Топология — 3
Шпаргалка к лекции 6:
Расслоения со структурной группой
14 марта 2024

1 Действия топологических групп

Топологическая группа (G, μ, inv) — это групповой объект в категории топологических пространств (то есть G — топологическое пространство, а групповые операции

$$\mu : G \times G \to G,\ (g, h) \mapsto gh; \quad \mathrm{inv} : G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

— непрерывные отображения).

Левое действие топологической группы G на пространстве X — это такое действие группы[1] $G \curvearrowright X$, что отображение $G \times X \to X$ непрерывно. Аналогично определяется правое действие $X \curvearrowleft G$ (только теперь $X \times G \to X$ и $(x \cdot h) \cdot g = x \cdot hg$).

Действие $G \curvearrowright X$ называется

- *эффективным*, если каждый элемент группы действует нетривиально
  $(\forall g \in G \setminus \{e\}\ \exists x \in X : g \cdot x \neq x)$;
- *транзитивным*, если все точки лежат в одной орбите $(\forall x, y \in X\ \exists g \in G : g \cdot x = y)$;
- *свободным*, если все стабилизаторы тривиальны $(g \cdot x \neq x,\ \forall x \in X,\ \forall g \in G \setminus \{e\})$.

Значит, если действие свободно и транзитивно, то действие имеет единственную орбиту, и она “размером со всю группу”. В случае топологических групп это означает, что $G \to X$ — непрерывная биекция (но топология на X может быть *грубее*, чем на G).

Если $X \curvearrowleft G$ — действие, можно рассмотреть факторпространство $X/G := X/\sim$, $x \sim x \cdot g$ (с фактортопологией).

Лемма. Если $X \curvearrowleft G$, то $p : X \to X/G$ — открытое отображение.

Доказательство. Пусть $U \subset X$ открыто. Надо проверить, что $p(U)$ открыто в X/G. Это верно тогда и только тогда, когда $p^{-1}(p(U))$ открыто в X. Но $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} Ug \subset X$ — объединение открытых подмножеств. □

Если $X \curvearrowleft G$ и $G \curvearrowright Y$, обозначим

$$X \times_G Y := X \times Y/\sim, \quad (x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y).$$

На это пространство можно смотреть как на фактор по диагональному действию $X \times Y \curvearrowleft G$, где $Y \curvearrowleft G$ по формуле $y \cdot g := g^{-1} \cdot y$. Поэтому $X \times Y \to X \times_G Y$ — тоже открытое отображение.

Легко проверить ассоциативность этой операции: если $X \curvearrowleft G \curvearrowright Y \curvearrowleft H \curvearrowright Z$, причём $(g \cdot y) \cdot h = g \cdot (y \cdot h)$, то

$$(X \times_G Y) \times_H Z \cong X \times_G (Y \times_H Z).$$

(Действительно: как множества, это факторпространства $X \times Y \times Z$ по одинаковому отношению эквивалентности. Из леммы следует, что оба отображения факторизации открытые. Значит, открытые множества — в точности образы открытых множеств из $X \times Y \times Z$.)

[1] то есть $g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x$ и $e \cdot x = x$

2 Главные G-расслоения

Группа G топологическая, её действия непрерывны.

Определение. Пусть задано непрерывное действие $P \curvearrowleft G$. Непрерывное отображение $\pi : P \to B$ называют *главным G-расслоением*, если верно:

(a) G действует *послойно*, то есть $\pi^{-1}(b) \curvearrowleft G$ для любой $b \in B$;

(b) Для каждой точки $b \in B$ найдётся окрестность $U \ni b$ и *G-эквивариантная* тривиализация τ, то есть эквивариантный гомеоморфизм

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, "\tau", "\simeq"'] \arrow[d, "\pi"'] & U \times G \arrow[dl, bend left, "\mathrm{pr}_1"] \\ U. & \end{tikzcd}$$

(Здесь G действует справа на $p^{-1}(U) \subset P$, так как $p^{-1}(U)$ — объединение слоёв; G действует справа на $U \times G$ по формуле $(u, g) \cdot g' = (u, gg')$. "Эквивариантность" — это условие $\tau(p \cdot g) = \tau(p) \cdot g$.)

В частности, для главных G-расслоений выполнено:

- $\pi : P \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем G (очевидно из (b));
- $P/G \cong B$ (упражнение);
- Действие $P \curvearrowleft G$ свободно (так как действие на каждом слое свободно: τ отождествляет слой с G, а действие на нём — с действием $G \curvearrowleft G$ правыми сдвигами).

На лекции ошибочно утверждалось, что G-расслоения — это в точности локально тривиальные расслоения вида $G \to P \to P/G$, где действие свободно. Но из этих свойств *не следует*, что действие на слоях — стандартное!

Примеры G-расслоений:

1. Если G — дискретная группа, то главные G-расслоения — это в точности регулярные накрытия со слоем G. Например, $S^n \to \mathbb{R}P^n$ — главное $\mathbb{Z}_2$-расслоение.
2. (б/д) Если $H \subset G$ — компактная подгруппа Ли в группе Ли, то $H \to G \to G/H$ — главное H-расслоение. Например, $U(n) \to S^{2n-1}$ — главное $U(n-1)$-расслоение, $SO(n) \to S^{n-1}$ — главное $SO(n-1)$-расслоение...

