МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

ЗЫКИН АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ

УДК 512.754, 512.742, 511.23, 511.331

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЛОБАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
д. ф.-м. н. Цфасман Михаил Анатольевич;
д. ф.-м. н. Сергеев Армен Глебович.

Москва — 2010

Оглавление

Введение

Диссертация состоит из двух основных частей. Первая часть посвящена изучению асимптотических свойств дзета-функций, L-функций, глобальных полей и многообразий над глобальными полями. Цель второй части — изучение якобианов среди трехмерных абелевых многообразий. Ввиду обширности тематики, дадим описание каждой части и каждой главы.

Первая часть.

Асимптотическая теория глобальных полей была заложена в 1990е годы С. Г. Влэдуцем и М. А. Цфасманом, сначала для функциональных, а затем и для числовых полей. Исходной точкой для развития теории послужила следующая проблема: для положительного целого числа g и степени простого числа q найти максимальное число точек на кривой рода g над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Задача оказывается весьма сложной и полный ответ в настоящее время известен лишь для $g = 1$ и $g = 2$. Также имеются частичные результаты для $g = 3$, которые получаются с помощью рассмотрения якобианов среди абелевых многообразий размерности 3, что является предметом изучения во второй части этой диссертации.

С. Г. Влэдуц, В. Г. Дринфельд и М. А. Цфасман получили интересные результаты, рассматривая эту проблему под несколько другим углом.

Более конкретно, им удалось доказать асимптотические границы для максимального числа точек на кривых, когда $g \to \infty$, а q фиксировано. Эти границы оказываются оптимальными, если q — квадрат целого числа. Их идеи имели многочисленные приложения в теории кодирования, в теории упаковок сфер и т. п.

Сама асимптотическая теория была развита далеко за пределы этих границ для числа точек и объединяет в настоящее время самые разнообразные результаты. Несколько примеров: обобщенная теорема Брауэра–Зигеля для функциональных и числовых полей, границы для регуляторов и дискриминантов, асимптотическая теория дзета-функций глобальных полей, границы для числа точек на многообразиях над конечными полями...

Целью первой части диссертации является, прежде всего, более глубокое изучение асимптотической теории глобальных полей, в особенности, числовых полей, где многие результаты менее точны, чем в функциональном случае из-за возникающих аналитических трудностей. Затем мы рассматриваем другие ситуации, где асимптотическая теория может быть применена. Более точно, мы изучаем следующие три случая с разных точек зрения: дзета-функции многообразий большей размерности над конечными полями, L-функции эллиптических поверхностей над конечными полями и L-функции модулярных форм. Думается, что эти три случая — лишь предвестники общей теории, которую еще предстоит развить.

Теперь опишем содержание каждой из глав.

Глава 1.

В этой главе мы изучаем обобщения классической теоремы Брауэра–Зигеля для числовых полей. Мы называем поле алгебраических чисел почти нормальным, если существует конечная башня числовых полей $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = K$ такая, что все расширения K_i/K_{i-1} являются нормальными. Ослабляя условие одно из условий классической теоремы Брауэра–Зигеля, мы доказываем следующее ее обобщение на случай почти нормальных расширений числовых полей:

Теорема 0.0.1 (см. теорему 1.1.1)**.** *Пусть $\mathcal{K} = \{K_i\}$ — семейство почти нормальных числовых полей, для которого $n_{K_i}/\log|D_{K_i}| \to 0$, когда $i \to \infty$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log h_{K_i} R_{K_i}}{\log \sqrt{|D_{K_i}|}} = 1,$$

где h_K, R_K и D_K — число классов идеалов, регулятор и дискриминант поля K соответственно.

Асимптотически хороший случай (т. е., когда $\lim n_k/\log|D_k| > 0$) был уже известен в этой общности благодаря работам С. Г. Влэдуца и М. А. Цфасмана. Однако, их методы оказываются неприменимыми в асимптотически плохом случае. Мы используем идеи Х. Старка, а также некоторые неравенства С. Лобутена для доказательства нашего результата.

Затем, используя подход, предложенный К. Мэром и Ф. Хаджиром, мы строим башни асимптотически хороших расширений (башни полей классов) со значениями отношения Брауэра–Зигеля $\lim \frac{\log h_k R_k}{\log\sqrt{|D_k|}}$, меньшими, чем в примерах известных ранее.

Глава 2.

Эта глава выполнена в соавторстве с Филиппом Лебаком.

