Топология — 3
Конспект лекции 12: Лере и Хирш наносят ответный удар
26 апреля 2024

Мы рассматриваем когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, комплексные векторные расслоения, их классы Черна $c_i \in H^{2i}(X;\mathbb{Z})$, топологические группы $T^n \subset U(n) \subset GL(\mathbb{C}^n)$.

Вещественный аналог: когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$, вещественные векторные расслоения, их классы Штифеля–Уитни $w_i \in H^i(X;\mathbb{Z}_2)$, топологические группы $(\mathbb{Z}_2)^n \subset O(n) \subset GL(\mathbb{R}^n)$. Доказательства полностью аналогичны.

Вспомним теорему Лере–Хирша. Пусть локально тривиальное расслоение $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ тотально не когомологично нулю; другими словами, выполнены оба условия:

- $H^*(F)$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль конечного типа;
- $i^* : H^*(E) \to H^*(F)$ сюръективно.

Выберем аддитивный базис $\{x_\alpha\} \subset H^*(F)$ и прообразы базисных элементов: $\{y_\alpha\} \subset H^*(E)$, $i^*(y_\alpha) = x_\alpha$. Тогда определено отображение $H^*(B)$-модулей

$$\Phi : H^*(B) \otimes H^*(F) \to H^*(E), \quad b \otimes x_\alpha \mapsto p^*(x) \cdot y_\alpha.$$

Теорема Лере–Хирша: Φ — изоморфизм модулей.

Другими словами, $H^*(E)$ — свободный $H^*(B)$-модуль с базисом $\{y_\alpha\}$, где действие кольца $H^*(B)$ задаётся отображением p. Для любого $e \in H^*(E)$ найдётся единственный набор элементов $\{e_\alpha\} \subset H^*(B)$ такой, что $e = \sum_\alpha p^*(e_\alpha) \cdot y_\alpha$.

1 Когомологии проективизации векторного расслоения

Пусть $\xi = [p_0 : E \to X]$ — комплексное векторное расслоение ранга n. Его проективизация — это локально тривиальное расслоение

$$\mathbb{CP}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{CP}(\xi) \xrightarrow{p} X. \tag{1}$$

Над $\mathbb{CP}^{n-1}$ есть тавтологическое расслоение ζ; напомним, что это линейное расслоение (векторное расслоение ранга 1) с тотальным пространством $E(\zeta) := \{(\Pi, v) \in \mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{C}^n :\ v \in \Pi\}$. Над $\mathbb{CP}(\xi)$ тоже есть *тавтологическое расслоение* ζ_ξ : его тотальное пространство равно

$$E(\zeta_\xi) = \{(\Pi, v) \in \mathbb{CP}(\xi) \times E :\ p(\Pi) = p_0(v),\ v \in \Pi\}.$$

Расслоение ζ_ξ — обратный образ универсального расслоения над $\mathbb{CP}^\infty$ под действием классифицирующего отображения $g : \mathbb{CP}(\xi) \to \mathbb{CP}^\infty$; обозначим $x_\xi := g^*(x) \in H^2(\mathbb{CP}(\xi))$, где $x \in H^2(\mathbb{CP}^\infty)$ — стандартная образующая[1].

Теорема 1. Имеем изоморфизм колец

$$H^*(\mathbb{CP}(\xi)) \cong \big(H^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x_\xi]\big)/(P(x_\xi) = 0),$$

где $P(x_\xi)$ — некоторый приведённый многочлен степени n (с коэффициентами в $H^*(X)$.)

[1] Другими словами, $x_\xi := -c_1(\zeta_\xi)$. Но классы Черна, формально говоря, ещё не определены.

Доказательство. Проверим, что к расслоению (1) применима теорема Лере–Хирша. Когомологии $\mathbb{CP}^{n-1}$ — свободный модуль конечного типа.

Из определений сразу же следует, что $i^*(\zeta_\xi) = \zeta$. Поэтому $i^*(c_1(\zeta_\xi)) = c_1(\zeta)$; другими словами, $i^*(x_\xi) = x$. Так как $x \in H^2(\mathbb{CP}^{n-1})$ мультипликативно порождает $H^*(\mathbb{CP}^{n-1})$, отображение $p^* : H^*(\mathbb{CP}(\xi)) \to H^*(\mathbb{CP}^{n-1})$ сюръективно.

