Математические заметки

том 0 выпуск 0 июнь 1966

УДК 512.754, 512.742.72

ТЕОРЕМА БРАУЭРА–ЗИГЕЛЯ ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ.

А. И. Зыкин

В статье рассматривается многомерное обобщение теоремы Брауэра-Зигеля на случай эллиптических поверхностей над конечными полями.

Классическая теорема Брауэра–Зигеля для числовых полей, доказанная Брауэром (см. [1]), утверждает, что если k пробегает последовательность числовых полей, нормальных над $\mathbb{Q}$, таких что $n_k/\log|D_k| \to 0$, то $\log(h_k R_k)/\log\sqrt{|D_k|} \to 1$. Здесь D_k, h_k и R_k — дискриминант, число классов и регулятор поля k соответственно. Эта теорема была обобщена Цфасманом и Влэдуцем (см. [7]) на случай, когда условие $n_k/\log|D_k| \to 0$ не выполнено (асимптотически хорошие семества полей). При этом получающийся предел $\lim\log(h_k R_k)/\log\sqrt{|D_k|}$ уже не обязательно равен 1.

Существование глубокой аналогии между числовыми и функциональными полями известно с давних пор. При этом многие результаты для функциональных полей получаются гораздо легче (например, исчезают аналитические проблемы, связанные с дзета-функциями). Аналог теоремы Брауэра–Зигеля для функциональных полей доказывается существенно проще и требование нормальности, присутствующее в числовом случае, оказывается лишним.

Пусть $\{X_i\}$ семейство попарно неизоморфных гладких, абсолютно неприводимых, проективных кривых над конечным полем $\mathbb{F}_q$ рода $g_i = g(X_i)$. Пусть $\Phi_{q^m}(X_i)$ число точек степени в точности m на кривой X_i.

Определение 1. *Числа $\phi_{q^m} = \lim\limits_{i\to\infty}\frac{\Phi_{q^m}(X_i)}{g_i}$ называются инвариантами Цфасмана—Влэдуца семейства $\{X_i\}$. Если пределы ϕ_q существуют, то семейство назвается асимптотически точным.*

Пусть $Z_i(t) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-t^m)^{-\Phi_m(X_i)}$– дзета функция кривой X_i. Она имеет полюс порядка один в точке $t = \frac{1}{q}$, обозначим через $\varkappa_i$ ее вычет в этой точке. Известно, что $\varkappa_i$ выражается через число $\mathbb{F}_q$-точек на Якобиане кривой X_i (аналог числа классов идеалов в числовом случае). Имеет место теорема, доказанная Цфасманом в [6]:

Теорема 1. *Для асимптотически точного семейства кривых $\{X_i\}$ имеет место формула:*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log\varkappa_i}{g_i} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\phi_{q^m}\log\frac{q^m}{q^m-1}.$$

Попытки обобщить эту теорему на многомерный случай приводят сразу к нескольким результатам. Во-первых, для семейства алгебраических многообразий размерности d над конечным полем $\mathbb{F}_q$ можно изучать поведение вычета дзета функции в точке $t = q^{-d}$. В этом направлении аналог теоремы 1 был получен в работе [8]. Однако, геометрическая интерпретация вычета дзета-фнкции в точке $t = q^{-d}$ уже не столь проста.

Другой подход был предложен Андри в [3] и Кунявским–Цфасманом в [5]. В этих работах изучается поведение значения L-функции в точке $s = 1$ для семейств эллиптических кривых. Вопрос является интересным, так как это значение связано с тонкими арифметическими инвариантами эллиптических кривых посредством гипотезы Берча–Свиннертона-Дайера. Андри формулирует некоторую гипотезу, аналогичную теореме Брауэра–Зигеля, для случая семейства эллиптических кривых над фиксированным числовым полем. Здесь нас интересует преимущественно функциональный

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 06-01-72004-МНТИа, РФФИ 06-01-72550-НЦНИЛа, РФФИ 07-01-00051а, РФФИ 08-07-92495-НЦНИЛа, INTAS 05-1000008-8118

случай, так что более подробно мы рассмотрим подход Кунявского и Цфасмана. Дадим несколько предварительных определений. Пусть X — гладкая, проективная кривая над $\mathbb{F}_q$, $K = \mathbb{F}_q(X)$ ее поле функций, E/K эллиптическая кривая, а $f : \mathcal{E} \to X$ соответствующая эллиптическая поверхность. Рассмотрим семейство накрытий $X = X_0 \leftarrow X_1 \cdots \leftarrow X_i \leftarrow \dots$ и семейство эллиптических поверхностей $\mathcal{E}_i$, получающихся заменой базы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 & \longleftarrow & \mathcal{E}_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathcal{E}_i & \longleftarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_i & \longleftarrow & \dots.
\end{array}$$

Пусть $\Phi_{v,f}(X_i)$ — число точек степени f на X_i, лежащих над точкой $v \in |X|$. Будем далее предполагать, что для семейства $\{X_i\}$ существуют пределы $\phi_{v,f} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{\Phi_{v,f}(X_i)}{g_i}$.