В этой главе мы изучаем асимптотическое поведение логарифмических производных дзета-функций в семействах глобальных полей. Эта задача важна и интересна так как, с одной стороны, она связана с основным неравенством Цфасмана–Влэдуца (в случае функциональных полей оно дает оценку на число точек на кривых над конечным полем), а, с другой стороны, с явной теоремой Брауэра–Зигеля. Наш основной результат таков:

Теорема 0.0.2 (см. теоремы 2.1.1 и 2.1.2)**.** *Для всякого глобального поля K, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$, имеет место:*

1. *в случае функционального поля K, являющегося расширением $\mathbb{F}_r(t)$,*

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} + \frac{1}{\log r}\cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} = O\left(\frac{g_K}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1+\frac{1}{\epsilon_0}\right)\right) + O\left(r^{\frac{N}{2}}\right);$$

2. *в случае числового поля K в предположении обобщенной гипотезы Римана для дзета-функций Дедекинда*

$$\sum_{q\leq N} \frac{\Phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{\epsilon-\frac{1}{2}} = = O\left(\frac{|\epsilon|^4+|\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g+n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Здесь Φ_q — число идеалов поля K с нормой q, g_K — род поля K в функциональном случае и $g_K = \log\sqrt{|D_K|}$ в числовом случае, $Z_K(s) = \zeta_K'(s)/\zeta_K(s)$ — логарифмическая производная дзета-функции Дедекинда поля K.

Кроме того, в той же главе получены результаты, улучшающие остаточный член в явной теореме Брауэра–Зигеля, доказанной ранее Ф. Лебаком.

Основной метод доказательств в этой главе — явные формулы А. Вейля. Однако, применение их в числовом случае сопряжено с весьма тонкими аналитическими рассмотрениями.

Глава 3.

Эта глава посвящена изучению распределения нулей L-функций модулярных форм. Каждой примитивной модулярной форме f веса k_f относительно $\Gamma_0(N_f)$ сопоставляется мера

$$\Delta_f := \frac{2\pi}{N_f + 2k_f} \sum_{L_f(\rho)=0} \delta_{t(\rho)},$$

где $t(\rho) = \frac{1}{i}\left(\rho - \frac{1}{2}\right)$, а ρ пробегает все нетривиальные нули L-функции $L_f(s)$; здесь δ_a обозначает атомарную меру (меру Дирака), сосредоточенную в a.

Мы доказываем следующий результат:

Теорема 0.0.3 (см. теорему 3.1.1)**.** *В предположении обобщенной гипотезы Римана для L-функций модулярных форм, для любого семейства $\{f_j(z)\}$ примитивных форм веса k_j и уровня N_j с $k_j + N_j \to \infty$ предел*

$$\Delta = \lim_{j\to\infty} \Delta_j = \lim_{j\to\infty} \Delta_{f_j}$$

существует в пространстве мер медленного роста на $\mathbb{R}$ и равен мере с плотностью 1 *(т. е. нули L-функций модулярных форм становятся равномерно распределенными).*

Глава 4.

В этой главе мы изучаем асимптотические свойства семейств дзета- и L-функций над конечными полями. Мы занимаемся следующими тремя проблемами: основное неравенство, результаты, обобщающие теорему Брауэра–Зигеля и распределение нулей. Мы аксиоматически определяем класс дзета и L-функций, к которым применимы наши методы, таким образом, что большинство предыдущих результатов С. Г. Влэдуца, Ж. Лашо и М. А. Цфасмана касательно сходных проблем для дзета-функций кривых и многообразий над конечными полями включаются в нашу схему. Мы изучаем, до какой степени их результаты для кривых остаются верными в этом общем контексте.

Далее мы даем несколько конкретных приложений. Самый интересный случай — это случай L-функций семейств эллиптических поверхностей, недавно изучавшийся Б. Э. Кунявским, М. А. Цфасманом, М. Андри и А. Пачеко. Полученные нами результаты позволяют приблизиться к доказательству некоторых их гипотез, связанных с обобщением теоремы Брауэра–Зигеля на подобные семейства и описывающих асимптотическое поведение группы Шафаревича–Тейта и регулятора эллиптических поверхностей. Кроме того, наши методы позволяют получить обобщение результатов Ф. Мишеля о равномерной распределенности нулей L-функций эллиптических кривых над $\mathbb{F}_q(t)$.

В классическом случае кривых над конечным полем, как следствие более общих результатов, нам удается получить теорему о предельных дзета-функциях, являющуюся обобщением одного из результатов Я. Ихары об асимптотическом поведении постоянных Эйлера–Кронекера функциональных полей.

Вторая часть.

Эта часть выполнена в соавторстве с Ж. Лашо и К. Ритценталером.

Исторически вопросы, рассматриваемые в этой части диссертации, мотивированы той же задачей, что и в первой части: найти максимальное число точек на кривых над конечными полями. Здесь нас интересует случай малых родов g, тогда как в первой части, напротив, предполагалось, что $g \to \infty$. Разница между методами применимыми в этих ситуациях весьма значительна.

Один из подходов к этой проблеме, предложенный Ж.-П. Серром, состоит в том, чтобы ответить на выше сформулированный вопрос для абелевых многообразий (что несложно, благодаря теореме Хонды–Тейта), а затем, выбрать среди всех абелевых многообразий, те, которые соответствуют якобианам. Этой последней проблемой мы и занимаемся в этой части диссертации.

