# Топология — 3
# Задачи к лекции 4:
# Препятствия: начало

29 февраля 2024

**Задача 1.** Покажите, что тождественное отображение $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$, даже изменив на всех клетках размерности $> 1$, нельзя продолжить до отображения $\mathbb{RP}^{n+1} \to \mathbb{RP}^n$.

Указание: рассмотрите индуцированное отображение в кольцах когомологий.

**Задача 2. а)** Вычислите препятствие к продолжению тождественного отображения $\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ до отображения $\mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^1$.

**б)** Вычислите препятствие к продолжению отображения $\mathbb{RP}^2 \to S^2$, стягивающего 1-остов, до отображения $\mathbb{RP}^3 \to S^2$.

**в)** Вычислите препятствие к продолжению отображения $\mathbb{RP}^3 \to S^3$, стягивающего 2-остов, до отображения $\mathbb{RP}^4 \to S^3$.

**Задача 3.** Дано отображение $\mathrm{sk}^2(S^2 \times S^2) = S^2 \vee S^2 \to \mathbb{CP}^\infty$, где обе компоненты букета тождественно отображаются в $\mathrm{sk}^2(\mathbb{CP}^\infty)$. Вычислите препятствие к продолжению этого отображения на четырёхмерную клетку $S^2 \times S^2$.

**Задача 4.** Вычислите первое препятствие к гомотопности следующих пар отображений:

**а)** тождественное отображение $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ и отображение в точку;

**б)** тождественное отображение $SO(3) \to SO(3)$ и отображение возведения в квадрат;

**в)** тождественное отображение $SU(2) \to SU(2)$ и отображение возведения в квадрат.

**Задача 5.** Пусть $M$ — компактное связное трёхмерное многообразие, а $Y$ — связный клеточный комплекс, причём $\pi_2(Y) = 0$. Покажите, что любой гомоморфизм $\pi_1(M) \to \pi_1(Y)$ реализуется некоторым непрерывным отображением $M \to Y$.

**Задача 6.** Покажите, что если $\pi_i(Y) = 0$ при $i > n$, то любое отображение $\mathrm{sk}^{n+1}(X) \to Y$ продолжается до отображения $X \to Y$, причём единственным образом с точностью до гомотопии.

**Задача 7.** Определим “фундаментальный класс” $F_X$ односвязного пространства $X$ как первое препятствие к гомотопности тождественного отображения $X \to X$ и отображения в точку. Покажите, что фундаментальный класс гомотопически инвариантен, т. е. любая гомотопическая эквивалентность $X \to X'$ переводит $F_{X'}$ в $F_X$ (в частности, он не зависит от клеточного разбиения).

**Задача 8*.** Пусть $X$ односвязно, и $H^i(X; G) = 0$ для всех групп $G$ и всех $i > n$. Постройте отображение $f : X \to X$ и гомотопию $F : X \times [0, 1] \to X$ со следующими свойствами:

1) $f(X) \subset \mathrm{sk}^n(X)$
2) $f(x) = x$ при $x \in \mathrm{sk}^{n-1}(X))$
3) $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = x$
4) $F(x, t) = x$ при $x \in \mathrm{sk}^{n-2}(X)$

(Таким образом, $X$ гомотопически ретрагируется на $\mathrm{sk}^n(X)$. Очевидно, верно и обратное: если $\mathrm{Id}_X$ гомотопно некоторой композиции $X \to Y \to X$, где $\dim Y \le n$, то $H^i(X; G) = 0$ при $i > n$ и всех $G$.)