Топология — 3
Шпаргалка к лекции 3:
Локально тривиальные расслоения
22 февраля 2024

1 Расслоения

Пусть F — топологическое пространство. Непрерывное отображение $p : E \to B$ называют *локально тривиальным расслоением* со слоем F, если для каждой точки $x \in B$ существует окрестность U и гомеоморфизм $\tau : p^{-1}(U) \to U \times F$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "p"] & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

коммутативна ("такая окрестность $U \ni x$, что $p^{-1}(U) \to U$ — тривиальное расслоение").

"Быть локально тривиальным расслением" — это *свойство*, а не *структура* (вся информация уже содержится в отображении p).

Для каждого $f : X \to B$ определен *обратный образ* локально тривиального расслоения $\xi = [F \to E \xrightarrow{p} B]$, локально тривиальное расслоение $f^*\xi = [F \to E' \xrightarrow{p'} X]$. А именно,

$$E' := \{(x, e) \in X \times E : \ f(x) = p(e)\}, \quad p' = \mathrm{pr}_1.$$

Это декартов квадрат (пулбэк) в топологической категории:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1 = p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

2 Об относительной теореме Гуревича

Определение. Пара линейно связных пространств (X, A) *n-связна*, если $A \neq \varnothing$ и $\pi_j(X, A) = 0$ при $j \leq n$.

Теорема (относительная теорема Гуревича). Если (X, A) — n-связная пара, то $H_j(X, A; \mathbb{Z}) = 0$ при $j \leq n$. Кроме того, $H_{n+1}(X, A; \mathbb{Z}) = \pi_{n+1}(X, A)/\{\text{действие } \pi_1(A)\}$.

Следовательно, для n-связной пары и любого R имеем: $H_j(X) \simeq H_j(A)$ при $j \leq n-1$; $H_n(X) \to H_n(A)$ сюръективно; $H^j(X) \simeq H^j(A)$ при $j \leq n-1$; $H^n(A) \to H^n(X)$ инъективно.

3 Теорема Лере–Хирша

Определение. Локально тривиальное расслоение $F \xrightarrow{i} E \to B$ *тотально не когомологично нулю* над кольцом R (сокращённо: TNCZ), если верно:

- $H^*(F; R)$ — свободный R-модуль конечного типа[1];
- $i^* : H^*(E; R) \to H^*(F; R)$ сюръективно.

Примеры:

[1] то есть все $H^i(F; R)$ — конечно порожденные R-модули.

1. Тривиальное расслоение — TNCZ, если $H^*(F)$ — свободный модуль конечного типа;

2. Расслоения Хопфа — не TNCZ;

3. $S^1 \to \mathbb{R}P^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ — TNCZ над $\mathbb{Z}/2$.

В такой ситуации можно выбрать элементы $\{c_j\} \subset H^*(E)$, такие что $\{i^*(c_j)\} \subset H^*(F)$ — базис $H^*(F)$ как R-модуля (для слоя F над *любой* точкой из B).

Теорема Лере–Хирша (Leray, Hirsch, ∼1950). Пусть $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение, которое TNCZ над кольцом R. Тогда имеем изоморфизм R-модулей

$$\Phi : H^*(F) \otimes H^*(B) \to H^*(E), \quad \Phi(i^*(c_j) \otimes b) := c_j \cdot p^*(b). \quad \square$$

Φ — изоморфизм $H^*(B)$-модулей, но не обязательно изоморфизм колец. Причина: элемент $i^*(c_{j_1} c_{j_2}) \in H^*(F)$ может не быть частью базиса $\{i^*(c_j)\}$. Мы знаем, что он однозначно представляется в виде $\sum_\alpha \lambda_\alpha i^*(c_{j_\alpha})$, $\lambda_\alpha \in R$. Поэтому $\Phi(i^*(c_{j_1}) \cdot i^*(c_{j_2})) = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{j_\alpha}$. Нет гарантий, что это в точности $\Phi(i^*(c_{j_1})) \cdot \Phi(i^*(c_{j_2})) = c_{j_1} c_{j_2}$.

4 Когомологии $U(n)$ и $SU(n)$

Группа Ли — это групповой объект в категории гладких многообразий: то есть группа (G, μ, inv), такая что G — гладкое многообразие, а μ и inv — гладкие отображения. Подгруппа Ли группы Ли — это замкнутая подгруппа, которая сама является гладким многообразием.

С группами Ли связано много локально тривиальных расслоений, по следующей причине:
Лемма Эресманна (Ehresmann, 1951). Пусть $f : M \to N$ — сюръективная собственная[2] субмерсия[3] гладких многообразий без края. Тогда f — локально тривиальное расслоение. $\square$

Из неё выводится, например, такое:

- Пусть $G \curvearrowright X$ — гладкое транзитивное действие компактной группы Ли на гладком многообразии. Выберем точку $x \in X$ и рассмотрим отображение $G \to X$, $g \mapsto g \cdot x$. Тогда $G_x \to G \to X$ — локально тривиальное расслоение (а $G_x \subset G$ — подгруппа Ли.)

