

Топология – 3
Задачи к лекции 2:
Кольцо когомологий
15 февраля 2024

Задача 1. (*М. Бокштейн, 1962*) Проверьте утверждение теоремы Кюннета для комплексов

$$C_{\bullet} = (0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \rightarrow 0), \quad C'_{\bullet} = (0 \rightarrow \mathbb{Z}/8 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/8 \rightarrow 0).$$

(Ответ: короткая последовательность будет точной, но *нерасщепимой*.)

Задача 2. а) Пусть S – ориентируемая замкнутая поверхность. Опишите кольцо $H^*(S; \mathbb{Z})$, используя отображение $S \rightarrow \underbrace{T^2 \vee \dots \vee T^2}_{\text{число ручек}}$.

б) Опишите кольцо $H^*(S; \mathbb{Z}/2)$, где S – любая замкнутая поверхность.

Задача 3. Постройте кватернионные проективные пространства $\mathbb{H}P^n$, $n \geq 1$. Проверьте, что кольцо когомологий вычисляется аналогично вещественному и комплексному случаю.

Задача 4. Убедитесь, что $H^*(\mathbb{R}P^{2k+1}; \mathbb{Z}) \cong H^*(\mathbb{R}P^{2k} \vee S^{2k+1}; \mathbb{Z})$ как кольца. А почему эти пространства не гомотопически эквивалентны?

Задача 5. Задайте кольцо $H^*(\mathbb{C}P^{\infty}/\mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$ образующими и соотношениями.

Задача 6. Рассмотрим стандартное клеточное разбиение m -мерного тора. Докажите, что его клеточные подкомплексы биективно соответствуют симплициальным комплексам на m вершинах (вершины пронумерованы, и не обязаны входить в комплекс). Для каждого из подкомплексов опишите его фундаментальную группу и кольцо когомологий.

(Ответ: *прямоугольная группа Артина* и *внешнее кольцо Стэнли–Райснера*.)

Задача 7. а) Вложение Сегре $\sigma : \mathbb{C}P^{n-1} \times \mathbb{C}P^{m-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{mn-1}$ задаётся формулой

$$\sigma([z_1 : \dots : z_n], [w_1 : \dots : w_m]) := [z_1 w_1 : \dots : z_i w_j : \dots : z_n w_m].$$

Убедитесь, что это корректно определённое замкнутое вложение. Опишите индуцированное отображение в когомологиях. (Полезно рассмотреть ограничение σ на $\mathbb{C}P^{n-1} \times \{[1 : 0 : \dots : 0]\}$.)

б) Постройте непрерывное умножение $\sigma : \mathbb{C}P^{\infty} \times \mathbb{C}P^{\infty} \rightarrow \mathbb{C}P^{\infty}$. Опишите соответствующее кольцо Понтрягина $H_*(\mathbb{C}P^{\infty}; \mathbb{Z})$.

Задача 8*. Докажите, что $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$. Опишите кольцо Понтрягина $H_*(SO(3); \mathbb{Z}/2)$.

Задача 9. а) Для расслоения Серра $F \rightarrow E \rightarrow B$ постройте действие группы $\pi_1(B)$ на $H^*(F)$ (другими словами, введите структуру $R[\pi_1(B)]$ -модуля на $H^*(F; R)$). Придумайте локально тривиальное расслоение, для которого это действие нетривиально. Согласовано ли оно с умножением в когомологиях?

б)* То же в предположении, что F связно.