

Введение в математику - семинар 5

8 октября 2025

- (1) Найдите 2023-25 степени и знак перестановок:
 - (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;
 - (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
 - (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 6 & 7 & 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$.
- (2) Посчитайте:
 - (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;
 - (b) $(1, 2, 3, 5) \circ (3, 4)$;
 - (c) $(1, 2, 5, 6)^{-1}$.
- (3) Какие цикловые типы перестановок возможны в группе $\mathfrak{S}_4$? Сколько перестановок каждого типа? Чему равен порядок перестановок каждого типа?
- (4) Сколько перестановок из $\mathfrak{S}_{10}$ имеют тип
 - (a) $1, \dots, 1, 2$;
 - (b) $2, 2, 2, 2$;
 - (c) $1, 2, 3, 4$?
- (5) Что можно сказать о чётности порядка произвольной нечётной перестановки?
- (6) Определите число инверсных пар и чётность следующих перестановок $f \in \mathfrak{S}_n$
 - (a) $(1, 2, 3, 4, 5)$;
 - (b) $(1, 3, 5)(2, 4)$;
 - (c) $f(i) = i + 2 \pmod{n}$;
 - (d) $f(i) = n + 1 - i$.
- (7) Существует ли в $\mathfrak{S}_{12}$ элемент порядка 42?
- (8) Пронумеруем вершины куба числами от 1 до 8, пусть f — поворот куба. Какой цикловой тип может иметь соответствующая перестановка из $\mathfrak{S}_8$? То же для несобственного движения, переводящего куб в себя.
- (9) Пусть g — перестановка из $\mathfrak{S}_n$. Докажите, что $g \circ (1, 2, \dots, k) \circ g^{-1} = (g(1), g(2), \dots, g(k))$.
- (10) Докажите, что $\mathfrak{S}_n$ порождается
 - (a) транспозициями $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$;
 - (b) транспозициями $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$.
- (11) Покажите, что минимальное количество множителей в разложении на транспозиции вида $(i, i+1)$ равно количеству инверсных пар в перестановке.
- (12) Докажите, что цикл длины l не представим в виде произведения менее чем $l-1$ транспозиции.
- (13) Покажите, что A_n порождается

- (a) циклами длины 3 и парами независимых транспозиций;
 - (b) только циклами длины 3.
- (14) Докажите, что при $n > 2$ любой цикл длины 3 является коммутатором двух перестановок из $\mathfrak{S}_n$. Выведите, что $A_n = [\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n]$.
- (15) Покажите, что
- (a) $[A_3, A_3] \neq A_3$;
 - (b) $[A_4, A_4] \neq A_4$.
- (16) Зафиксируем множество X и пусть S — набор биекций $X \rightarrow X$, такой что если $f, g \in S$, то $f \circ g \in S$ и $f^{-1} \in S$. Докажите, что S является группой. Докажите, что любая конечная группа является подгруппой $\mathfrak{S}_n$ при некотором n .