Итак, по теореме Лере–Хирша, $H^*(\mathbb{CP}(\xi))$ — свободный $H^*(X)$-модуль с базисом $1, x_\xi, \dots, x_\xi^{n-1}$. Значит, x_ξ^n — линейная комбинация этих элементов с коэффициентами в $H^*(X)$. Это даёт искомое соотношение вида $x_\xi^n + (\dots) \cdot x_\xi^{n-1} + \dots = 0$. Других соотношений нет. □

Определение: пусть $c_k(\xi) \in H^{2k}(X)$ — коэффициенты многочлена $P(x_\xi)$:

$$P(x_\xi) = x_\xi^n + c_1(\xi) \cdot x_\xi^{n-1} + \dots + c_n(\xi).$$

Другими словами, классы $c_k(\xi) \in H^{2k}(X)$ — это единственный набор классов, для которых выполнено тождество

$$\sum_{k+\ell=n} p^*(c_k(\xi)) \cdot x_\xi^\ell = 0 \in H^*(\mathbb{CP}(\xi)). \tag{2}$$

Теорема 2. Классы $c_k(\xi)$ удовлетворяют аксиомам классов Черна:

1. $c_0(\xi) = 1$, $c_k(\xi) = 0$ при $k > n$;
2. $c_k(f^*\xi) = f^*(c_k(\xi))$;
3. $c(\zeta_1) = 1 - x$, где ζ_1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}^m$,
   $x = [\mathbb{CP}^1] \in H^2(\mathbb{CP}^m)$ — стандартная образующая;
4. $c(\xi_1) \cdot c(\xi_2) = c(\xi_1 \oplus \xi_2)$.

Доказательство. Аксиома 1 выполнена по определению.

Докажем аксиому 2. Пусть $f : Y \to X$; имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{CP}(f^*\xi) \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d, "p'"] & \mathbb{CP}(\xi) \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, "f"] & X.
\end{tikzcd}$$

При этом ζ_ξ — расслоение над $\mathbb{CP}(\xi)$, $\zeta_{f^*\xi}$ — расслоение над $\mathbb{CP}(f^*\xi)$. Из определений сразу же следует, что $\overline{f}^*(\zeta_\xi) \cong \zeta_{f^*\xi}$; следовательно, $\overline{f}^*(x_\xi) = x_{f^*\xi}$. Рассмотрим обратный образ тождества (2) под действием $\overline{f}^*$. Так как $p'^* \circ f^* = \overline{f}^* \circ p^*$, получаем

$$\sum_{k+\ell=n} p'^*(f^*(c_k(\xi))) \cdot x_{f^*\xi}^\ell = 0.$$

С другой стороны, классы $c_k(f^*\xi)$ однозначно восстанавливаются из тождества

$$\sum_{k+\ell=n} p'^*(c_k(f^*\xi)) \cdot x_{f^*\xi}^\ell = 0.$$

Итак, $f^*(c_k(\xi)) = c_k(f^*\xi)$. Аксиома естественности доказана.

Рассмотрим аксиому 3. Так как ζ_1 — расслоение ранга 1, его проективизация — это тривиальное расслоение

$$* \cong \mathbb{CP}^0 \to \mathbb{CP}(\zeta_1) \xrightarrow[\simeq]{p} \mathbb{CP}^m.$$

Значит, $p^*(x) = x_{\zeta_1}$. С другой стороны, класс $c_1(\zeta_1)$ однозначно восстанавливается из тождества $x_{\zeta_1} + p^*(c_1(\zeta_1)) = 0$. Поэтому $c_1(\zeta_1) = -x$.

Аксиому 4 мы выведем из следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $A = U_1 \cup U_2$ — топологическое пространство, $i_j : U_j \hookrightarrow A$ — вложения. Пусть классы $a_1, a_2 \in H^*(A)$ таковы, что $i_j^*(a_j) = 0 \in H^*(U_j)$. Тогда $a_1 \cdot a_2 = 0 \in H^*(A)$.

Доказательство. Точная последовательность пары: $H^*(A, U_j) \to H^*(A) \to H^*(U_j)$. Таким образом, a_j — образ некоторого $\widetilde{a}_j \in H^*(A, U_j)$. Кроме того, $\smile$-умножение согласовано с этими отображениями: имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H^*(A,U_1) \otimes H^*(A,U_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^*(A, U_1 \cup U_2) \ni \widetilde{a}_1 \cdot \widetilde{a}_2 \arrow[d] \\
H^*(A) \otimes H^*(A) \arrow[r] & H^*(A) \ni a_1 \cdot a_2.
\end{tikzcd}$$

