

# КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ ПРОБЛЕМЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ

## спецкурс А.Б. Скопенкова

Дифференциальная топология изучает *гладкие* гомеоморфизмы, погружения и вложения. Гомотопическая топология изучает гомотопические классы *непрерывных* отображений. Удивительным образом они оказываются тесно связаны (соответствие Понтрягина и  $h$ -принцип Громова). На спецкурсе будут изучаться эта связь на примере гомотопических задач, необходимых для классификации гладких погружений и вложений. Тем самым, будут разучены некоторые основные методы дифференциальной и гомотопической топологии.

Основные идеи показываются на простейших частных случаях («олимпиадных» примерах), свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет этого удастся быстро добраться до интересных сложных теоретически важных результатов. Для изучения курса требуется владение основами дифференциальной и гомотопической топологии. Каждая следующая лекция рассчитана на тех, кто разобрался с материалом предыдущих (каждое домашнее задание, кроме первого, описывает материал предыдущей лекции). Экзамен состоит из решения задач в течение семестра и письменной работы в конце его. Подробная информация:

<http://www.mcsme.ru/circles/oim/home/combtop13.htm#homotop>

### Предварительная программа

1. Погружения сфер и гомотопические группы многообразий Штифеля. Теоремы Смейла-Хирша и Хефлигера-Хирша о классификации погружений. Теорема Кервера о тривиальности погружений сфер в метастабильной размерности.\* [S20, §15]

2. Конструкция Зимана многомерных зацеплений. Коэффициент зацепления в гомотопической группе. Связь коэффициента зацепления и инварианта Хефлигера-Ву. Групповая структура на множестве зацеплений в коразмерности больше 2. Классификация зацеплений в метастабильной размерности (Зиман-Хефлигер). [Hc, §§1-5]

3. Многомерные зацепление Уайтхеда и кольца Борромео. Классификация зацеплений  $(2l - 1)$ -мерных сфер в  $3l$ -мерном пространстве (Хефлигер). «Теоретическая» классификация многомерных зацеплений в коразмерности 3 (Хефлигер). Рациональная классификация (Хефлигер-Кроули-Ферри-М.Скопенков).\* [Hc, §§6,7]

4. Классификация заузленных торов. Их инвариант Хефлигера-Ву и гомотопические группы многообразий Штифеля. [S06, §6]

5.\* Точная последовательность Гизина. [FF, §22.4.A] Когомологии конфигурационных пространств размещений. Аналог теоремы Борсука-Улама по модулю степени простого числа. Применения к отображениям без  $r$ -кратных точек для  $r$  степени простого. [S16, §2.3]

6. Эквивариантные отображения конфигурационных пространств размещений. [K91] Препятствия к вложимости.

7. Гомоморфизм Гуревича и теорема Гуревича. Теорема Уайтхеда о гомотопической эквивалентности. Гомотопический тип дополнения многообразия в евклидовом пространстве. Теорема Браудера-Левина о классификации вложений (формулировка).\* [S20, §§14.7, 15]

8. Гомотопическая классификация отображений  $n$ -мерного многообразия в  $n$ -мерную сферу (Хопф) и в  $(n - 1)$ -мерную сферу (Хопф-Понтрягин-Фрейденталь-Стиррод-Ву), а также ненулевых касательных векторных полей на многообразии. [S20, §§4, 8]

9.\* Теория препятствий и алгоритмы распознавания гомотопности отображений. Башни Постникова.

### Литература

[FF] А. Т. Фоменко и Д. Б. Фукс, Курс гомотопической топологии, М, Наука, 1989.

[Hc] [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High\\_codimension\\_links](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/High_codimension_links).

- [K91] U. Koschorke, Link homotopy with many components, *Topology* 30:2 (1991) 267–281.
- [S06] A. Skopenkov, Embedding and knotting of manifolds in Euclidean spaces, *London Math. Soc. Lect. Notes*, 347 (2008) 248–342, arXiv:0604045.
- [S16] А. Б. Скопенков, Топологическая гипотеза Тверберга, *УМН*, 73:2 (2018), 344–377; полная обновляемая версия: arXiv:1605.05141.
- [S20] А.Б. Скопенков, Алгебраическая топология с геометрической точки зрения, М, МЦ-НМО, 2020, <https://www.mscme.ru/circles/oim/obstruct.pdf>.