Топология — 3

Задачи к лекции 15: Характеристические числа. Двойственность Пуанкаре

16 мая 2024

Задача 1. Пусть ξ — ориентированное расслоение ранга n. Докажите, что при изоморфизме $(\xi\otimes\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \simeq \xi\oplus\xi$ ориентация изменяется на знак $(-1)^{n(n-1)/2}$. *(ориентация на $\eta_{\mathbb{R}}$: $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$.)*

Задача 2. Предположим, что $\mathcal{T}S^{4k}$ — овеществление комплексного расслоения η. Докажите, что $p_k(\eta_{\mathbb{R}}) = \pm 2c_{2k}(\eta)$. Пользуясь тождеством $\langle e(\mathcal{T}M), [M]\rangle = \chi(M)$, выведите, что $p_k[S^{4k}] = \pm 4$.

(С другой стороны, $p_I[S^{4k}] = 0$ для всех I, так как S^{4k} — граница ориентируемого многообразия. Это доказывает, что S^{4k} не допускает почти комплексных структур.)

Задача 3. Пусть M — гладкое многообразие. Докажите, что M ориентируемо (как топологическое многообразие) тогда и только тогда, когда $\mathcal{T}M$ ориентируемо (как векторное расслоение).

Напомним, что $f_*(x)\cap\alpha = f_*(x\cap f^*(\alpha))$ и $x\cap(\alpha\cup\beta) = (x\cap\alpha)\cap\beta$.

Задача 4. *(Отображения в неправильную сторону)* Пусть $f : M^n \to N^n$ — отображение ориентированных замкнутых многообразий, $k = \deg(f)$ (то есть $f_*([M]) = k\cdot[N] \in H_n(N;\mathbb{Z})$).

а) Постройте гомоморфизм $f^! : H_*(N) \to H_*(M)$ такой, что $f_*\circ f^! = k\cdot \mathrm{id}_{H_*(N)}$.

б) Пусть $1/k \in R$. Докажите, что $f^* : H^*(N;R) \to H^*(M;R)$ — вложение прямым слагаемым. Приведите пример, когда проекция $H^*(M;R) \twoheadrightarrow H^*(N;R)$ не мультипликативна.

Задача 5. *(Инвариантность сигнатуры при кобордизме)* **а)** Пусть M^{4k} — граница компактного ориентированного многообразия N^{4k+1}, $i : M \to N$ — вложение. Проверьте коммутативность диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H^i(N,M) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "{[N]\cap(-)}"] & H^i(N) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "{[N]\cap(-)}"] & H^i(M) \arrow[r, "\delta^*"] \arrow[d, "{[M]\cap(-)}"] & H^{i+1}(N,M) \arrow[r] \arrow[d, "{[N]\cap(-)}"] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_{4k+1-i}(N) \arrow[r, "j_*"] & H_{4k+1-i}(N,M) \arrow[r, "\delta_*"] & H_{4k-i}(M) \arrow[r, "i_*"] & H_{4k-i}(N) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Выведите, что для любых $\alpha,\beta \in H^*(N)$ верно $\langle i^*(\alpha)\cup i^*(\beta), [M]\rangle = 0$.
(Используйте тождества $\delta_*([N]) = [M]$ и $\langle\delta^*(\varphi), c\rangle = \langle\varphi, \delta_*(c)\rangle$.)

б) Докажите, что изоморфизм Пуанкаре переводит $W := \mathrm{Im}(i^* : H^{2k}(N;\mathbb{Q}) \to H^{2k}(M;\mathbb{Q}))$ в $\mathrm{Ker}(i_* : H_{2k}(M;\mathbb{Q}) \to H_{2k}(N;\mathbb{Q}))$, причём i_* и i^* — двойственные отображения. Выведите, что $\dim W \geq \frac{1}{2}\dim H^{2k}(M)$.

Задача 6. Пусть V – n-мерное векторное пространство над $\mathbb{Q}$, $I : V\times V \to \mathbb{Q}$ — невырожденная симметричная билинейная форма.

а) Пусть $W \subset V$ таково, что $I(w,w') = 0$ для всех $w, w' \in W$. Докажите, что $\dim W \leq n/2$.

б) Пусть вдобавок $\dim W \geq n/2$. Докажите, что $\mathrm{sign}(I) = 0$.

Из задач 6 и 7 следует: если $M^{4k} = \partial N^{4k+1}$, то $\dim H^{2k}(M;\mathbb{Q})$ чётно и $\mathrm{sign}\, M = 0$.

Задача 7. *(Мультипликативность сигнатуры)* Пусть M^{4m}, N^{4n} — ориентированные замкнутые многообразия. Докажите, что форма пересечения $I_{M\times N}$ многообразия $M\times N$ — это прямая сумма формы $I_M\otimes I_N$ и нескольких форм, удовлетворяющих условиям задачи 7. Выведите, что $\mathrm{sign}(M\times N) = \mathrm{sign}(M)\cdot\mathrm{sign}(N)$.