

Введение в математику - семинар 3

25 сентября 2025

- (1) **Теорема:** Если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.
Ниже приведено её доказательство. Нет ли в нём ошибки?
База. Разбить треугольник на два треугольника можно только проведя один отрезок. Некоторые два угла меньших треугольников образуют в сумме развёрнутый, поэтому не могут быть оба острыми.
Шаг. Пусть имеется треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём ещё один отрезок, разбив один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на $n + 1$ треугольник, причём один из двух новых треугольников не будет остроугольным по доказанному выше. $\square$
- (2) **Неравенство Бернулли** Докажите, что $(1 + a)^n \geq 1 + na$ для любого $a \geq -1$.
- (3) (a) На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?
(b) На какое максимальное число частей могут разбить пространство n плоскостей?
- (4) Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.
- (5) Докажите, что для любого натурального $n > 3$ число $n!$ можно разложить на два множителя, отношение которых будет не меньше $2/3$ и не больше $3/2$.
- (6) Докажите (желательно двумя способами, а если получится то тремя):
(a) $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$;
(b) $C_p^0 \cdot C_q^m + C_p^1 \cdot C_q^{m-1} + \dots + C_p^m \cdot C_q^0 = C_{p+q}^m$;
(c) $C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \dots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$.
- (7) Как будут выглядеть слагаемые после раскрытия скобок и приведения подобных в выражении $(x + y + z)^n$?
- (8) Чему равна сумма квадратов чисел в n -ной строке треугольника Паскаля?
- (9) Выведите из того, что $n^2 = C_n^2 + C_{n+1}^2$, формулу суммы $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
- (10) Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых шаров по 4 пронумерованным коробкам, если в каждой коробке должен быть хотя бы один шар? Как изменится ответ, если коробки разрешается оставлять без шаров?
- (11) (a) Сколько существует слов длины 10, состоящих только из букв $\{a, b\}$ и не содержащих в записи двух букв "b" подряд.
(b) Сколько существует слов длины 10, состоящих только из букв $\{a, b, c\}$ и содержащих ровно 4 буквы "a"?
- (12) Сколько бывает отношений эквивалентности на множестве из 5 элементов?
- (13) Парк аттракционов посещают 10 детей. Утром они выстраиваются в 3 очереди: на карусель, на американские горки и в комнату страха (очередь может быть пустой). Дети заметили, что каждый день они выстраиваются по-новому. Сколько дней это может продолжаться?