Но группа в правом верхнем углу равна $H^*(A, A) = 0$. Значит, $a_1 \cdot a_2 = 0$. $\square$

Вернёмся к векторному расслоению $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2$. Пусть n_j — ранг ξ_j, и $n = n_1 + n_2$. Вложение $\xi_j \hookrightarrow \xi$ индуцирует отображение проективизаций $\mathbb{CP}(\xi_j) \hookrightarrow \mathbb{CP}(\xi)$; более того, имеем композицию

$$i_1 : \mathbb{CP}(\xi_1) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{CP}(\xi) \setminus \mathbb{CP}(\xi_2) \hookrightarrow \mathbb{CP}(\xi),$$

и аналогичную для ξ_2. (первое отображение — гомотопическая эквивалентность: это аналогично эквивалентности $\mathbb{CP}^{n-1} \setminus \mathbb{CP}^{n_2-1} \simeq \mathbb{CP}^{n_1-1}$.) Также рассмотрим элементы

$$a_j := \sum_{k+\ell=n_j} p^*(c_k(\xi_j)) \cdot x_\xi^\ell \in H^*(\mathbb{CP}(\xi)).$$

Проверим, что к ним применима лемма. Действительно: легко проверить, что $i_j^*(\zeta_\xi) = \zeta_{\xi_j}$. Следовательно, $i_j^*(x_\xi) = x_{\xi_j}$, то есть

$$i_j^*(a_j) = \sum_{k+\ell=n_j} p^*(c_k(\xi_j)) \cdot x_{\xi_j}^\ell \in H^*(\mathbb{CP}(\xi_j))$$

— а это и есть тождество (2) для ξ_j. Итак, $i_j^*(a_j) = 0$, поэтому

$$0 = a_1 \cdot a_2 = \sum_{k+l=n} \sum_{k=k_1+k_2} p^*\left(c_{k_1}(\xi_1) c_{k_2}(\xi_2)\right) x_\xi^\ell \in H^*(\mathbb{CP}(\xi)).$$

Сравнивая это с (2), получаем искомое тождество

$$c_k(\xi) = \sum_{k=k_1+k_2} c_{k_1}(\xi_1) c_{k_2}(\xi_2). \quad \square$$

2 Принцип расщепления

Напомним, что для всех $1 \leq n \leq N \leq +\infty$ определено многообразие n-флагов в $\mathbb{C}^N$,

$$Fl(n, \mathbb{C}^N) := \{\varphi = (V_1 \subset \cdots \subset V_n) : \; V_j \subset \mathbb{C}^N \text{ — векторные подпространства, и } \dim V_j = j\}.$$

(Это подмногообразие в произведении грассманианов $Gr(1, \mathbb{C}^N) \times \cdots \times Gr(n, \mathbb{C}^N)$). Для каждого $j = 1, \ldots, n$ имеем j-ое тавтологическое расслоение ζ_j над $Fl(n, \mathbb{C}^N)$,

$$E(\zeta_j) := \{(\varphi, v) \in Fl(n, \mathbb{C}^N) \times \mathbb{C}^N : \; v \in V_j\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Fl(n, \mathbb{C}^N).$$

Это векторное расслоение ранга j. Имеем естественные вложения $0 = \zeta_0 \subset \zeta_1 \subset \cdots \subset \zeta_n$.

Относительная версия: если $\xi = [p_0 : E \to X]$ — комплексное векторное расслоение ранга n, то его *флагизация* — локально тривиальное расслоение

$$Fl(n, \mathbb{C}^n) \xrightarrow{i} Fl(\xi) \xrightarrow{p} X. \tag{3}$$

Над пространством $Fl(\xi)$ тоже имеем n тавтологических расслоений $\zeta_{\xi,j}$,

$$E(\zeta_{\xi,j}) := \{(\varphi, v) \in Fl(\xi) \times E :\ p(\varphi) = p_0(v),\ v \in V_j\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} Fl(\xi).$$

Скоро мы изучим когомологии $Fl(n, \mathbb{C}^N)$ и поймём, что верно следующее

Предложение 4. Кольцо $H^*(Fl(n, \mathbb{C}^n))$ — свободный модуль конечного типа. Оно мультипликативно порождено элементами $c_1(\zeta_j/\zeta_{j-1}) \in H^2(Fl(n, \mathbb{C}^n))$, $j = 1, \ldots, n$. □

Выведем из него теорему, на которой основан *принцип расщепления.*

Теорема 5.

1. Векторное расслоение $p^*(\xi)$ — прямая сумма расслоений ранга 1.

