Топология — 3
Задачи к лекции 3:
Расслоения и когомологии

22 февраля 2024

Задача 1. Пусть K — бутылка Клейна. Для каких колец коэффициентов теорема Лере–Хирша применима к расслоению $S^1 \to K \to S^1$?

Задача 2. Постройте расслоение $S^1 \to S^\infty/\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}P^\infty$. Вычислите кольцо $H^*(K(\mathbb{Z}_p, 1); \mathbb{Z}_p)$.

Задача 3. *(Здесь можно использовать факт: если G — группа Ли, $H \subset G$ — компактная подгруппа Ли, то $H \to G \to G/H$ — локально тривиальное расслоение.)*

а)* Убедитесь, что $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ — связные компактные группы Ли.

б) Докажите, что $SO(n-1) \to SO(n) \to S^{n-1}$ — локально тривиальное расслоение. Выведите, что $\pi_{m-1}(SO(m)) \twoheadrightarrow \pi_{m-1}(SO(m+1)) = \pi_{m-1}(SO(m+2)) = \cdots = \pi_{m-1}(SO)$.

в) Применяя теорему Лере–Хирша, узнайте как можно больше про группы $H^*(SO(n); \mathbb{Z}/2)$ и $H^*(SO(n); \mathbb{Q})$ и умножение в них. *(По возрастанию n, начиная с $SO(3) = \mathbb{R}P^3$.)*

г) Точки комплексного *многообразия Штифеля* $V_n(\mathbb{C}^{n+N})$ — это упорядоченные ортонормированные наборы из n векторов в $\mathbb{C}^{n+N}$. Убедитесь, что $V_n(\mathbb{C}^{n+N}) = SU(n+N)/SU(N)$ при $N > 0$. Докажите, что $V_n(\mathbb{C}^{n+N})$ — $2N$-связное пространство. Вычислите группы $H^*(V_n(\mathbb{C}^{n+N}); \mathbb{Z})$.

Задача 4. Пусть $F \to E \to B$ — локально тривиальное расслоение с клеточной базой и клеточным слоем. Постройте разбиение E на клетки, используя теорему Фельдбау. Докажите, что $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$, если клеток каждой размерности конечное число.

Задача 5. Пусть $F \to E \xrightarrow{p} B$ — локально тривиальное расслоение, тривиализованное над подмножествами $A_1, A_2 \subset B$. Докажите, что функция склейки $g_{12} : A_1 \cap A_2 \to \mathrm{Homeo}(F)$ непрерывна относительно компактно-открытой топологии. *(Напомним обозначения. Пусть $\tau_i : p^{-1}(A_i) \xrightarrow{\simeq} A_i \times F$ — тривиализации. Тогда сквозной гомеоморфизм*

$$(A_1 \cap A_2) \times F \xrightarrow{\tau_1^{-1}} p^{-1}(A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\tau_2} (A_1 \cap A_2) \times F$$

имеет вид $(a, f) \mapsto (a, g_{12}(a) \cdot f)$.)

Задача 6. Докажите, что $\mathrm{Homeo}(S^1)$ деформационно ретрагируется на $S^1 \sqcup S^1$. Опишите все локально тривиальные расслоения с базой S^n и слоем S^1.

Задача 7. *(Трансфер в когомологиях накрытий. Каждый буква весит как ползадачи.)* Пусть $\mathrm{pr} : E \to B$ — n-листное накрытие. Ясно, что сингулярный симплекс $\sigma : \Delta^k \to B$ можно ровно n способами поднять до симплекса $\widetilde{\sigma} : \Delta^k \to E$, $\sigma = \mathrm{pr} \circ \widetilde{\sigma}$. Определим *гомоморфизм трансфера* $\tau : C_*(B) \to C_*(E), \sigma \mapsto \sum \widetilde{\sigma}$. Докажите:

а) τ — корректно определенное цепное отображение, причём $\mathrm{pr}_\# \circ \tau = n \cdot \mathrm{id}_{C_*(B)}$.

б) Если n обратимо в группе коэффициентов, то $\mathrm{pr}_* : H_*(E) \to H_*(B)$ — проекция на прямое слагаемое, $\mathrm{pr}^* : H^*(B) \to H^*(E)$ — вложение прямого слагаемого.

в) Если pr — регулярное[1] накрытие, то группа $G = \pi_1(B)/\pi_1(E)$ действует на $H^*(E)$ автоморфизмами кольца. *(Полезно вспомнить, что $E = \widetilde{B}/\pi_1(E)$ и $\pi_1(B) \curvearrowright \widetilde{B}$.)*

г) Если вдобавок n обратимо в кольце коэффициентов, то $H^*(B) \cong H^*(E)^G$. Как это согласуется с тем, что мы знаем о $H^*(\mathbb{R}P^n)$?

---

[1] То есть $\pi_1(E) \subset \pi_1(B)$ — нормальная подгруппа.