- G — группа Ли, $H \subset G$ — компактная подгруппа Ли $\Rightarrow G/H$ — гладкое многообразие, $H \to G \to G/H$ — локально тривиальное расслоение.

Например, $U(n)$ транзитивно действует на $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, и стабилизатор точки $(1, 0, \dots, 0)$ можно отождествить с $U(n-1)$; получаем локально тривиальное расслоение $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$. Следствия:

1. $\pi_j(U(n-1)) \simeq \pi_j(U(n)) \simeq \dots \simeq \pi_j(U)$ при $j \le 2n-2$, где $U = \mathrm{colim}_{n\to\infty} U(n)$ — это группа бесконечных вправо и вниз унитарных матриц, у которых только финитная часть отличается от единичной. На самом деле Ботт доказал, что $\pi_{2k+1}(U) = \mathbb{Z}$ и $\pi_{2k}(U) = 0$.

2. Пара $(U(n), U(n-1))$ — это $(2n-2)$-связная пара. (Следовательно, $H^j(U(n)) \to H^j(U(n-1))$ — изоморфизм при $j \le 2n-3$).

Теорема. $H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}]$ $(|x_i| = i)$ как кольца.
Набросок доказательства. Индукция по n. База: $U(1) = S^1$.

Шаг индукции: пусть $H^*(U(n-1); \mathbb{Z}) = \Lambda[x_1, \dots, x_{2n-3}]$. Выше доказано, что $i^* : H^j(U(n); \mathbb{Z}) \to H^j(U(n-1); \mathbb{Z})$ сюръективно при $j \le 2n-3$. Отсюда $x_j = i^*(c_j)$ для некоторых $c_j \in H^j(U(n); \mathbb{Z})$.

[2]То есть прообраз любого компакта компактен. Заведомо выполнено, если M компактно.
[3]То есть дифференциал $d_x f : T_x M \to T_{f(x)} N$ сюръективен для каждой точки $x \in M$.

Элементы x_j порождают кольцо $H^*(U(n-1);\mathbb{Z})$, поэтому i^* сюръективно. Значит, можно применить теорему Лере–Хирша для набора $\{c_{j_1}\cdot\ldots\cdot c_{j_k}:\ j_1<\cdots<j_k\}\subset H^*(U(n);\mathbb{Z})$. Отображение Φ оказывается изоморфизмом колец: $c_j^2=0$, так как $|c_j|$ нечётно и в $H^*(U(n);\mathbb{Z})$ нет 2-кручения. $\square$

Теорема. $H^*(SU(n);\mathbb{Z})\cong\Lambda_{\mathbb{Z}}[x_3,x_5,\ldots,x_{2n-1}]$ $(|x_i|=i)$ как кольца. $\square$

Её можно вывести из предыдущей (с помощью расслоения $SU(n)\to U(n)\to S^1$) или доказать аналогично (используя $SU(2)=S^3$ и $SU(n-1)\to SU(n)\to S^{2n-1}$).

5 Тривиализации расслоений

Определение. Пусть $\xi=[F\to E\xrightarrow{p}B]$ — локально тривиальное расслоение, $A\subset B$ — подмножество. Всякий гомеоморфизм τ вида

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[r, "\tau", "\simeq"'] \arrow[d, "p"'] & A\times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ A & \end{tikzcd}$$

называют *тривиализацией* расслоения ξ над A.

Это аналог координатной карты. (У каждой точки $x\in B$ есть окрестность, над которой ξ можно тривиализовать — точно так же, как у каждой точки топологического многообразия есть окрестность, в которой можно ввести координаты. Выбор тривиализации не однозначен.)

На пересечении карт возникают функции перехода. Их аналог — *склеивающие функции*. Пусть τ_1 — тривиализация ξ над A_1, τ_2 — над A_2. Обозначим $A_{12}:=A_1\cap A_2$. Видим:

$$\begin{tikzcd} A_{12}\times F \arrow[rr, dashed, "c"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{pr}_1"'] & & A_{12}\times F \arrow[dl, bend left, "\mathrm{pr}_1"] \\ & p^{-1}(A_{12}) \arrow[ul, "\simeq", "\tau_1"'] \arrow[ur, "\simeq"', "\tau_2"] \arrow[d, "p"] & \\ & A_{12} & \end{tikzcd}$$

Тогда $c(a,f)=(a,\widetilde{g}(a,f))$ для некоторого $\widetilde{g}:A_{12}\times F\to F$. То есть каждой точке $a\in A_{12}$ соответствует отображение $g(a)=\widetilde{g}(a,-):F\to F$. Это гомеоморфизм[4]. Получаем *склеивающую функцию*

$$g:A_{12}\to\mathrm{Homeo}(F),\quad \tau_2(\tau_1^{-1}(a,f))=(a,g(a)\cdot f).$$

Она непрерывна (задача). Если $g(a)=\mathrm{id}_F$ для всех $a\in A_{12}$, то тривиализации τ_1 и τ_2 совпадают на пересечении, то есть склеиваются в единую тривиализацию над $A_1\cup A_2$. Иногда можно "подкрутить" одну из тривиализаций так, чтобы она совпала со второй на пересечении. Вот пример.