Обозначим через E_i эллиптическую кривую, являющуюся общим слоем $\mathcal{E}_i \to X_i$. Если v — замкнутая точка X, полжим $Nv = q^{\deg v}$. Пусть $N_{v,f}(E)$ число точек на редукции $E_v = f^{-1}(v)$ кривой E над полем $\mathbb{F}_{Nv^f}$. Положим $a_{v,f}(E) = Nv^f + 1 - N_{v,f}(E)$ и

$$L_{v,f}(E,s) = \begin{cases} (1 - a_{v,f}Nv^{-fs} + Nv^{f(1-2s)})^{-1}, & \text{если } E_v \text{ неособа;} \\ (1 - a_{v,f}Nv^{-fs})^{-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомним, что L-функция эллиптической кривой E определяется как

$$L_E(s) = \prod_{v\in|X|} L_{v,1}(E,s).$$

Введем также предельную L-функцию семейства $\{E_i/K_i\}$ как

$$L_{\{E_i/K_i\}}(s) = \prod_{v\in|X|}\prod_{f=1}^{\infty} L_{v,f}(E,s)^{\phi_{f,v}}.$$

Пусть r_E — порядок нуля $L_E(s)$ в точке $s = 1$, а c_E — первый ненулевой коэффициент в разложении $L_E(s)$ в ряд Тейлора в $s = 1$. Кунявский и Цфасман в работе [5] формулируют следующую гипотезу:

Гипотеза 1. $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\log|c_{E_i}|}{g_i} = -\sum_{v\in|X|}\sum_{f=1}^{\infty} \phi_{v,f}\log\frac{N_{v,f}(E)}{Nv^f}$.

В этой же работе доказывается частный случай гипотезы 1 для случая постоянных эллиптических кривых ($\mathcal{E}_i = E' \times X_i$, где $E'/\mathbb{F}_q$ — фиксированная эллиптическая кривая). К сожалению, доказательство содержит лакуны. Перестановка предельного перехода в бесконечном произведении для L-функции и предела при $g_i \to \infty$ не является обоснованной. Таким образом, на данный момент гипотеза не известна ни для какого семейства эллиптических кривых.

Основным нашим результатом является доказательство следующего факта в направлении гипотезы:

Теорема 2. 1. *Бесконечное произведение для* $L_{\{E_i/K_i\}}(s)$ *сходится при* $\mathrm{Re}\, s \geqslant 1$.

2. *Для* $\mathrm{Re}\, s > 1$ *имеет место формула* $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\log L_{E_i}(s)}{g_i} = \log L_{\{E_i/K_i\}}(s)$.
3. *Предположим, что для семейства* E_i/K_i *выполнено* $\lim\limits_{i\to\infty} r_{E_i}/g_i = 0$. *Тогда* $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\log|c_{E_i}|}{g_i} \leqslant \log L_{\{E_i/K_i\}}(1)$.

Замечания 1. 1. *Условие* $\lim\limits_{i\to\infty} r_{E_i}/g_i = 0$ *выполнено в случае постоянного семейства кривых и довольно часто в общем случае (см.* [2]*).*

2. *Вопрос о наличии равенства в утверждении 3 теоремы весьма тонок и связан с низко лежащими нулями L-функций. Подробное обсуждение вопроса, хотя и в несколько другой ситуации, можно найти в работе* [4].

Благодарности. Я хочу поблагодарить моего научного руководителя М. А. Цфасмана за плодотворные обсуждения и постоянное внимание к моей работе, а также М. Балазара за ценные советы и идеи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Brauer. On zeta-functions of algebraic number fields, Amer. J. Math. **69** (1947), Num. 2, 243–250.

[2] A. Brumer. The average rank of elliptic curves. I, Invent. Math. **109** (1992), Num. 3, 445–472.

[3] M. Hindry. Why is it difficult to compute the Mordell–Weil group, Diophantine geometry, CRM Series, **4**, 197–219, Ed. Norm., Pisa, 2007.

[4] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak. Low lying zeros of families of L-functions, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., Num. **91** (2000), 55–131.

[5] B. Kunyavskii, M. A. Tsfasman. Brauer–Siegel theorem for elliptic surfaces, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. **8**.

[6] M. A. Tsfasman. Some remarks on the asymptotic number of points, Coding Theory and Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1518**, 178–192, Springer—Verlag, 1992.

[7] M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ. Asymptotic properties of global fields and generalized Brauer–Siegel Theorem, Moscow Mathematical Journal, Vol. **2**, Num. 2, 329–402.

[8] A. Zykin. On the generalizations of the Brauer–Siegel theorem, proceedings of the Conference AGCT 11 (2007).

А. И. Зыкин
МИАН, г. Москва; НМУ, г. Москва
E-mail: alzykin@gmail.com