Топология — 3
Задачи к лекции 11: Характеристические классы и принцип расщепления
18 апреля 2024

Задача 1. Докажите, что для любого векторного расслоения E и любого линейного расслоения L проективизации расслоений E и $E \otimes L$ изоморфны.

Задача 2. а) Вычислите младшую нетривиальную гомотопическую группу $V(k, \mathbb{C}^n)$.

б) Постройте расслоение $V(k+l, \mathbb{R}^m) \to V(k, \mathbb{R}^m)$ со слоем $V(l, \mathbb{R}^{n-k})$. Верно ли, что вложение слоя в тотальное пространство устанавливает изоморфизм на младших ненулевых гомотопических группах?

в) Рассмотрим отображение $V(k, \mathbb{C}^n) \to V(2k-1, \mathbb{R}^{2n})$, переводящее репер $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в репер $v_1, iv_1, v_2, iv_2, \ldots, v_n$. Покажите, что оно индуцирует изоморфизм на младших ненулевых гомотопических группах, тензорно умноженных на $\mathbb{Z}_2$.

Задача 3. Пусть (комплексное[1]) расслоение $E \to X$ ранга n раскладывается в сумму линейных.

а) Проверьте, что $c_k(E) = \sigma_k(x_1, \ldots, x_n)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in H^2(X; \mathbb{Z})$. Здесь σ_k — элементарный симметрический многочлен.

б) Покажите, что $c(\Lambda^m E) = \prod\limits_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n} (1 + x_{i_1} + \ldots + x_{i_m})$.

в) Покажите, что $c(S^m E) = \prod\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_m \le n} (1 + x_{i_1} + \ldots + x_{i_m})$.

Задача 4. Постройте $n!$-листное накрытие $V(n, \mathbb{R}^n) \to Fl(n, \mathbb{R}^n)$. Придумайте его аналог для комплексных многообразий Штифеля и полных флагов.

Задача 5. Для комплексного расслоения E ранга n положим $\det E = \Lambda^n E$. Выразите $c(\det E)$ через $c_j(E)$.

Задача 6. Пусть $E \to X$ — векторное расслоение над компактной хаусдорфовой базой. Обозначим $\Gamma(X, E)$ множество сечений расслоения, оно является модулем над кольцом непрерывных функций $C(X)$.

а) Покажите, что $\Gamma(X, E)$ — конечно порождённый проективный модуль (т. е. является прямым слагаемом в некотором свободном модуле).

б) Докажите, что любой конечно порожденный проективный $C(X)$-модуль является модулем глобальных сечений некоторого векторного расслоения.

в*) Докажите, что это соответствие задаёт эквивалентность категорий.

[1] Очевидно, для вещественных расслоений верны аналогичные свойства, с заменой $H^2(X; \mathbb{Z})$ на $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ и c на w