АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ РЕАЛИЗУЕМОСТИ ГИПЕРГРАФОВ - 1

Курс А.Б. Скопенкова

Известно, что существует быстрый (точнее – линейный) алгоритм, определяющий, вложим ли данный граф в плоскость. Мы рассмотрим аналогичную проблему для гиперграфов в пространствах произвольной размерности: как распознать вложимость k-мерного гиперграфа в d-мерное пространство? Эта проблема возникла на стыке комбинаторики, геометрии, топологии и компьютерной науки. Она активно изучается в последнее время.

Основное содержание курса — «конкретное» (в частности, алгоритмически мотивированное) введение в алгебраическую топологию. Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

Для изучения курса достаточно владения основами теории графов и числом пересечения для ломаных на плоскости [S, §1.3], [S18, §1.3]. Все необходимые определения (гиперграф, вложимость, NP-трудность, группы когомологий и т.д.) будут даны. При этом для работы с новыми понятиями потребуется (и будет развиваться) математическая культура. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнеее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции). Будут предложены красивые задачи для исследования.

Литература

[KS21] E. Kogan and A. Skopenkov, Embeddings of k-complexes in $2k$-manifolds and minimum rank of partial symmetric matrices, arXiv:2112.06636.

[S] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с алгоритмической точки зрения, https://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf.

[S14] A. Skopenkov, Realizability of hypergraphs and intrinsic linking theory. arXiv:1402.0658.

[S18] A. Skopenkov, Invariants of graph drawings in the plane, Arnold Math. J., 6 (2020) 21–55; full updated version: arXiv:1805.10237.

[S20] А. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦНМО, 2020, http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf.

[S22] A. Skopenkov, Netflix problem and realization of (hyper)graphs, https://www.mccme.ru/circles/oim/home/netflix20sep.pdf

Программа

1. Простейшие теоремы рамсеевской теории зацеплений. Примеры гиперграфов, линейно не реализуемых в трехмерном и четырехмерном пространстве. [S14, §1, §2]

2. Определения и примеры гиперграфа и симплициального комплекса. Симплициальная вложимость гиперграфов в d-мерное пространство. Примеры для плоскости и трехмерного пространства. Теорема общего положения. [S, §5.2-§5.4]

3. Кусочно-линейная вложимость гиперграфов в d-мерное пространство. Формулировки алгоритмических и NP-трудностных результатов. [S, §5.5, §5.6]

4. Примеры k-мерных гиперграфов, не вложимых в $2k$-мерное пространство. Доказательства: число ван Кампена и теорема Борсука-Улама. [S, §1.4, §5.7]

5. Алгоритмы распознавания планарности графов и вложимости k-мерных гиперграфов в $2k$-мерное пространство: когомологическое препятствие ван Кампена. [S, §§1.5, 5.8, 5.9]

6. Конфигурационное пространство пар различных точек (взрезанный квадрат). Взрезанные квадраты некоторых графов. Идея построения алгоритма распознавания вложимости k-мерных гиперграфов в d-мерное пространство при $2d \geq 3k + 3$. [S, §7.2]

7. Алгебраическое пересечение кривых на поверхности и k-мерных циклов в $2k$-мерном многообразии. [S20, §6]

8. Вложения графов в поверхности и k-мерных гиперграфов в $2k$-мерные многообразия. Примеры. [S22]

9.* Доказательства невложимости и минимальный ранг частичной матрицы (Netflix problem). [S22]

10.* Распознавание вложимости графов в поверхности и k-мерных гиперграфов в $2k$-мерные многообразия: совместимость гиперграфа и частичной матрицы (только формулировка). [KS21, §1]