Используя модулярные формы Зигеля мы даем полный ответ на данный вопрос в случае, когда $g = 3$ и поле определения абелевых многообразий k содержится в $\mathbb{C}$. Более точно, мы реализуем следующую стратегию. Для поля k и модулярной формы Зигеля f над k веса $h \geq 0$ и рода $g > 1$ мы определяем инвариант k-классов изоморфизма главнополяризованных абелевых многообразий (A, a). Кроме того, если (A, a) является якобианом гладкой плоской проективной кривой, мы показываем, как сопоставить f классический плоский инвариант.

Как первое следствие этих конструкций, для $g = 3$ и $k \subset \mathbb{C}$ мы получаем новое (строгое) доказательство формулы Клейна, связывающей модулярную форму Зигеля χ_{18} с дискриминантом плоских квартик.

Вторым следствием является ответ на основной вопрос этой главы. Он дается с помощью модулярных форм Зигеля χ_{18} и Σ_{140}, которые были определены Д.-И. Игусой как произведение всех функций тета-нуль с четными характеристиками и как тридцать пятая элементарная симметрическая функция от восьмых степеней функций тета-нуль с четными характеристиками соответственно. Мы доказываем следующий критерий:

Теорема 0.0.4 (см. теорему 5.4.5). *Пусть (A, a) — главнополяризованное трехмерное абелево многообразие, определенное над полем $k \subset \mathbb{C}$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — произвольный базис $\Omega^1_k[A]$, а $\gamma_1, \dots \gamma_6$ — симплектический базис (для поляризации a) пространства $H_1(A, \mathbb{Z})$, так что*

$$\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_6} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_3 & \cdots & \int_{\gamma_6} \omega_3 \end{pmatrix}$$

является матрицей периодов (A, a). Положим $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathbb{H}_3$.

1. *Если $\Sigma_{140}(\tau) = 0$ и $\chi_{18}(\tau) = 0$, то (A, a) разложимо над $\bar{k}$. В частности, оно не является якобианом.*

2. *Если $\Sigma_{140}(\tau) \neq 0$ и $\chi_{18}(\tau) = 0$, то существует гиперэллиптическая кривая X/k такая, что $(\operatorname{Jac} X, j) \simeq (A, a)$.*

3. *Если $\chi_{18}(\tau) \neq 0$, то (A, a) изоморфно якобиану над k тогда и только тогда, когда*

$$(2\pi)^{54} \frac{\chi_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}}$$

является квадратом в k.

Эта теорема дает ответ на вопрос Ж.-П. Серра о характеризации якобианов среди трехмерных абелевых многообразий. Ее доказательство использует, во-первых, формулу Клейна, а, во-вторых, описание действия изоморфизмов на значения модулярных форм Зигеля.

Благодарности

Я благодарю моих научных руководителей Михаила Анатольевича Цфасмана и Армена Глебовича Сергеева за постоянное внимание к данной работе и многочисленные советы. Выражаю благодарность Ж. Лашо, Ф. Лебаку и К. Ритценталеру за возможность работать в соавторстве. Также благодарю М. Балазара, С. Г. Влэдуца, С. Лобутена и Э. Руае за полезные обсуждения.

Часть I

Асимптотические свойства дзета и L-функций

Глава 1

Теоремы Брауэра–Зигеля и Цфасмана–Влэдуца для почти нормальных расширений числовых полей

1.1 Введение

Пусть K — поле алгебраических чисел степени $n_K = [K : \mathbb{Q}]$. Пусть D_K — его дискриминант. Определим род поля K как $g_K = \log \sqrt{D_K}$. Будем обозначать через h_K число классов идеалов K, а через R_K его регулятор. Назовем последовательность $\{K_i\}$ числовых полей семейством, если K_i не изоморфно K_j при $i \neq j$. Семейство называется башней, если $K_i \subset K_{i+1}$ для всех i. Для семейств числовых полей мы изучаем предел

$$\mathrm{BS}(\mathcal{K}) := \lim_{i \to \infty} \frac{\log h_{K_i} R_{K_i}}{g_{K_i}}.$$

Классическая теорема Брауэра–Зигеля, доказанная Брауэром [3], утверждает, что для семейства $\mathcal{K} = \{K_i\}$ мы имеем $\mathrm{BS}(\mathcal{K}) = 1$, если $\mathcal{K}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_{K_i}}{g_{K_i}} = 0$;

(ii) выполнена обобщенная гипотеза Римана (GRH) или все поля K_i нормальны над $\mathbb{Q}$.

Мы называем числовое поле *почти нормальным*, если существует конечная башня числовых полей $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_m = K$ такая, что все расширения K_i/K_{i-1} являются нормальными. Ослабляя условие (ii), мы доказываем следующее обобщение классической теоремы Брауэра–Зигеля на случай почти нормальных расширений числовых полей:

Теорема 1.1.1. *Пусть $\mathcal{K} = \{K_i\}$ — семейство почти нормальных числовых полей, для которого $n_{K_i}/g_{K_i} \to 0$, когда $i \to \infty$. Тогда* $\mathrm{BS}(\mathcal{K}) = 1$.

