

Введение в поверхности бесконечного типа

Задачи к лекции 1:

Примеры поверхностей

13 февраля 2025

Задача 1. а) Пусть S, S' — поверхности (конечного типа). Выкинем из S и S' по маленькому открытому диску и отождествим их границы. Полученная поверхность называется *связной суммой* $S \# S'$. Проверьте, что она (с точностью до гомеоморфизма) не зависит от ориентации склеивающего гомеоморфизма.

б) Покажите, что связная сумма $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ зависит от выбора ориентации склеивающего гомеоморфизма.

Задача 2. Докажите, что **а)** ориентируемый род **б)** неориентируемый род поверхности конечного типа равен максимальному количеству попарно негомотопных неразделяющих простых замкнутых кривых.

Задача 3. Пусть M — связное некомпактное триангулированное n -мерное многообразие.

а) Докажите, что существует бесконечная последовательность различных n -мерных симплексов, в которой соседние симплексы имеют общую $(n - 1)$ -мерную грань.

б) Выведите, что M деформационно ретрагируется на некоторый подкомплекс $M' \subset \text{sk}^{n-1}(M)$.

Задача 4*. Для поверхности канторова дерева предъявите набор образующих фундаментальной группы, между которыми нет соотношений¹.

¹Указание: постройте ретракции $S \rightarrow K_i$ для подповерхностей с краем $K_i \subset S$, рассмотренных на лекции.