Топология — 3
Задачи к лекции 7: Векторные расслоения
21 марта 2024

$\mathbb{K}$ — это всегда $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Задача 1. Какое векторное расслоение над S^{n-1} (ориентированное, с выделенной метрикой) соответствует главному $SO(n-1)$-расслоению $SO(n) \to S^{n-1}$?

Задача 2. а) Если ξ — вещественное векторное расслоение, то $\overline{\xi_{\mathbb{C}}} \cong \xi_{\mathbb{C}}$ и $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong \xi \oplus \xi$.
б) Если η — комплексное векторное расслоение, то $\overline{\eta} \simeq \eta^* := \mathrm{Hom}(\eta, \underline{\mathbb{C}})$ и $(\eta_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \cong \eta \oplus \overline{\eta}$. *(Возможно, понадобится снабдить η эрмитовой метрикой.)*

Задача 3. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 1$. Докажите, что γ нетривиально, но $\gamma \otimes \gamma$ тривиально. *(Посмотрите на тотальное пространство без нулевого сечения. Тривиальность можно доказать с помощью критерия: расслоение со склеивающим коциклом $\{g_{\alpha\beta}\}$ тривиально тогда и только тогда, когда $g_{\alpha\beta}(x) = s_\alpha(x)^{-1} \cdot s_\beta(x)$ для некоторого набора непрерывных функций $s_\alpha : U_\alpha \to G$.)*

Задача 4. *(Принцип расщепления)* Пусть ξ — векторное расслоение над X ранга n (со слоем $\mathbb{K}^n$). Его *проективизация* $\mathbb{K}P(\xi)$ — это ассоциированное расслоение со слоем $\mathbb{K}P^{n-1}$. (При этом структурную группу можно уменьшить с $GL(\mathbb{K}^n)$ до $PGL(\mathbb{K}^n) := GL(\mathbb{K}^n)/\mathbb{K}^\times \curvearrowright \mathbb{K}P^{n-1}$).
а) Обозначим $\mathbb{K}P(\xi) = [p : E \to X]$. Постройте одномерное *тавтологическое расслоение* γ_ξ над E. Убедитесь, что γ_ξ — подрасслоение в $p^*(\xi)$ (следовательно, отщепляется прямым слагаемым.) Выведите, что существует отображение $f : Y \to X$ такое, что $f^*\xi$ изоморфно прямой сумме одномерных векторных расслоений.
б) Проверьте, что к $\mathbb{K}P^{n-1} \to E \to X$ применима теорема Лере–Хирша. Выведите, что отображение $f^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ можно считать инъективным (если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то коэффициенты в $\mathbb{Z}/2$; если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то любые).

Задача 5. Пусть задано векторное расслоение ранга n. Докажите, что выбор подрасслоения ранга k равносилен выбору редукции структурной группы к некоторой подгруппе $G \subset GL(\mathbb{K}^n)$. Что это за подгруппа?

Задача 6. Пусть $\xi = [p : E \to B]$ — локально тривиальное расслоение со слоем $\mathbb{K}^n$. Напомним, что $E \oplus E := \{(e_1, e_2) \in E \times E : \ p(e_1) = p(e_2)\}$.

а) Пусть на ξ задана структура векторного расслоения. Докажите, что сложение векторов (лежащих в одном слое) и умножение векторов на скаляр задают непрерывные отображения $s : E \oplus E \to E$ и $m : \mathbb{K} \times E \to E$.

б) Наоборот, пусть в каждом слое задана структура векторного пространства так, что m и s непрерывны. Докажите, что мы получили векторное расслоение. *(Это свойство взято за определение в книжке М.Атьи “Лекции по K-теории”.)*

Задача 7. Пусть V — векторное пространство над $\mathbb{R}$, $F \subset \mathrm{Symm}^2(V^*)$ — множество положительно определённых квадратичных форм. Проверьте, что $GL(V)$ непрерывно действует на F. Докажите, что главные $O(n, \mathbb{R})$-расслоения взаимно-однозначно соответствуют парам (ξ, s), где ξ — вещественное векторное расслоение ранга n, а s — сечение ассоциированного $GL(\mathbb{R}^n)$-расслоения со слоем F.

Задача 8*. Пусть γ — тавтологическое расслоение над грассманианом $\mathrm{Gr}(k, \mathbb{K}^n)$, а $\gamma^\perp$ — расслоение, ортогональное к тавтологическому. Докажите, что $\mathcal{T}\mathrm{Gr}(k, \mathbb{K}^n) \cong \mathrm{Hom}(\gamma, \gamma^\perp)$.