otimes 1 + 1 \otimes d')$:
$$(C_\bullet \otimes C'_\bullet)_n := \bigoplus_{i+j=n} C_i \otimes C'_j, \quad D(c \otimes c') := d(c) \otimes c' + (-1)^{|c|} c \otimes d(c').$$
Есть каноническое цепное отображение
$$T : C_\bullet \otimes C'_\bullet \to C'_\bullet \otimes C_\bullet, \quad T(c \otimes c') := (-1)^{|c|\cdot|c'|} c' \otimes c.$$
Очевидно, $T^2 = \mathrm{id}$, и это изоморфизм в гомологиях.

3. Коцепные комплексы можно считать цепными, используя соглашение $A^n := A_{-n}$.

4. Коцепной комплекс $((C^*)^\bullet, d^*)$, двойственный к цепному:
$$(C^*_\bullet)^n := (C_n)^* = \mathrm{Hom}_R(C_n, R); \quad \langle d^*(\varphi), c\rangle := \langle \varphi, d(c)\rangle.$$
(Здесь мы нарушаем[1] соглашение Кошуля, но такой дифференциал на $(C_*(X))^* = C^*(X)$ считается стандартным в топологии.)

Возникает цепное отображение спаривания
$$P : C_\bullet \otimes (C^*)^\bullet \to R, \quad P(c \otimes \varphi) = \begin{cases} 0, & |c| \neq |\varphi|; \\ (-1)^{n(n-1)/2} \langle \varphi, c\rangle, & |c| = |\varphi| = n. \end{cases}$$

Операции над цепными отображениями – по той же схеме. Например,
$$(f \otimes g)(a \otimes b) := f(a) \otimes g(b), \quad \langle f^*(\varphi), a\rangle := \langle \varphi, f(a)\rangle.$$

2 Коммутативность умножения в когомологиях

В первом листочке определено цепное отображение $\rho : C_*(X) \to C_*(X)$, и надо доказать, что $\rho \sim \mathrm{id}_{C_*(X)}$. Выведем отсюда коммутативность cup-произведения.

[1]"Правильный" знак – это $(-1)^{|\varphi|+1}$, а не $+1$. На первый взгляд кажется, что надо ставить $(-1)^{|\varphi|}$. Дело в следующем: двойственный комплекс – это частный случай Hom-комплекса $(\mathrm{Hom}(C_\bullet, C'_\bullet), \delta)$, где $\mathrm{Hom}(C_\bullet, C'_\bullet)_n := \bigoplus_i \mathrm{Hom}_R(C_i, C'_{n+i})$ и $\delta f(c) := d(f(c)) - (-1)^{|c|\cdot|f|} f(d(c))$. В таком комплексе n-циклы – это в точности цепные отображения, повышающие степень на n, а гомологичные циклы – это цепно гомотопные отображения.

Пусть $S : X \times Y \to Y \times X$ – перестановка сомножителей. Несложно проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} C_*(X \times Y) \arrow[r, "\rho", "\sim"'] & C_*(X \times Y) \arrow[r, "AW"] & C_*(X) \otimes C_*(Y) \\ C_*(Y \times X) \arrow[u, "S_\#"] \arrow[r, "AW"] & C_*(Y) \otimes C_*(X) \arrow[r, "\rho\otimes\rho", "\sim"'] & C_*(Y) \otimes C_*(X). \arrow[u, "T"'] \end{tikzcd}$$

Если дуализовать и перейти к когомологиям, получается коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H^*(X) \otimes H^*(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "T^*"] & H^*(X \times Y) \arrow[d, "S^*"] \\ H^*(Y) \otimes H^*(X) \arrow[r, "\times"] & H^*(Y \times X). \end{tikzcd}$$

Наконец, в случае $X = Y$ получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^*(X) \otimes H^*(X) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "T^*"] & H^*(X \times X) \arrow[r, "\Delta^*"] \arrow[d, "S^*"] & H^*(X) \\ H^*(X) \otimes H^*(X) \arrow[r, "\times"] & H^*(X \times X). \arrow[ur, "\Delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

Так как $\alpha \smile \beta = \Delta^*(\alpha \times \beta)$ и $T^*(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}\beta \otimes \alpha$, получаем $\alpha \smile \beta = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}\beta \smile \alpha$.

