Топология — 3
Задачи к лекции 12:
Лере и Хирш наносят ответный удар

25 апреля 2024

По умолчанию, расслоения — комплексные векторные, кольцо коэффициентов – $\mathbb{Z}$.

Задача 1. Пусть η — комплексное расслоение ранга n. Выразите $p_j(\eta_{\mathbb{R}})$ через $c_1(\eta), \ldots, c_n(\eta)$.

Задача 2. Вычислите $p_j(\mathcal{T}\mathbb{CP}^n)$ и $p_j(\mathcal{T}\mathbb{RP}^n)$.

Задача 3. Для векторного расслоения ξ пусть ζ_ξ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}(\xi)$.

а) Докажите, что $f^*(\zeta_\xi) \cong \zeta_{f^*\xi}$.

б) Пусть $\eta \subset \gamma$ — подрасслоение. Докажите, что отображение $g : \mathbb{CP}(\eta) \to \mathbb{CP}(\gamma)$ корректно определено, и $\zeta_\eta \cong g^*(\zeta_\gamma)$.

Задача 4. Пусть ζ — тавтологическое расслоение над $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/S^1$. Докажите, что $\mathbb{RP}(\zeta_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{RP}^{2n+1} = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_2$. Выведите, что $w_1(\zeta_{\mathbb{R}}) = 0$ и $w_2(\zeta_{\mathbb{R}}) = c_1(\zeta) \mod 2 \in H^2(\mathbb{CP}^n; \mathbb{Z}_2)$.
(Посчитайте $w_j(\zeta_{\mathbb{R}})$, используя формулу для умножения в кольце $H^*(\mathbb{RP}(\zeta_{\mathbb{R}}); \mathbb{Z}_2)$.)

Задача 5. Пусть $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — тавтологические расслоения над $Fl(n, \mathbb{C}^N)$. На лекции доказано, что кольцо $H^*(Fl(n, \mathbb{C}^N))$ имеет аддитивный базис $\{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \ :\ 0 \le \alpha_j \le N - j\}$, где $x_j := -c_1(\zeta_j/\zeta_{j-1}) \in H^2(Fl(n, \mathbb{C}^N))$.

а) Докажите тождества:

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=d} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = 0 \in H^*(Fl(n, \mathbb{C}^N)), \quad d = N - n + 1, \ldots, N - 1, N.$$

(Используйте, что $\zeta_n \simeq \zeta_1 \oplus (\zeta_2/\zeta_1) \oplus \cdots \oplus (\zeta_n/\zeta_{n-1})$ — подрасслоение в $\underline{\mathbb{C}}^N$.)

б)* Используя тождества выше, выразите произвольный многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ как линейную комбинацию базисных мономов.

(Таким образом, кольцо $H^*(Fl(n, \mathbb{C}^N))$ порождено $x_1, \ldots, x_n$ по модулю этих n тождеств.)

в)* Докажите, что кольцо $H^*(Gr(n, \mathbb{C}^N))$ мультипликативно порождено элементами $c_1, \ldots, c_n$ по модулю аналогичного набора из n соотношений.

г) Докажите изоморфизм колец $H^*(Fl(n, \mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где σ_j — элементарные симметрические многочлены.

Задача 6. Для градуированного векторного пространства $W = \bigoplus_{n \ge 0} W_n$ рассмотрим формальный степенной *ряд Пуанкаре* $P(W; t) := \sum_{n \ge 0} \dim(W_n) t^n$. Положим $P(X; t) := P(H^*(X); t)$.

а) Пусть для расслоения $F \to E \to B$ выполняется теорема Лере–Хирша. Как связаны $P(F; t)$, $P(E; t)$, $P(B; t)$?

б) Найдите $P(X; t)$ для проективных пространств, многообразий флагов, грассманианов.

в) Ещё раз проверьте, что $P(Gr(n, \mathbb{C}^\infty); t) = P(\mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]; t)$, $\deg \sigma_j = 2j$.

Задача 7*. Постройте явную гомотопическую эквивалентность между $Fl(n, \mathbb{C}^\infty)$ и $(\mathbb{CP}^\infty)^n$. Проверьте, что при этой эквивалентности проекция $Fl(n, \mathbb{C}^\infty) \to Gr(n, \mathbb{C}^\infty)$ переходит в классифицирующее отображение для $\underbrace{\zeta_1 \times \cdots \times \zeta_1}_{n}$.