Пусть ξ — локально тривиальное расслоение над $B=[-1,1]\times Y$. Разобьём базу на две части: $B_-:=[-1,0]\times Y$, $B_+:=[0,1]\times Y$, $B_0:=\{0\}\times Y$.

Утверждение. Пусть ξ тривиально над B_- и над B_+. Тогда ξ тривиально над B.

Доказательство. Обозначим через $\pi:B_+\to B_0$ забывание первой координаты. Выберем тривиализации τ_+ и τ_- над B_+ и B_- соответственно. Пусть g — склеивающая функция: $\tau_+(\tau_-^{-1}(x,f))=(x,g(x)\cdot f)$. Построим новую тривиализацию $\widehat{\tau}_+$ над B_+ :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(B_+) \arrow[r, "\tau_+"] \arrow[dr, "\widehat{\tau}_+"'] & B_+\times F \arrow[d, "\varphi"] \\ & B_+\times F. \end{tikzcd}$$

[4] Обратное к нему отображение строится аналогично с помощью $c^{-1}:=\tau_1\circ\tau_2^{-1}$.

$$\widehat{\tau}_+ := \varphi \circ \tau_+, \quad \varphi(x,f) := (x, g(\pi(x))^{-1} \cdot f).$$

(Это тривиализация, так как φ — послойный гомеоморфизм.) Склеивающая функция для $\widehat{\tau}_+$ и τ_- уже тривиальна:

$$\widehat{\tau}_+(\tau_-^{-1}(x,f)) = \varphi(\tau_+(\tau_-^{-1}(x,f))) = \varphi(x, g(x)\cdot f) = (x, \underbrace{g(\pi(x))^{-1}\cdot g(x)}_{=\mathrm{id}} \cdot f) = (x,f),$$

так как $\pi(x) = x$ при $x \in B_0$. Получили тривиализацию над $B_- \cup B_+ = B$. □

Отсюда из соображений компактности выводится

Теорема Фельдбау (Feldbau, 1939). Если ξ — локально тривиальное расслоение над $[0,1]^n$, то ξ тривиально. □

6 О классификации расслоений

Локально тривиальные расслоения $E_1 \to B$ и $E_2 \to B$ *изоморфны*, если существует гомеоморфизм $E_1 \to E_2$, коммутирующий с проекциями. Обозначение: $\xi_1 \simeq \xi_2$.

Лемма. (докажем потом) Пусть ξ — локально тривиальное расслоение над B, и пусть $f, g : X \to B$ — гомотопные отображения. Тогда $f^*\xi \simeq g^*\xi$. □

Из этой леммы в одну строчку следует теорема Фельдбау: $\mathrm{id} : D^n \to D^n$ гомотопно отображению в точку. Значит, любое ξ над D^n эквивалентно обратному образу расслоения над точкой, то есть тривиальному расслоению.

Ещё одно приложение: классификация расслоений над сферами.

Теорема (тоже Feldbau, 1939). Имеем естественную биекцию

$$\{\text{локально тривиальные расслоения над } S^n \text{ со слоем } F\}/\simeq \quad\cong\quad \pi_{n-1}(\mathrm{Homeo}(F)).$$

Доказательство. Каждому отображению $g : S^{n-1} \to \mathrm{Homeo}(F)$ соответствует расслоение $\xi(g)$ над S^n : склейка тривиальных расслоений над полусферами по склеивающему отображению g. Остаётся проверить:

- Если $g_1 \sim g_2$, то $\xi(g_1) \simeq \xi(g_2)$. (Делается так: если $G : S^{n-1} \times [0,1] \to \mathrm{Homeo}(F)$ — гомотопия между g_1 и g_2, то склеиваем два тривиальных расслоения над D^n по цилиндру (окрестности границы). Получается расслоение над S^n, которое можно разрезать в двух разных местах: в одном получится g_1, в другом — g_2. Осталось переместить “место разреза” на экватор (отображением сферы в себя, гомотопным тождественному), и применить лемму.)

- Любое расслоение η эквивалентно какому-то $\xi(g)$. (Это легко: и над северным, и над южным полушарием расслоение тривиально по теореме Фельдбау. Выбираем тривиализации. Они склеены над экватором по какому-то g.)

- Если $\xi(g_1) \simeq \xi(g_2)$, то $g_1 = g_2$. (С помощью изоморфизма расслоений меняем тривиализации над полусферами, пока расслоения не совпадут.) □