2. Отображение $p^* : H^*(X) \to H^*(Fl(\xi))$ инъективно.

Доказательство.

1. Из определений сразу же следует, что $p^*(\xi) \cong \zeta_{\xi,n}$. Но $\zeta_{\xi,1} \subset \cdots \subset \zeta_{\xi,n}$; всякое подрасслоение отщепляется прямым слагаемым, поэтому $p^*(\xi) \cong \zeta_{\xi,1} \oplus \cdots \oplus (\zeta_{\xi,n}/\zeta_{\xi,n-1})$.

2. Достаточно проверить, что к расслоению (3) применима теорема Лере–Хирша. Из определений сразу же следует, что $i^*(\zeta_{\xi,j}) \cong \zeta_j$. Значит, классы $c_1(\zeta_j/\zeta_{j-1})$ лежат в образе i^*. По предложению выше, i^* сюръективно. Итак, теорема Лере–Хирша действительно применима. □

По теореме 5, тождества между характеристическими классами достаточно проверять в случае, когда расслоение раскладывается в прямую сумму линейных расслоений (достаточно перейти от X к $Fl(\xi)$, проделать вычисления в $H^*(Fl(\xi))$, а потом вернуться назад, пользуясь инъективностью в когомологиях). Например, пусть ξ, η — комплексные векторные расслоения. Как вычислить $c(\xi \otimes \eta)$?

Мы знаем, что для линейных расслоений верно $c_1(\lambda \otimes \mu) = c_1(\lambda) + c_1(\mu)$. Мы можем считать, что $\xi = \bigoplus_i \lambda_i$, $\eta = \bigoplus_j \mu_j$; обозначим $t_i = c_1(\lambda_i)$ и $s_j = c_1(\mu_j)$. Получаем:

$$c(\xi \otimes \eta) = c(\bigoplus_{i,j} \lambda_i \otimes \mu_j) = \prod_{i,j} c(\lambda_i \otimes \mu_j) = \prod_{i,j} (1 + t_i + s_j).$$

С другой стороны,

$$c(\xi) = \prod_i c(\lambda_i) = \prod_i (1 + t_i), \quad c(\eta) = \prod_j (1 + s_j).$$

Рассматривая градуированные компоненты, получаем:

$$c_k(\xi) \text{ — это } k\text{-ый элементарный симметрический многочлен от } t_i.$$

Таким образом, осталось выразить $\prod_{i,j}(1 + t_i + s_j)$ через элементарные симметрические многочлены от t_i и от s_j, а потом подставить вместо них $c_k(\xi)$ и $c_\ell(\eta)$.

Отметим, что классы $t_1, \ldots, t_n$ такие, что $c_k(\xi) = \sigma(t_1, \ldots, t_n)$, “не обязательно существуют” (они определены в $H^2(Fl(\xi))$ для обратного образа ξ, но не обязательно определены в $H^2(X)$). Эти классы называют *корнями Черна* (Chern roots).

Из курса алгебры известна теорема: каждый симметрический многочлен от n переменных однозначно представляется в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов. Формулой:

$$\mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n].$$

Это позволяет описывать многочлены от классов Черна на языке симметрических функций. Например, рассмотрим сумму k-ых степеней. Она выражается через элементарные симметрические многочлены как *многочлен Ньютона*:

$$t_1^k + \dots + t_n^k = N_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n].$$

Получаем характеристические классы, который обозначают s_k и иногда называют *классами Шура* (Schur classes):

$$s_k(\xi) := N_k(c_1(\xi), \dots, c_n(\xi)) \in H^{2k}(X).$$

Можно рассматривать и формальные степенные ряды: например,

$$\sum_i \exp(t_i) = \sum_{k \geq 0} \frac{N_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}{n!} \in \mathbb{Q}[[\sigma_1, \dots, \sigma_n]].$$

Соответствующий хар. класс (точнее, формальная сумма хар. классов) — это *характер Черна* (Chern character)

$$\operatorname{ch} \xi := \sum_{k \geq 0} \frac{s_k(\xi)}{k!} \in \hat{H}^*(X; \mathbb{Q})$$

(крышка означает, что мы рассматриваем $\prod_i H^i(X)$ вместо $\bigoplus_i H^i(X)$, то есть берём бесконечные суммы.) Можно убедиться, что $\operatorname{ch}(\xi \oplus \eta) = \operatorname{ch}(\xi) + \operatorname{ch}(\eta)$ и $\operatorname{ch}(\xi \otimes \eta) = \operatorname{ch}(\xi) \cdot \operatorname{ch}(\eta)$.