М. А. Цфасман и С. Г. Влэдуц показали, что, принимая во внимание вклад неархимедовых точек, можно обобщить теорему Брауэра–Зигеля на случай расширений полей, для которых условие (i) не выполняется.

Для степени простого числа q положим

$$\Phi_q(K_i) := |\{v \in P(K_i) : \mathrm{Norm}(v) = q\}|,$$

где $P(K_i)$ — множество простых идеалов кольца целых поля K_i. Положим также $\Phi_{\mathbb{R}}(K_i) = r_1(K_i)$ and $\Phi_{\mathbb{C}}(K_i) = r_2(K_i)$, где r_1 и r_2 — число вещественных и комплексных нормирований поля K_i соответственно.

Для удобства введем множество индексов $A = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}; 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, \ldots\}$, состоящее из степеней простых чисел и двух вспомогательных символов $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Семейство $\mathcal{K} = \{K_i\}$ называется *асимптотически точным*, если для всякого $\alpha \in A$ существует предел

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(\mathcal{K}) := \lim_{i\to\infty} \frac{\Phi_\alpha(K_i)}{g_{K_i}}.$$

Мы называем асимптотически точное семейство $\mathcal{K}$ *асимптотически хорошим* (соответственно, *асимптотически плохим*), если существует $\alpha \in A$ такое, что $\phi_\alpha > 0$ (соответственно, $\phi_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in A$). Для асимптотически хороших башен глобальных полей следующее обобщение теоремы Брауэра–Зигеля было доказано в [67, теорема 7.3]:

Теорема 1.1.2 (Цфасман–Влэдуц)**.** *Предположим, что для асимптотически хорошей башни $\mathcal{K}$ выполнено одно из следующих условий:*

- *верна GRH*
- *все поля K_i почти нормальны над $\mathbb{Q}$.*

Тогда предел $\mathrm{BS}(\mathcal{K}) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{\log h_{K_i} R_{K_i}}{g_{K_i}}$ *существует и*

$$\mathrm{BS}(\mathcal{K}) = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_\mathbb{R} \log 2 - \phi_\mathbb{C} \log 2\pi, \tag{1.1}$$

где сумма распространяется на все степени простых q.

Для асимптотически плохой башни числовых полей мы имеем $\phi_\mathbb{R} = \phi_\mathbb{C} = 0$, а также $\phi_q = 0$ для всех степеней простых q, так что правая часть формулы (1.1) равна единице. Мы также замечаем, что семейство асимптотически плохое тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_{K_i}}{g_{K_i}} = 0$. Таким образом, объединяя теорему 1.1.1 с теоремой 1.1.2, мы получаем следующее следствие:

Следствие 1.1.3. *Для всякой башни $\mathcal{K} = \{K_i\}$, $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ почти нормальных числовых полей предел $\mathrm{BS}(\mathcal{K})$ существует, и имеет место равенство*

$$\mathrm{BS}(\mathcal{K}) = \lim_{i\to\infty} \frac{\log(h_i R_i)}{g_i} = 1 + \sum_q \phi_q \log \frac{q}{q-1} - \phi_\mathbb{R} \log 2 - \phi_\mathbb{C} \log 2\pi,$$

где q пробегает степени простых.

В [67] даются границы на предельное отношение $\mathrm{BS}(\mathcal{K})$, а также примеры, показывающие, что значение $\mathrm{BS}(\mathcal{K})$ может быть отлично от 1. Мы исправляем некоторые из неверных границ из [67], а также уточняем некоторые оценки в примерах. Кроме того, используя бесконечные слаборазветвленные башни полей, найденные Хаджиром и Мером [20], мы (в предположении GRH) получаем новые примеры вполне вещественных и вполне комплексных полей, для которых значения $\mathrm{BS}(\mathcal{K})$ меньше известных ранее из [67]. Результат может быть сформулирован следующим образом:

Теорема 1.1.4. 1. *Пусть* $k = \mathbb{Q}(\xi)$, *где* ξ *— корень многочлена* $f(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x + 1$. *Пусть*

$$K = k(\sqrt{\xi^5 - 467\xi^4 + 994\xi^3 - 3360\xi^2 - 2314\xi + 961}).$$

Тогда K *— вполне комплексное расширение, имеющее бесконечную башню* $\mathcal{K}$ *слаборазветвленных* 2*-расширений, для которой, в предположении GRH, имеет место*

$$\mathrm{BS}_{\mathrm{lower}} \leq \mathrm{BS}(\mathcal{K}) \leq \mathrm{BS}_{\mathrm{upper}},$$

где $\mathrm{BS}_{\mathrm{lower}} \approx 0.56498\ldots$, $\mathrm{BS}_{\mathrm{upper}} \approx 0.59748\ldots$.

