Топология — 3

Задачи к лекции 6:
Расслоения со структурной группой

14 марта 2024

$\mathbb{K}$ — это всегда $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Задача 1. Правда ли, что $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ — главное $\mathbb{Q}$-расслоение?

Задача 2. Пусть Kl^2 – бутылка Клейна. Докажите, что $S^1 \to Kl^2 \to S^1$ – расслоение со структурной группой $\mathbb{Z}/2$. Как выглядит ассоциированное главное расслоение?

Задача 3. *(Тавтологическое расслоение над проективным пространством)*
Для точки $x \in \mathbb{K}P^n$ обозначим через $\ell_x \subset \mathbb{K}^{n+1}$ соответствующую прямую. Положим

$$E := \{(x,p) \in \mathbb{K}P^n \times \mathbb{K}^{n+1} : \ p \in \ell_x\}, \quad p = \mathrm{pr}_1 : E \to \mathbb{K}P^n.$$

а) Докажите, что $\gamma^1 := [p : E \to \mathbb{K}P^n]$ — локально тривиальное расслоение. Постройте его тривиализации в стандартных картах $U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{K}P^n : \ x_i \neq 0\}$.
б) Посчитайте склеивающий коцикл. Проверьте, что γ — расслоение со структурной группой S^0 (S^1) при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Какое тотальное пространство у ассоциированного главного расслоения?
в)* Докажите, что тавтологическое расслоение над $\mathrm{Gr}(m, \mathbb{K}^n)$ локально тривиально.

Задача 4. Пусть ξ — расслоение со структурной группой G над B, ассоциированное с главным G-расслоением η. Пусть $f : B' \to B$ — непрерывное отображение. Докажите, что $f^*\xi$ — расслоение со структурной группой G, ассоциированное с главным G-расслоением $f^*\eta$.

Задача 5. **а)** Если главное G-расслоение имеет сечение, то оно тривиально.
б) Любой морфизм главных G-расслоений — изоморфизм.

Задача 6. Пусть $G \curvearrowright F$ — действие топологической группы. Пусть $B = \bigcup_\alpha U_\alpha$ — открытое покрытие, и заданы непрерывные отображения $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, причем

- $g_{\alpha\gamma}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\gamma}(x)$ при $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$;
- $g_{\alpha\beta}(x) \cdot g_{\beta\alpha}(x) = e$ при $x \in U_\alpha \cap U_\beta$.

Докажите, что

$$E := \left(\bigsqcup_\alpha U_\alpha \times F\right) / \sim, \quad \underbrace{(x,f)}_{\in U_\beta \times F} \sim \underbrace{(x, g_{\alpha\beta}(x) \cdot f)}_{\in U_\alpha \times F}$$

— тотальное пространство расслоения с базой B, слоем F и структурной группой G.

Задача 7. Рассмотрим компактно-открытую топологию на $\mathrm{Homeo}(F)$, где F хаусдорфово и локально компактно (у каждой точки есть окрестность с компактным замыканием). Докажите:
а) Умножение $\mathrm{Homeo}(F) \times \mathrm{Homeo}(F) \to \mathrm{Homeo}(F)$ и действие $\mathrm{Homeo}(F) \times F \to F$ непрерывны. *(Сначала докажите: если $K \subset U \subset F$, то $K \subset U' \subset K' \subset U$.)*
б)* Если F хаусдорфово и компактно, то $\mathrm{Homeo}(F)$ — топологическая группа. *(В общем случае это не так: если F — канторово множество без одной точки, то обращение не непрерывно.)*
в) Если $\mathrm{Homeo}(F)$ — топологическая группа, то любое локально тривиальное расслоение со слоем F является расслоением со структурной группой $\mathrm{Homeo}(F)$. *(Используйте задачу 6.)*