Топология — 3

Задачи к лекции 8:
Классификация векторных расслоений

28 марта 2024

$\mathbb{K}$ — это всегда $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Задача 1. *("Неабелевы первые когомологии")* Докажите естественные биекции:

$$[X, K(G,1)] \cong \{\text{регулярные накрытия со слоем } G \text{ над } X\} \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X), G)/\sim,$$

где $\sim$ — факторизация по действию G сопряжениями.

Задача 2. а) Докажите: если ξ — одномерное вещественное векторное расслоение, то $\xi^{\otimes 2} := \xi \otimes \xi$ тривиально. Верно ли это в комплексном случае?
б) Докажите, что одномерные векторные расслоения над X образуют группу относительно $\otimes$, причем эта группа изоморфна $[X, \mathbb{K}P^\infty]$ (и соответствующей группе когомологий).

Задача 3. Пусть ζ_n — универсальное расслоение над $BGL(n)$, а $i : GL(n) \to GL(n+1)$ — стандартное вложение (в верхний левый угол). Докажите, что $Bi^*(\zeta_{n+1}) \cong \zeta_n \oplus \underline{\mathbb{K}}$. Какой смысл имеет множество $[X, BGL]$? (X — конечномерный CW-комплекс, $BGL := \bigcup_{n\geq 1} BGL(n)$.)

Задача 4. Пусть γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^1$ *(некомпактная лента Мёбиуса).* Докажите, что $\gamma \oplus \gamma \simeq \underline{\mathbb{R}}^2$: **а)** через BG; **б)** геометрически; **в)*** через склеивающие коциклы.

Задача 5. а) Докажите изоморфизм векторных расслоений $\mathcal{T}S^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}} \simeq \underline{\mathbb{R}}^{\oplus n}$.
б) Выведите, что $\mathcal{T}\mathbb{R}P^{n-1} \oplus \underline{\mathbb{R}} \simeq \gamma^{\oplus n}$, где γ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^{n-1}$.
в)* Докажите аналогичное утверждение для комплексного расслоения $\mathcal{T}\mathbb{C}P^{n-1}$.

Задача 6. а) Опишите все вещественные и комплексные векторные расслоения над S^1 и S^2 (посчитайте количество расслоений каждого ранга, постройте представителей в каждом классе изоморфизма).
б) Докажите, что вещественные и комплексные векторные расслоения над S^3 тривиальны. *(Используйте гомеоморфизмы $SO(2) = U(1) = S^1$, $SO(3) = \mathbb{R}P^3$, $U(2) = S^1 \times S^3$ и стабилизацию гомотопических групп $SO(n)$, $U(n)$ при больших n.)*

Задача 7*. Докажите: ориентированное вещественное векторное расслоение ξ над X допускает спинорную структуру тогда и только тогда, когда некоторый характеристический класс в $H^2(X; \mathbb{Z}/2)$ равен нулю. *(Позже окажется, что это второй класс Штифеля–Уитни.)*