3 Приложения. Классы Понтрягина

3.1 Единственность хар. классов

Напомним, что классы c_i и w_i мы задали аксиоматически (каждому расслоению соответствует набор классов, удовлетворяющих четырём аксиомам).

Теорема 6. Классы Черна и классы Штифеля–Уитни существуют и единственны.

Доказательство. Существование мы доказали (даже двумя способами: через препятствия и через когомологии проективизации). Осталось доказать единственность.

Пусть $\{c_i\}$, $\{\widetilde{c}_i\}$ — два набора хар. классов, удовлетворяющих аксиомам для классов Черна. Докажем, что $c(\xi) = \widetilde{c}(\xi)$ для всех ξ. Действительно:

- $c(\zeta_1) = \widetilde{c}(\zeta_1) = 1 - x \in H^2(\mathbb{CP}^\infty; \mathbb{Z})$ по аксиоме нормировки;
- Если η — комплексное расслоение ранга 1, $\eta = g^*(\zeta_1)$, то $c(\eta) = g^*(c(\zeta_1)) = g^*(1 - x) = g^*(\widetilde{c}(\zeta_1)) = \widetilde{c}(\eta)$ по аксиоме естественности;
- Если $\eta = \lambda_1 \oplus \dots \lambda_n$ — прямая сумма линейных расслоений, то $c(\eta) = \prod_i c(\lambda_i) = \prod_i \widetilde{c}(\lambda_i) = \widetilde{c}(\eta)$ по формуле Уитни;
- Наконец, если η — произвольное комплексное расслоение ранга n, то $c(\eta) = \widetilde{c}(\eta)$ по принципу расщепления. (Подробнее: для $p : Fl(\eta) \to X$ имеем $p^*(\eta) = \lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n$, причём p^* инъективно в когомологиях. Имеем $p^*(c(\eta)) = p^*(c(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n)) = p^*(\widetilde{c}(\lambda_1 \oplus \dots \oplus \lambda_n)) = p^*(\widetilde{c}(\eta))$, поэтому $c(\eta) = \widetilde{c}(\eta)$.) □

3.2 Овеществление и комплексификация

Мы умеем овеществлять комплексные расслоения (при этом ранг удваивается) и комплексифицировать вещественные расслоения (при этом ранг сохраняется). Ещё мы умеем сопрягать комплексные расслоения; известно, что $\overline{\overline{\eta}} = \eta$, $(\eta_\mathbb{R})_\mathbb{C} \cong \eta \oplus \overline{\eta}$ и $(\xi_\mathbb{C})_\mathbb{R} \cong \xi \oplus \xi$.

Рассмотрим естественное отображение $H^*(X; \mathbb{Z}) \to H^*(X; \mathbb{Z}_2)$, $x \mapsto x \mod 2$.

Теорема 7. Пусть η — комплексное расслоение ранга n.

1. $c_k(\overline{\eta}) = (-1)^k c_k(\eta)$.

2. $w(\eta_{\mathbb{R}}) = c(\eta) \mod 2$ (то есть $w_{2i}(\eta_{\mathbb{R}}) = c_i(\eta) \mod 2$ и $w_{2i+1}(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$).

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$. Мы уже знаем, что $c_1(\overline{\eta}) = c_1(\eta^*) = -c_1(\eta)$. Это доказывает пункт 1. В пункте 2 нужно доказать, что

$$w_1(\eta_{\mathbb{R}}) = 0 \text{ и } w_2(\eta_{\mathbb{R}}) = c_1(\eta) \mod 2.$$

Достаточно доказать это в случае, когда η — универсальное расслоение над $\mathbb{CP}^\infty = BU(1) = BSO(2)$. Имеем $H^1(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}_2) = 0$, поэтому $w_1(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$. Далее, $c_1(\eta) \bmod 2$ — образующая в $H^2(\mathbb{CP}^\infty;\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Если вдруг $w_2(\eta_{\mathbb{R}}) = 0$, то второй класс Штифеля–Уитни *любого* ориентируемого вещественного расслоения ранга 2 равен нулю. С другой стороны, если ξ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{RP}^m$, то $\xi \oplus \xi$ ориентируемо, и $w_2(\xi) = a^2 \neq 0 \in H^2(\mathbb{RP}^m;\mathbb{Z}_2)$. Противоречие. Итак, $w(\eta_{\mathbb{R}}) \neq 0$, поэтому $w(\eta_{\mathbb{R}}) = c(\eta) \bmod 2$ для комплексных расслоений ранга $n = 1$.