3 Построение cap- и slant-произведений

Обычно cap-произведение $\frown : H_n(X) \otimes H^k(X) \to H_{n-k}(X)$ сразу задаются явной формулой:

$$C_n(X) \otimes C^k(X) \to C_{n-k}(X), \quad \sigma \frown \varphi := \langle \varphi, \sigma|_{[0\ldots k]}\rangle \cdot \sigma|_{[k\ldots n]}.$$

Оно корректно определено. Легко проверить, что $\sigma \frown (\varphi \smile \psi) = (\sigma \frown \varphi) \frown \psi$; таким образом, cap-произведение задаёт структуру правого $H^*(X)$-модуля на $H_*(X)$.

Концептуальное построение:

1. Сначала определяем косое произведение (slant product) $/ : H_n(X \times Y) \otimes H^k(Y) \to H_{n-k}(X)$ через композицию

$$\begin{tikzcd} C_*(X \times Y) \otimes C^*(Y) \arrow[r, dashed, "/"] \arrow[d, "AW\otimes 1"] & C_*(X) \\ C_*(X) \otimes C_*(Y) \otimes C^*(Y) \arrow[r, "1\otimes P"] & C_*(X) \otimes R \arrow[u, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

   (геометрический смысл: на компоненте $H_{n-k}(X) \otimes H_k(Y) \subset H_n(X \times Y)$ это просто спаривание $P_* : H_k(Y) \otimes H^k(Y) \to R$);

2. Потом подставляем $X = Y$ и берём композицию с диагональным вложением: получается отображение

$$\mathrm{cap} : C_*(X) \otimes C^*(X) \xrightarrow{\Delta_\# \otimes 1} C_*(X \times X) \otimes C^*(X) \xrightarrow{/} C_*(X).$$

Более явно,

$(\sigma_1, \sigma_2)/\varphi := (-1)^{k(k-1)/2}\langle \varphi, \sigma_2|_{[n-k\ldots n]}\rangle \cdot \sigma_1|_{[0\ldots n-k]}, \quad \mathrm{cap}(\sigma \otimes \varphi) = (-1)^{k(k-1)/2}\langle \varphi, \sigma|_{[n-k\ldots n]}\rangle \cdot \sigma|_{[0\ldots n-k]}.$

Видно, что $\mathrm{cap}(\sigma\otimes\varphi) \neq \sigma \frown \varphi$. Тем не менее, следующая диаграмма коммутативна с точностью до знака:

$$\begin{tikzcd} C_n(X)\otimes C^k(X) \arrow[r, "\frown"] \arrow[d, "\rho\otimes\rho^*"] & C_{n-k}(X) \arrow[d, "\rho"] \\ C_n(X)\otimes C^k(X) \arrow[r, "\mathrm{cap}"] & C_{n-k}(X). \end{tikzcd}$$

Поэтому в гомологиях $\mathrm{cap}_*(x\otimes\alpha) = \pm x \frown \alpha$ (знак зависит от $|x|$ и $|\alpha|$).

4 Вычисления через клеточные цепи

Для клеточных (ко)гомологий внешние произведения $\times$ и $/$ вычислить легко: вместо AW и EZ используем изоморфизм $C_*^{CW}(X)\otimes C_*^{CW}(Y) \cong C^*_{CW}(X\times Y)$. С "внутренними" произведениями $\smile$ и $\frown$ сложнее: цепное отображение $f_\# : C_*^{CW}(X) \to C_*^{CW}(Z)$ определено только для *клеточных* отображений $f : X \to Z$. Произвольное отображение надо вручную прогомотопировать в клеточное. Это возможно, но сложно.

Пусть всё-такие известно клеточное отображение $\widetilde{\Delta} : X \to X\times X$, $\widetilde{\Delta} \sim \Delta$. Тогда $\smile$-произведение – это индуцированное отображение в когомологиях для композиции

$$C^*_{CW}(X)\otimes C^*_{CW}(X) \xrightarrow{\theta} (C_*^{CW}(X)\otimes C_*^{CW}(X))^* \xrightarrow{\cong} C^*_{CW}(X\times X) \xrightarrow{(\widetilde{\Delta})^\#} C^*_{CW}(X).$$

Его коммутативность – совсем простое упражнение. Сложнее показать, что при изоморфизме $H^*_{CW}(X) \cong H^*(X)$ оно переходит в $\smile$-умножение.

