Введение в группы кос

Задачи к лекции 11:

Число переноса и другие псевдохарактеры

7 мая 2026

Через $\widetilde{\mathrm{Homeo}^+}(\mathbb{S}^1)$ мы обозначаем множество гомеоморфизмов $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, таких что $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$. Число переноса $\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi^n(x)-x}{n}$ обозначается $\rho(\varphi)$.

Задача 1. а) Предположим, $\rho(\varphi) = 0$. Верно ли, что существует $x_0 \in \mathbb{R}$, такой что $\varphi(x_0) = x_0$?

б) Докажите, что если $\varphi(x) - x \geq \varepsilon$, то $\rho(\varphi) \geq \varepsilon$. Верно ли обратное?

в) Какие есть неравенства между числом переноса $\rho(\varphi)$ и *средним переносом* $\int_0^1 (\varphi(x) - x)dx$?

Задача 2. Напомним, *квазиморфизмом* на группе G называется отображение $\alpha : G \to \mathbb{R}$, имеющее ограниченный *дефект* $D_\alpha := \sup |\alpha(ab) - \alpha(a) - \alpha(b)|$. Квазиморфизм называется *однородным*, если $\alpha(a^k) = k\alpha(a)$.

а) Предположим, квазиморфизм $\alpha : G \to \mathbb{R}$ принимает ограниченные значения. Может ли он быть однородным?

б) Покажите, что проекция $\alpha(a) \mapsto \bar{\alpha}(a) := \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha(a^n)}{n}$ из множества квазиморфизмов в множество однородных квазиморфизмов является линейным отображением над $\mathbb{R}$.

в) Проверьте, что эта проекция сюръективна и её ядро — в точности ограниченные квазиморфизмы.