Для произвольного n теперь оба тождества следуют из принципа расщепления. Например, пусть $p^*(\eta) = \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n$. Тогда

$$p^*(w(\eta_{\mathbb{R}})) = w(\oplus_j(\lambda_j)_{\mathbb{R}}) = \prod_j w((\lambda_j)_{\mathbb{R}}) = \prod_j c(\lambda_j) \bmod 2 = c(\oplus_j \lambda_j) \bmod 2 = p^*(c(\eta) \bmod 2).$$

Так как p^* инъективно, имеем $w(\eta_{\mathbb{R}}) = c(\eta) \mod 2$. $\square$

Про комплексификацию готового ответа нет, но по крайней мере можно сказать следующее:
Предложение 8. Пусть ξ — вещественное расслоение. Тогда $2 \cdot c_{2i+1}(\xi_{\mathbb{C}}) = 0$.

Доказательство. Имеем $\overline{\xi_{\mathbb{C}}} \cong \xi_{\mathbb{C}}$. По предыдущей теореме, $c_{2i+1}(\overline{\xi_{\mathbb{C}}}) = -c_{2i+1}(\xi_{\mathbb{C}})$. $\square$

Определение. Пусть ξ — вещественное векторное расслоение над X. Класс

$$p_n(\xi) := (-1)^n c_{2n}(\xi_{\mathbb{C}}) \in H^{4n}(X;\mathbb{Z})$$

называется его n-ым *классом Понтрягина.*

4 Когомологии многообразий флагов

Зафиксируем эрмитову метрику в $\mathbb{C}^N$. Чтобы от подпространства V_j перейти к подпространству $V_{j+1} \supset V_j$ на единицу большей размерности, необходимо и достаточно выбрать прямую в его ортогональном дополнении $(V_j)^\perp \subset \mathbb{C}^N$. Значит, флаг однозначно задаётся набором попарно ортогональных прямых $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$: надо взять

$$V_j := \operatorname{span}(\ell_1, \ldots, \ell_j) \subset \mathbb{C}^N.$$

Итак, можно отождествить $Fl(n, \mathbb{C}^N)$ с многообразием

$$F(n, \mathbb{C}^N) := \{(\ell_1, \ldots, \ell_n) : \ \ell_i \perp \ell_j, \ i \neq j\} \subset (\mathbb{CP}^{N-1})^n.$$

Также рассмотрим проекции на сомножители $\mathrm{pr}_j : F(n, \mathbb{C}^N) \to \mathbb{CP}^{N-1}$, $j = 1, \ldots, n$. Положим $x_j := \mathrm{pr}_j^*(x) \in H^2(F(n, \mathbb{C}^N))$. Можно убедиться, что при наших отождествлениях $\zeta_j/\zeta_{j-1} \cong \mathrm{pr}_j^*(\zeta)$ — обратный образ тавтологического расслоения; таким образом, $x_j = -c_1(\zeta_j/\zeta_{j-1})$.

Пришло время доказать предложение 4 (которое утверждает, что кольцо $H^*(F(n, \mathbb{C}^N))$ не имеет кручения и порождено элементами $x_1, \ldots, x_n$).
Теорема 9. Модуль $H^*(F(n, \mathbb{C}^N))$ имеет аддитивный базис

$$\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} : \ 0 \leq \alpha_j \leq N - j, \ j = 1, \ldots, n\}.$$

В частности, $H^*(F(n,\mathbb{C}^N))$ — факторкольцо кольца многочленов $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$, $\deg(x_j)=2$.

Доказательство. Индукция по n. База: имеем $F(1,\mathbb{C}^N)\cong\mathbb{CP}^{N-1}$; модуль $H^*(\mathbb{CP}^{N-1})$ действительно имеет аддитивный базис $\{1,\dots,x^{N-1}\}$. Переход индукции: рассмотрим проекцию $\mathrm{pr}_1: F(n,\mathbb{C}^N)\to\mathbb{CP}^{N-1}$. Несложно убедиться, что это локально тривиальное расслоение. Его слой — множество всех наборов попарно ортогональных прямых $(\ell_1,\dots,\ell_n)$, где прямая ℓ_1 фиксирована. Таким образом, $(\ell_2,\dots,\ell_n)$ — произвольный набор попарно ортогональных прямых в $(\ell_1)^\perp$; то есть слой равен $F(n-1,(\ell_1)^\perp)\cong F(n-1,\mathbb{C}^{N-1})$ (где прямые пронумерованы от 2 до n). Итак, имеем расслоение

$$F(n-1,\mathbb{C}^{N-1})\xrightarrow{i}F(n,\mathbb{C}^N)\xrightarrow{\mathrm{pr}_1}\mathbb{CP}^{N-1}.$$