5 Кольцо когомологий

Итак, пространству X и коммутативному кольцу R соответствует $H^*(X;R) = \bigoplus_{i\geq 0} H^i(X;R)$ – градуированно-коммутативная ассоциативная R-алгебра. Примеры таких алгебр:

1. Кольцо многочленов $R[a]$, где $|a| \geq 0$ чётно.
2. Кольцо $R[a]/(2a^2 = 0)$, где $|a| > 0$ нечётно.
3. $\Lambda_R[a] = R[a]/(a^2 = 0)$, где $|a| > 0$ нечётно (внешняя алгебра).
4. Их тензорные произведения, факторалгебры по однородным идеалам, подалгебры...

В рассматриваемой категории копроизведениями являются тензорные произведения, а произведениями – "прямые суммы со склейкой по единице" (например, $H^*(A\vee B)$ – это категорное произведение колец $H^*(A)$ и $H^*(B)$).

Примеры 1, 2 и их тензорные произведения – это свободные[2] объекты нашей категории.

Если $R = \mathbb{F}$ – поле характеристики 2, то $\mathbb{F}[a]/(2a^2 = 0) = \mathbb{F}[a]$; значит, любая градуированно-коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра представима в виде

$$A \simeq \mathbb{F}[V]/(\text{какие-то однородные соотношения}),$$

где $V = V_0 \oplus V_1 \oplus \ldots$ – градуированный $\mathbb{F}$-модуль.

[2]Градуированно-коммутативная алгебра A *свободна* на порождающих $\{x_\alpha\}$, если $x_\alpha \in A$ – однородные элементы (их степень корректно определена), и выполнено универсальное свойство: если B – градуированно-коммутативная алгебра, и $y_\alpha \in B$ – элементы тех же степеней, то существует единственный гомоморфизм алгебр $f : A \to B$, который уважает градуировку и переводит x_α в y_α. На заумном языке: забывающий функтор бьет из нашей категории в категорию градуированных множеств по формуле $A \mapsto \{A_k\}_{k\geq 0}$, а функтор свободы сопряжён слева к забывающему. Всякое градуированное множество – копредел одноэлементных множеств, поэтому свободная алгебра – копредел свободных алгебр, порожденных одним элементом.

Если $R = \mathbb{F}$ – поле характеристики $\neq 2$, то $\mathbb{F}[a]/(2a^2 = 0) = \Lambda_{\mathbb{F}}[a]$; значит, любая градуированно-коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра представима в виде

$$A \simeq (\mathbb{F}[V_{\text{even}}] \otimes \Lambda_{\mathbb{F}}[V_{\text{odd}}]) / (\text{соотношения}).$$

Имеем две функториальности:

- Если $f : X \to Y$ – отображение пространств, то $f^* : H^*(Y) \to H^*(X)$ – гомоморфизм градуированных R-алгебр. Если он сюръективен, то умножение на $H^*(X)$ можно восстановить, зная умножение на $H^*(Y)$. Отметим также, что с помощью f^* градуированный R-модуль $H^*(X)$ превращается в $H^*(Y)$-модуль (и даже в $H^*(Y)$-алгебру).

- Если $\varphi : R \to R'$ – гомоморфизм колец, то $\varphi_* : H^*(X; R) \to H^*(X; R')$ – гомоморфизм градуированных колец. *(Мы это использовали, чтобы вычислить $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z})$, зная $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$.)*

6 Когомологии некоторых пространств

Простые примеры:

1. Нечётномерная сфера: $H^*(S^{2k+1}) = \Lambda_R[a]$, $|a| = 2k+1$.

2. Чётномерная сфера: $H^*(S^{2k}) = R[b]/(b^2 = 0)$, $|b| = 2k$.