3 Расслоения со структурной группой

Пусть $P \curvearrowleft G$ — главное G-расслоение над $B = P/G$, $G \curvearrowright F$ — произвольное действие. Рассмотрим проекцию

$$\pi' : P \times_G F \to B, \quad \pi'([p, f]) := \pi(p).$$

Она корректно определена: $\pi'([p \cdot g, g^{-1} \cdot f]) = \pi'([p, f])$, так как $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$. Альтернативная конструкция: G-эквивариантное отображение $F \to \mathrm{pt}$ индуцирует отображение

$$\pi' : P \times_G F \to P \times_G \mathrm{pt} \cong P/G \cong B.$$

Определение. Говорят, что $\pi' : P \times_G F \to B$ — это *расслоение со структурной группой G (и слоем F), ассоциированное с главным G-расслоением $\pi : P \to B$.*

Предложение. Это действительно локально тривиальное расслоение со слоем F.
Набросок доказательства. У нас есть эквивариантная тривиализация расслоения $\pi : P \to B$ над U,

$$\tau : \pi^{-1}(U) \to U \times G, \quad \tau(p) =: (\pi(p), \gamma(p)); \quad \gamma(p \cdot g) = \gamma(p) \cdot g.$$

Построим тривиализацию расслоения $P \times_G F \to B$:

$$\widehat{\tau} : \pi'^{-1}(U) \to U \times F, \quad \widehat{\tau}([p, f]) := (\pi(p), \gamma(p) \cdot f).$$

Они корректно определены:

$$\widehat{\tau}([p \cdot g, g^{-1} \cdot f]) = (\pi(p), \gamma(p \cdot g) \cdot g^{-1} \cdot f) = \widehat{\tau}([p, f]).$$

Обратное отображение: $\widehat{\tau}^{-1}(u, f) := [\tau^{-1}(u, e), f]$. $\square$

Пример: пусть Mb — лента Мёбиуса. Имеем локально тривиальное расслоение $Mb \to S^1$ со слоем $[-1, 1]$. Это расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}_2$, которое ассоциировано с главным $\mathbb{Z}_2$-расслоением $S^1 \to S^1$. Действие $\mathbb{Z}_2 \curvearrowright [-1, 1]$ — это инволюция $x \mapsto -x$.

4 Координатный подход к G-расслоениям

Пусть $\pi : P \to B$ — главное G-расслоение. Зафиксируем покрытие $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ и тривиализации $\tau_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$. Возникают эквивариантные функции перехода ($U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$):

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta} \times G \arrow[rr, dashed, "c_{\alpha\beta}", "\sim"'] \arrow[ddr, "\mathrm{pr}_1"'] & & U_{\alpha\beta} \times G \arrow[ddl, "\mathrm{pr}_1"] \\
& \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[ul, "\tau_\beta"', "\sim"] \arrow[ur, "\tau_\alpha", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"] & \\
& U_{\alpha\beta}; &
\end{tikzcd}$$

в частности, эквивариантный гомеоморфизм (на лекции была опечатка: $\tau_\beta \circ \tau_\alpha^{-1}$ вместо $\tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1}$!)

$$c_{\alpha\beta} := \tau_\alpha \circ \tau_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times G \to U_{\alpha\beta} \times G.$$

Как он может быть устроен? Во-первых, первая координата не меняется, так как $c_{\alpha\beta}$ коммутирует с проекцией. Обозначим $c_{\alpha\beta}(x, e) =: (x, g_{\alpha\beta}(x))$; тогда

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$$

— непрерывная функция. Во-вторых, $c_{\alpha\beta}(x, g) = (x, g_{\alpha\beta}(x)g)$ из эквивариантности. То есть $c_{\alpha\beta}$ задаётся отображением $g_{\alpha\beta}$. Очевидные свойства:

(a) $g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x) = g_{\alpha\gamma}(x)$ для любой $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$;

(b) $g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\alpha}(x)$ для любой $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Такой набор $\{g_{\alpha\beta}\}$ называют *склеивающим коциклом* тривиализующего покрытия $\{(U_\alpha, \tau_\alpha)\}$. Склеивающий коцикл позволяет *полностью* восстановить главное G-расслоение (склеить его из тривиальных расслоений):

Предложение. Пусть B — топологическое пространство, G — топологическая группа, $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие. Выберем набор отображений $\{g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to G\}$, удовлетворяющий свойствам (a) и (b). Тогда

$$P := \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times G)/\sim, \quad \underbrace{(x, g)}_{\in U_\beta \times G} \sim \underbrace{(x, g_{\alpha\beta}(x)g)}_{\in U_\alpha \times G}, \; x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

— главное G-расслоение над B. Если $\{g_{\alpha\beta}\}$ — уже склеивающий коцикл главного G-расслоения P', то $P \cong P'$. (Доказательство — упражнение.) $\square$

Ассоциированные расслоения со структурной группой склеиваются по тому же коциклу из тривиальных расслоений $U_\alpha \times F \to U_\alpha$. Формула: $(x, f) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot f)$.