Проверим, что $i^*(x_j)=x_j$. Действительно, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
F(n-1,\mathbb{C}^{N-1}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mathrm{pr}'_j"] & F(n,\mathbb{C}^N) \arrow[d, "\mathrm{pr}_j"] \\
\mathbb{CP}^{N-2} \arrow[r, "\iota"] & \mathbb{CP}^{N-1}
\end{tikzcd}$$

(где $\mathbb{CP}^{N-2}$ — это пространство всех прямых в $(\ell_1)^\perp$; таким образом, ι можно отождествить со стандартным вложением). Поэтому $\iota^*(x)=x$, так что $i^*(x_j)={\mathrm{pr}'_j}^*(x)=x_j$.

По предположению индукции, $H^*(F(n-1,\mathbb{C}^{N-1}))$ — свободный модуль конечного типа, порождённый $x_2,\dots,x_n$; поэтому теорема Лере–Хирша применима. Осталось заметить, что попарные произведения базисных элементов в $H^*(\mathbb{CP}^{N-1})$ и $H^*(F(n-1,\mathbb{C}^{N-1}))$ дают искомый базис в $H^*(F(n,\mathbb{C}^N))$. □

Следствие 10. $H^*(F(n,\mathbb{C}^\infty))\cong\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ — изоморфизм колец.

Доказательство. По теореме 9, $H^*(F(n,\mathbb{C}^\infty))$ имеет аддитивный базис $\{x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}:\ \alpha_j\geq 0,\ j=1,\dots,n\}$, и мономы перемножаются так же, как в кольце многочленов. □

5 Когомологии грассманианов

Рассмотрим отображение $p: Fl(n,\mathbb{C}^N)\to Gr(n,\mathbb{C}^N)$, которое сопоставляет флагу $V_1\subset\dots\subset V_n$ плоскость $V_n\subset\mathbb{C}^N$. При нашем отождествлении оно соответствует отображению

$$p: F(n,\mathbb{C}^N)\to Gr(n,\mathbb{C}^N),\quad (\ell_1,\dots,\ell_n)\mapsto\mathrm{span}(\ell_1,\dots,\ell_n).$$

Утверждение 11. p — локально тривиальное расслоение со слоем $F(n,\mathbb{C}^n)$.

Доказательство. Действительно, прообраз отмеченной точки — произвольный n-флаг в n-мерном пространстве V_n. Доказательство локальной тривиальности — простое упражнение в духе “докажите, что грассманиан — это многообразие”. □

Итак, при $1\leq n\leq N\leq\infty$ имеем локально тривиальные расслоения

$$F(n,\mathbb{C}^n)\xrightarrow{i}F(n,\mathbb{C}^N)\xrightarrow{p}Gr(n,\mathbb{C}^N).$$

Теорема 12. $p^*: H^*(Gr(n,\mathbb{C}^N))\to H^*(F(n,\mathbb{C}^N))$ — вложение колец. Образ этого вложения совпадает с образом подкольца симметрических многочленов

$$\mathbb{Z}[\sigma_1,\dots,\sigma_n]=\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}\subset\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$$

при сюръективном гомоморфизме $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]\twoheadrightarrow H^*(F(n,\mathbb{C}^N))$.

Доказательство. Проверим, что к этому расслоению применима теорема Лере–Хирша. Как и при вычислении когомологий многообразий флагов, имеем $i^*(x_j) = x_j$, а кольцо $H^*(F(n, \mathbb{C}^n))$ не имеет кручения и мультипликативно порождается классами $x_1, \dots, x_n$. Итак, теорема применима, поэтому p^* инъективно.

На многообразии $F(n, \mathbb{C}^N)$ естественно действует группа перестановок $\mathfrak{S}_n$, переставляя прямые. Это действие аналогичным образом переставляет элементы $x_1, \dots, x_n \in H^2(F(n, \mathbb{C}^N))$. Проекция p инвариантна относительно этого действия, поэтому образ p содержится в подкольце инвариантов $H^*(F(n, \mathbb{C}^N))^{\mathfrak{S}_n} \subset H^*(F(n, \mathbb{C}^N))$. Проекция $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \to H^*(F(n, \mathbb{C}^N))$ согласована с действием $\mathfrak{S}_n$ и поэтому отображает подкольцо $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ на $H^*(F(n, \mathbb{C}^N))^{\mathfrak{S}_n}$.