2. *Пусть* $k = \mathbb{Q}(\xi)$, *где* ξ *— корень многочлена* $f(x) = x^6 - x^5 - 10x^4 + 4x^3 + 29x^2 + 3x - 13$. *Пусть*

$$K = k(\sqrt{-2993\xi^5 + 7230\xi^4 + 18937\xi^3 - 38788\xi^2 - 32096\xi + 44590}).$$

Тогда K *— вполне вещественное расширение, имеющее бесконечную башню* $\mathcal{K}$ *слаборазветвленных* 2*-расширений, для которой, в предположении GRH, имеет место*

$$\mathrm{BS}_{\mathrm{lower}} \leq \mathrm{BS}(\mathcal{K}) \leq \mathrm{BS}_{\mathrm{upper}},$$

где $\mathrm{BS}_{\mathrm{lower}} \approx 0.79144\ldots$, $\mathrm{BS}_{\mathrm{upper}} \approx 0.81209\ldots$.

Стоит отметить, что безусловные результаты (т. е. без предположения GRH) для вышеупомянутых примеров вполне комплексных полей, получаемые методами Цфасмана и Влэдуца, несколько хуже, нежели те, что уже известны из [67]. Это является следствием наличия довольно большого числа простых идеалов с малой нормой в полях K. По тем же причинам верхние границы для отношения Брауэра—Зигеля в остальных примерах из [20] слишком высоки, хотя нижние границы все еще хороши.

Наконец, дадим таблицу, где все границы и оценки сведены воедино, представляющую собой улучшенную версию таблицы из [67]:

		нижняя граница	нижний пример	верхний пример	верхняя граница
GRH	все поля	0.5165	0.5649-0.5975	1.0602-1.0798	1.0938
	вполне вещественные	0.7419	0.7914-0.8121	1.0602-1.0798	1.0938
	вполне комплексные	0.5165	0.5649-0.5975	1.0482-1.0653	1.0764
Безусловно	все поля	0.4087	0.5939-0.6208	1.0602-1.1133	1.1588
	вполне вещественные	0.6625	0.8009-0.9081	1.0602-1.1133	1.1588
	вполне комплексные	0.4087	0.5939-0.6208	1.0482-1.1026	1.1310

1.2 Доказательство теоремы 1.1.1

Пусть $\zeta_K(s)$ — дзета-функция Дедекинда числового поля K, а $\varkappa_K$ — ее вычет в точке $s = 1$. Обозначим через w_K число корней из единицы в K, а через r_1, r_2 число вещественных и комплексных нормирований K соответственно. Имеет место следующая формула для вычета [41, глава VIII, §3]:

$$\varkappa = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_K R_K}{w_K \sqrt{D_K}}.$$

Так как

$$\sqrt{w_K/2} \leq \varphi(w_K) = [\mathbb{Q}(\zeta_{w_K}) : \mathbb{Q}] \leq [K : \mathbb{Q}] = n_K,$$

то мы замечаем, что $w_K \leq 2n_K^2$, а значит $\log w_{K_j}/g_{K_j} \to 0$. Значит, достаточно показать, что $\log \varkappa_{K_j}/\log D_{K_j} \to 0$.

Верхяя граница может быть получена из следующей теоремы [45, теорема 1]:

Теорема 1.2.1. *Пусть K — числовое поле степени $n \geq 2$. Тогда*

$$\varkappa_K \leq \left(\frac{e \log D_K}{2(n-1)}\right)^{n-1}. \tag{1.2}$$

Более того, если $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$ и $\zeta_K(\rho) = 0$, то

$$\varkappa_K \leq (1-\rho)\left(\frac{e \log D_K}{2n}\right)^{n}. \tag{1.3}$$

Используя оценку (1.2), мы получаем (без предположения нормальности) "легкое неравенство":

$$\frac{\log \varkappa_{K_j}}{\log D_{K_j}} \leq \frac{n_j - 1}{\log D_{K_j}}\left(\log \frac{e}{2} + \log \frac{\log D_{K_j}}{n_j - 1}\right) \to 0.$$

Нижнюю границу получить значительно тяжелее, так что для продолжения доказательства мы используем еще несколько вспомогательных утверждений.

Пусть K — числовое поле, отличное от $\mathbb{Q}$. Вещественное число ρ называется *исключительным нулем* функции $\zeta_K(s)$, если $\zeta_K(\rho) = 0$ и

$$1 - (4 \log D_K)^{-1} \leq \rho < 1;$$

исключительный ноль ρ функции $\zeta_K(s)$ называется *нулем Зигеля*, если

$$1 - (16 \log D_K)^{-1} \leq \rho < 1.$$

Наше доказательство будет основано на следующем важном свойстве нулей Зигеля, доказанном Старком [61, Лемма 10]:

Теорема 1.2.2. *Пусть K — почти нормальное числовое поле, а ρ — ноль Зигеля $\zeta_K(s)$. Тогда существует квадратичное поле k, являющееся подполем K, такое, что $\zeta_k(\rho) = 0$.*

Следующая оценка на вычет также получена Старком ([61, лемма 4] или [46, теорема 1]):

