

# Введение в математику - семинар 4

1 октября 2025

- (1) Найдите:
  - (a)  $i^{2025}$ ;
  - (b)  $(1+i)^{2025}$ ;
  - (c)  $\frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{25}}$ ;
  - (d)  $(1+\sqrt{3}i)^{16}$ ;
  - (e)  $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{30}$ .
- (2) Докажите равенство  $\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = \frac{1+i\operatorname{tg}(\alpha)}{1-i\operatorname{tg}(\alpha)}$ .
- (3) Решите уравнения:
  - (a)  $z^n = 1$ , для всех  $n \geq 2$ .
  - (b)  $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 17 = 0$ ;
  - (c)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ ;
  - (d)  $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^4 = i$ .
- (4) Среди комплексных чисел  $z$ , удовлетворяющих условию  $|z - 25i| \leq 15$ , найдите число с наименьшим аргументом.
- (5) Движения плоскости:
  - (a) Какое преобразование плоскости задаёт следующее отображение:
$$z \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z - 5 - 4i) + 5 + 4i.$$
  - (b) Задайте в комплексных координатах поворот на угол  $\alpha$  относительно точки  $(x_0, y_0)$ .
  - (c) Докажите, что композиция поворотов плоскости есть либо поворот, либо параллельный перенос.
- (6) Докажите, что уравнение прямой на комплексной плоскости всегда может быть записано в виде  $Bz - \bar{B}\bar{z} + C = 0$ , где  $C$  - чисто мнимое число.
- (7) Гомотетии:
  - (a) Какое преобразование плоскости задаёт отображение  $z \mapsto 8(z - 5 - 4i) + 5 + 4i$ ?
  - (b) Задайте в комплексных координатах гомотетию с центром в точке  $(x_0, y_0)$  и коэффициентом  $c$ .
  - (c) Докажите, что композиция гомотетий плоскости есть либо гомотетия, либо параллельный перенос.
- (8) Пусть многочлен с действительными коэффициентами  $f(x)$  имеет корень  $a + ib$ . Докажите, что число  $a - ib$  также будет корнем  $f(x)$ .
- (9) Пусть  $1, z_2, \dots, z_n$  — корни уравнения  $z^n = 1$ . Докажите, что  $(1 - z_2) \dots (1 - z_n) = n$ .

- (10) Для любых  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  докажите, что  $\sum \cos(x_i - x_j) \geq 0$  (в сумме все  $n^2$  слагаемых).  
 (11) Докажите, что отображение  $\mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , заданное формулой

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

является гомоморфизмом  $\mathbb{R}$ -алгебр (т. е. сохраняет суммы, произведения и умножение на числа).

- (12) Найдите сумму:  
 (a)  $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots$ ;  
 (b)  $C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + C_n^{12} + \dots$