Итак, осталось доказать, что всё подкольцо $H^*(F(n, \mathbb{C}^N))^{\mathfrak{S}_n}$ содержится в образе p^*. Оно мультипликативно порождается элементарными симметрическими многочленами от $x_1, \dots, x_n$. Так как $x_j = -c_1(\zeta_j/\zeta_{j-1})$, с точностью до знака эти многочлены равны классам Черна расслоения $\zeta_1 \oplus (\zeta_2/\zeta_1) \oplus \dots \oplus (\zeta_n/\zeta_{n-1}) \simeq \zeta_n$. Но ζ_n — это обратный образ тавтологического расслоения над грассманианом под действием p. Поэтому элементарные симметрические многочлены лежат в образе p^*. $\square$

Следствие 13. $H^*(BU(n)) = H^*(Gr(n, \mathbb{C}^\infty)) \cong \mathbb{Z}[c_1, \dots, c_n]$, $\deg c_j = 2j$ — кольцо многочленов от классов Черна тавтологического расслоения. При отображении $p^* : H^*(Gr(n, \mathbb{C}^\infty)) \to H^*(Fl(n, \mathbb{C}^\infty)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ оно изоморфно отображается на подкольцо элементарных симметрических многочленов.

Итак, у комплексных векторных расслоений нет никаких характеристических классов в целочисленных когомологиях, кроме классов Черна; более того, между классами Черна нет никаких универсальных соотношений. Ясно, что то же верно над любым кольцом.

Аналогичный факт для вещественных расслоений:
Теорема 13'. $H^*(BO(n)) = H^*(Gr(n, \mathbb{R}^\infty)) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, \dots, w_n]$, $\deg w_j = j$ — кольцо многочленов от классов Штифеля–Уитни тавтологического расслоения. При отображении $p^* : H^*(Gr(n, \mathbb{R}^\infty)) \to H^*(Fl(n, \mathbb{R}^\infty)) \cong \mathbb{Z}_2[a_1, \dots, a_n]$ оно изоморфно отображается на подкольцо элементарных симметрических многочленов.

5.1 То же расслоение с других точек зрения

Мы только что воспользовались локально тривиальным расслоением

$$F(n, \mathbb{C}^n) \to F(n, \mathbb{C}^\infty) \to Gr(n, \mathbb{C}^\infty).$$

Во-первых, несложно убедиться, что $F(n, \mathbb{C}^\infty)$ — это в точности *флагизация* универсального расслоения (а теоремы выше — это принцип расщепления для него). Во-вторых, изоморфизм $H^*(F(n, \mathbb{C}^\infty)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ на самом деле происходит из гомотопической эквивалентности $F(n, \mathbb{C}^\infty) \simeq (\mathbb{CP}^\infty)^n$, а проекция $(\mathbb{CP}^\infty)^n \to Gr(n, \mathbb{C}^\infty)$ — это классифицирующее отображение для $\zeta_1 \times \dots \times \zeta_1$, произведения тавтологических расслоений.

Вот один из способов убедиться в этой гомотопической эквивалентности. Вспомним, что универсальное $U(n)$-расслоение имеет вид $U(n) \to \mathbf{V}(n, \mathbb{C}^\infty) \to Gr(n, \mathbb{C}^\infty)$, где $\mathbf{V}(n, \mathbb{C}^N) = \{(v_1, \dots, v_n) : \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}$ — (компактное) комплексное многообразие Штифеля. Действие $\mathbf{V}(n, \mathbb{C}^N) \curvearrowleft U(n)$ свободно, а при $N = \infty$ многообразие Штифеля стягиваемо. Подгруппа диагональных унитарных матриц $T^n \subset U(n)$ тоже действует свободно; факторпространство естественно отождествляется с многообразием флагов:

$$\mathbf{V}(n, \mathbb{C}^N)/T^n \cong Fl(n, \mathbb{C}^N).$$

При $N = \infty$ получаем, что $T^n \to \mathbf{V}(n, \mathbb{C}^\infty) \to Fl(n, \mathbb{C}^\infty)$ — универсальное T^n-расслоение, то есть $Fl(n, \mathbb{C}^\infty) = BT^n$. Также имеем универсальное расслоение $T^n \to (S^\infty)^n \to (\mathbb{CP}^\infty)^n$, поэтому $BT^n = (\mathbb{CP}^\infty)^n$.