3. Произведения пространств: в листочке есть задача, что $\times : H^*(X) \otimes H^*(Y) \to H^*(X \times Y)$ – гомоморфизм колец. Значит, если нет кручения и когомологии конечно порождены, то это изоморфизм колец. Например,

$$H^*((S^1)^k) = H^*(S^1)^{\otimes k} = \Lambda_R[a_1, \dots, a_k], \quad |a_i| = 1;$$
$$H^*((S^2)^k) = H^*(S^2)^{\otimes k} = R[b_1, \dots, b_k]/(b_1^2 = \dots = b_k^2 = 0), \quad |b_i| = 2.$$

4. Поверхность с g ручками: имеем

$$H^0(S_g) = R \cdot 1 \simeq R, \quad H^1(S_g) = R \cdot \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g\} \simeq R^{2g}, \quad H^2(S_g) = R \cdot c \simeq R.$$

Можно убедиться, что $a_i b_i = c$ (значит, $b_i a_i = -c$), а другие попарные произведения равны нулю. (Это задача. Помогает отображение $S_g \to T^2 \vee \dots \vee T^2$.) Через образующие и соотношения:

$$H^*(S_g) = \Lambda_R[a_1, b_1, \dots, a_g, b_g]/(a_i a_j = b_i b_j = 0,\ i \neq j;\ a_1 b_1 = \dots = a_g b_g), \quad |a_i| = |b_i| = 1.$$

5. Более общо: для многообразий M, N одной размерности кольцо $H^*(M \# N)$ можно посчитать с помощью проекции $M \# N \to M \vee N$ (стягиваем “перешеек” в точку).

Когомологии проективных пространств:

6. $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2[a]/(a^{n+1} = 0)$, $|a| = 1$ (доказано на лекции, примерно как в Хатчере);

7. $H^*(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[b]/(b^{n+1} = 0)$, $|b| = 2$ (считается аналогично);

8. $H^*(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[c]/(c^{n+1} = 0)$, $|c| = 4$ (задача: проверить, что считается аналогично);

9. $H^*(\mathbb{O}P^2; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[d]/(d^3 = 0)$, $|d| = 8$ (без доказательства: это не так просто, как кажется).

В этих формулах можно устремить $n \to \infty$, получатся настоящие кольца многочленов. Наконец, на лекции мы посчитали

10. $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[a]/(2a^2 = 0)$, $|a| = 1$.

Отсюда легко вывести, как устроены когомологии над другими кольцами.

7 Связь относительных умножений

Пусть $A, B \subset X$ – открытые подмножества, и пусть $\alpha \in H^*(X, A)$, $\beta \in H^*(X, B)$. С одной стороны, имеем проекции

$$p_1 : (X \times X, A \times X) \to (X, A), \quad p_2 : (X \times X, X \times B) \to (X, B),$$

поэтому определены элементы $p_1^*(\alpha) \in H^*(X \times X, A \times X)$, $p_2^*(\beta) \in H^*(X \times X, X \times B)$ и

$$p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) \in H^*(X \times X, (A \times X) \cup (X \times B)).$$

С другой стороны, можно сразу взять относительное внешнее умножение и получить элемент

$$\alpha \times \beta \in H^*(X \times X, (A \times X) \cup (X \times B)).$$

Задача: они равны (уже на уровне коцепей). Это использовалось при вычислении $H^*(P^n)$.

8 О дополнении к проективному подпространству

Пусть $P^k \subset P^n$ – координатное проективное подпространство, то есть

$$P^k = \{[* : \cdots : * : 0 : \cdots : 0]\} = \{[x_0 : \cdots : x_n] : \; x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}.$$

Докажем, что $P^n \setminus P^k$ строго деформационно ретрагируется на

$$P^{n-k-1} = \{[0 : \cdots : 0 : * : \cdots : *]\} = \{[x_0 : \cdots : x_n] : \; x_0 = \cdots = x_k = 0\}.$$

Действительно, деформационная ретракция задаётся формулой

$$f_t([x_0 : \cdots : x_k : x_{k+1} : \cdots : x_n]) := [tx_0 : \cdots : tx_k : x_{k+1} : \cdots : x_n].$$

Точка $f_0(x)$ корректно определена для всех $x \in P^n \setminus P^k$, потому что хотя бы одна из координат $x_{k+1}, \ldots, x_n$ не равна нулю.