Теорема 1.2.3. *Пусть K — числовое поле, а ρ — исключительный ноль $\zeta_K(s)$, если он существует и $\rho = 1-(4\log D_K)^{-1}$, иначе. Тогда существует абсолютная постоянная $c < 1$ (эффективно вычислимая) такая, что*

$$\varkappa_K > c(1-\rho). \tag{1.4}$$

Наше доказательство теоремы 1.1.1 похоже на доказательство классической теоремы Брауэра–Зигеля, данное в [47]. Мы будем использовать теорему Брауэра–Зигеля для квадратичных полей, простое доказательство которой приводится в [17]. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что $\zeta_{K_j}(s)$ не имеет нулей Зигеля. Из (1.4) следует, что

$$\varkappa_{K_j} > c(1-\rho) \geq c\left(1 - \left(1 - \frac{1}{16\log D_{K_j}}\right)\right) = \frac{c}{16\log D_{K_j}}. \tag{1.5}$$

2. Предположим, что $\zeta_{K_j}(s)$ имеет ноль Зигеля ρ. Из теоремы 1.2.2 мы видим, что существует квадратичное подполе k_j поля K_j такое, что $\zeta_{k_j}(\rho) = 0$. Применяя (1.3) и (1.4), мы получаем:

$$\varkappa_{K_j} = \frac{\varkappa_{K_j}}{\varkappa_{k_j}}\varkappa_{k_j} \geq \frac{c(1-\rho)}{(1-\rho)\left(\frac{e\log D_{k_j}}{4}\right)^2}\varkappa_{k_j} = \frac{16c}{e^2\log^2 D_{k_j}}\varkappa_{k_j}. \tag{1.6}$$

Если множество числовых полей K_j, для которых выполнен второй случай, конечно, то используя тот факт, что $\log D_{K_j} \to \infty$, мы получаем необходимую нижнюю оценку из (1.5).

Иначе, мы замечаем, что для числового поля существует не более одного исключительного нуля [61, лемма 3]. Значит, применяя это утверждение к полям k_j, мы находим, что лишь конечное число из них может быть изоморфно друг другу, а значит $D_{k_j} \to \infty$, когда $j \to \infty$. Теперь мы можем применить теорему Брауэра–Зигеля для квадратичных полей:

$$\frac{\log \varkappa_{k_j}}{\log D_{K_j}} \leq \frac{\log \varkappa_{k_j}}{\log D_{k_j}} \to 0.$$

Наконец, из (1.6) мы получаем:

$$\frac{\log \varkappa_{K_j}}{\log D_{K_j}} \geq \frac{16c}{e^2\log D_{K_j}} - 2\frac{\log\log D_{k_j}}{\log D_{K_j}} + \frac{\log \varkappa_{k_j}}{\log D_{K_j}} \to 0.$$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 1.2.4. Наше доказательство теоремы 1.1.1 дает эффективную оценку на BS, если все поля в семействе $\mathcal{K}$ не содержат квадратичных подполей, а значит соответствующие дзета-функции не имеют нулей Зигеля.

1.3 Доказательство теоремы 1.1.4

Напомним сначала некоторые конструкции, связанные с башнями полей классов. Зафиксируем простое число ℓ. Для конечно порожденной про-ℓ группы G положим $d(G) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(G, \mathbb{F}_\ell)$ — минимальное число образующих G. Пусть T — конечное множество идеалов числового поля K такое, что ни один из простых идеалов из T не делит ℓ. Обозначим через K_T максимальное ℓ-расширение K, не разветвленное вне $T, G_T = \mathrm{Gal}(K_T/K)$. Положим

$$\theta_{K,T} = \begin{cases} 1, & \text{если } T \neq \varnothing \text{ и } K \text{ содержит примитивный} \\ & \text{корень степени } \ell \text{ из единицы;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда имеет место утверждение [59, теоремы 1 и 5]:

Теорема 1.3.1. *Если $d(G_T) \geq 2 + 2\sqrt{r_1(K) + r_2(K) + \theta_{K,T}}$, то K_T является бесконечным расширением $\mathbb{Q}$.*

Для оценки $d(G_T)$ нам потребуется следующая теорема [48, §2]:

Теорема 1.3.2. *Пусть K/k — конечное расширение Галуа, $r_1 = r_1(k)$, $r_2 = r_2(k)$, ρ — число вещественных нормирований поля k, разветвленных в K, t — число простых из k, разветвленных в K. Положим $\delta_\ell = 1$, если k содержит примитивный корень степени ℓ из единицы и $\delta_\ell = 0$ иначе. Тогда имеет место оценка:*

$$d(G_T) \geq d(G_\varnothing) \geq t - r_1 - r_2 + \rho - \delta_\ell$$

Вычисления в числовых полях, использующихся для построения примеров в теореме 1.1.4, были в основном выполнены с использованием компьютерной системы PARI. Однако, мы бы хотели представить наши примеры в виде, подходящем для некомпьютерной проверки. Мы приводим здесь доказательство оценок из первой части теоремы, так как доказательство второй ее части состоит в применении тех же шагов, что приведены здесь, к другим расширениям полей.

