Топология — 3
Задачи к лекции 9: Векторные расслоения и классы Штифеля-Уитни
4 апреля 2024

Все расслоения в этом листке — вещественные векторные.

Задача 1. Верно ли, что любое расслоение единственным образом с точностью до изоморфизма раскладывается в прямую сумму неразложимых?

Задача 2. Докажите, что над $BO(1)$ не существует расслоения, прямая сумма которого с тавтологическим изоморфна тривиальному.

Задача 3. Докажите, что $w(T\mathbb{RP}^n) = (1+\alpha)^{n+1}$, где $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ — образующая.

(Указание: воспользуйтесь утверждением задачи 5б из листка 8.)

Задача 4. а) Вычислите полный класс Штифеля-Уитни для касательного расслоения бутылки Клейна.

б) Рассмотрим отображение $\mathrm{Id} \times i : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^3$, где i — вложение в качестве 2-остова. Возьмём обратный образ $T(\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^3)$. Вычислите полный класс Шитфеля-Уитни полученного расслоения ранга 5 над $\mathbb{RP}^2$. То же для отображения $\mathbb{RP}^4 \to \mathbb{RP}^4 \times \mathbb{RP}^5$.

в) Рассмотрим отображение $q \times i : \mathbb{RP}^4 \to S^4 \times \mathbb{RP}^5$, где q — стягивание 3-остова, а i — вложение в качестве 4-остова. Вычислите полный класс Шитфеля-Уитни обратного образа $T(S^4 \times \mathbb{RP}^5)$. То же для отображения $\mathbb{RP}^5 \to S^5 \times \mathbb{RP}^6$.

Задача 5. Раскладывается ли $T\mathbb{RP}^4$ в прямую сумму **а)** двух расслоений ранга 2; **б)** нескольких расслоений?

Задача 6. Докажите, что если $E_1, E_1' \to X$ — расслоения ранга 1, то

$$w(E_1 \otimes E_1') = 1 + w(E_1) + w(E_1').$$

Задача 7. Предположим, векторные расслоения $E, E' \to X$ раскладываются в прямую сумму линейных. Выразите через классы Штифеля-Уитни E и E' класс **а)** $w_1(E \otimes E')$ и $w_2(E \otimes E')$; **б)** $w_1(S^k E)$ и $w_1(\Lambda^k E)$; **в)** $w_2(S^k E)$ и $w_2(\Lambda^k E)$.