Следующая конструкция взята из [20]. Положим $k = \mathbb{Q}(\xi)$, где ξ корень многочлена $f(x) = x^6 + x^4 - 4x^3 - 7x^2 - x + 1$. Тогда k — поле сигнатуры $(4, 1)$ с дискриминантом

$d_f = d_k = -23 \cdot 35509$. Его кольцо целых $\mathcal{O}_k = \mathbb{Z}[\xi]$, а его число классов идеалов равно 1. Главный идеал с нормой $7 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31$, порожденный $\eta = -671\xi^5 + 467\xi^4 - 994\xi^3 + 3360\xi^2 + 2314\xi - 961$ распадается в произведение восьми различных простых идеалов в $\mathcal{O}_k$. На самом деле, можно видеть, что $\eta = \pi_7\pi_{13}\pi_{19}\pi'_{19}\pi_{23}\pi'_{23}\pi_{29}\pi_{31}$, где

$$\pi_7 = -9\xi^5 + 6\xi^4 - 13\xi^3 + 44\xi^2 + 31\xi - 12,$$

$$\pi_{13} = -7\xi^5 + 5\xi^4 - 11\xi^3 + 36\xi^2 + 23\xi - 9,$$

$$\pi_{19} = 5\xi^5 - 4\xi^4 + 8\xi^3 - 26\xi^2 - 15\xi + 6,$$

$$\pi'_{19} = 5\xi^5 - 3\xi^4 + 7\xi^3 - 24\xi^2 - 20\xi + 6,$$

$$\pi_{23} = -5\xi^5 + 4\xi^4 - 8\xi^3 + 26\xi^2 + 15\xi - 9,$$

$$\pi'_{23} = 6\xi^5 - 4\xi^4 + 9\xi^3 - 30\xi^2 - 22\xi + 6,$$

$$\pi_{29} = 11\xi^5 - 8\xi^4 + 17\xi^3 - 56\xi^2 - 35\xi + 16,$$

$$\pi_{31} = 7\xi^5 - 5\xi^4 + 11\xi^3 - 36\xi^2 - 22\xi + 7.$$

$K = k(\sqrt{\eta})$ — вполне комплексное поле степени 12 над $\mathbb{Q}$ с относительным дискриминантом $\mathcal{D}_{K/k}$, равным (η), так как $\eta = \beta^2 + 4\gamma$, где $\beta = \xi^5 + \xi^4 + \xi^3 + 1$, $\gamma = -173\xi^5 + 112\xi^4 - 270\xi^3 + 815\xi^2 + 576\xi - 237$. Из этих вычислений мы видим, что $d_K = 7 \cdot 13 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 23^2 \cdot 35509^2$. Из теоремы 1.3.2 мы получаем, что

$$d(G_\varnothing) \geq t - r_1(k) - r_2(k) + \rho - 1 = 8 - 4 - 1 + 4 - 1 = 6.$$

Правая часть неравенства из теоремы 1.3.1 равна $2 + 2\sqrt{6} \approx 6.8989 < 7$, а значит нам достаточно показать, что $d(G_T) > d(G_\varnothing)$. Для этого мы строим множество простых идеалов T и расширение K, разветвленное точно в T.

Пусть $\pi_3 = -6\xi^5 + 4\xi^4 - 9\xi^3 + 30\xi^2 + 21\xi - 7$ — порождающий элемент простого идеала нормы 3 в $\mathcal{O}_k$, а T — множество, состоящее из простого идеала $\mathcal{O}_K$, лежащего над $\pi_3\mathcal{O}_k$. Можно видеть, что $\pi_3\pi_{19} = 11\xi^5 - 8\xi^4 + 17\xi^3 - 56\xi^2 - 35\xi + 14 = \rho^2 + 4\sigma$, где $\rho = \xi^5 + \xi^3 + \xi^2 + 1$, $\sigma = 2\xi^5 - 8\xi^4 - 14\xi^3 - 28\xi^2 - 9\xi + 5$, а значит $k(\sqrt{\pi_3\pi_{19}})/k$ разветвлено в точности в π_3 и в π_{19}. Но π_{19} является разветвленным в K, а значит $K(\sqrt{\pi_3\pi_{19}})/K$ разветвлено в точности в T. Таким образом, мы показали, что $d(G_T) \geq 7$ и расширение K_T/K бесконечно.

Для завершения доказательства теоремы нам понадобятся еще несколько результатов. Во-первых, напомним так называемое основное неравенство [67, теорема 3.1]:

Теорема 1.3.3. *Для асимптотически точного семейства в предположении GRH имеем:*
$$\sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + \phi_{\mathbb{R}}\left(\log 2\sqrt{2\pi} + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) + \phi_{\mathbb{C}}(\log 8\pi + \gamma) \le 1, \tag{1.7}$$
где q пробегает степени простых.

Во-вторых, следующий результат Хаджира [20, теорема 1]:

Теорема 1.3.4. *Пусть K — числовое поле степени n над $\mathbb{Q}$, такое что K_T бесконечно. Предположим, что $K_T = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$. Тогда*
$$\lim_{i\to\infty} \frac{g_i}{n_i} \le \frac{g_K}{n_K} + \frac{\sum_{\mathfrak{p}\in T} \log(N_{K/\mathbb{Q}}\mathfrak{p})}{2n_K}.$$

Для построенного нами поля K род равен $g_K \approx 25.3490\ldots$. Из теоремы 1.3.4 мы легко видим, что $\phi_{\mathbb{R}} = 0$ и $\frac{12}{2g_K + 2\log 3} \le \phi_{\mathbb{C}} \le \frac{12}{2g_K}$, т. е. $0.23669 < \phi_{\mathbb{C}} < 0.22687$. Нижняя граница для $\mathrm{BS}(K_T)$ очевидным образом равна
$$\mathrm{BS}_{\mathrm{lower}} = 1 - \phi_{\mathbb{R}} \log 2 - \phi_{\mathbb{C}} \log(2\pi) \le 0.56498\ldots.$$

Зная разложение в K малых простых из $\mathbb{Q}$, мы можем применить метод линейного программирования для получения верхней границы на $\mathrm{BS}(K_T)$. Это делается с использованием явной формулы для отношения Брауэра–Зигеля (1.1), основного неравенства (1.7) и неравенства
$$\sum_{m=1}^{\infty} m\phi_{p^m} \le \phi_{\mathbb{R}} + 2\phi_{\mathbb{C}}$$
в качестве ограничений. Это было сделано с использованием программы PARI. Так как вычисления весьма громоздки, мы приведем здесь лишь окончательный результат: $\mathrm{BS}_{\mathrm{upper}} \approx 0.59748\ldots$; граница достигается при $\phi_7 = \phi_9 = \phi_{13} = 0.03944\ldots, \phi_{19} = 0.01002\ldots$. $\square$

Глава 2

Логарифмическая производная дзета-функций в семействах глобальных полей (совместно с Ф. Лебаком)

2.1 Введение

Цель этой главы — доказать формулу для предела логарифмических производных дзета-функций в семействах глобальных полей (в предположении обобщенной гипотезы Римана в числовом случае) с явным остаточным членом. Этот результат близок по духу, одновременно к явным теоремам Брауэра–Зигеля и Мертенса из [43], а также к обобщенным теоремам Брауэра–Зигеля из главы 4 (где рассматривается исключительно функциональный случай). Мы также улучшаем остаточный член в явной теореме Брауэра–Зигеля из [43], если разрешить зависимость этого остаточного члена от рассматриваемого семейства глобальных полей.

В данной главе константы в O и $\ll$ абсолютные и эффективные (и, на самом деле, не очень большие). Пусть K — глобальное поле, то есть конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ или конечное расширение поля $\mathbb{F}_r(t)$, в последнем случае $K = \mathbb{F}_r(X)$ для гладкой абсолютно неприводимой проективной кривой X над полем $\mathbb{F}_r$, где $\mathbb{F}_r$ — конечное поле из

r элементов. Мы будем использовать сокращения NF и FF для обозначения утверждений, доказываемых в числовом и функциональном случаях соответственно. Мы будем опускать индекс K в наших обозначениях, если это не вызывает путаницы.

Для числового поля K обозначим через n_K и D_K его степень и дискриминант соответственно. Пусть g_K — род функционального поля K, т. е. род соответствующей гладкой проективной кривой; положим $g_K = \log\sqrt{D_K}$ в случае числового поля K. Пусть $\mathcal{P}(K)$ обозначает множество простых идеалов K. Положим $\Phi_q = \Phi_q(K)$ — число простых идеалов нормы q в K, т. е. $\Phi_q = |\{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}(K) | \mathrm{N}\mathfrak{p} = q\}|$. В числовом случае мы также вводим $\Phi_{\mathbb{R}} = r_1$ и $\Phi_{\mathbb{C}} = r_2$ — число вещественных и комплексных нормирований поля K соответственно.

Напомним, что дзета-функция глобального поля K определяется как

$$\zeta_K(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\Phi_q},$$

где произведение берется по всем степеням простых q. Обозначим через $Z_K(s) = -\sum\limits_q \frac{\Phi_q \log q}{q^s - 1}$ логарифмическую производную $\zeta_K(s)$. Известно, что $\zeta_K(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению, связывающему $\zeta_K(s)$ и $\zeta_K(1-s)$. Более того, в функциональном случае, $\zeta_K(s)$ — рациональная функция переменной $t = r^{-s}$. При этом

$$\zeta_K(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{g} (\pi_j t - 1)(\bar{\pi}_j t - 1)}{(1-t)(1-rt)}, \tag{2.1}$$

и $|\pi_j| = \sqrt{r}$ (гипотеза Римана). В оставшейся части этой главы мы предполагаем, что обобщенная гипотеза Римана (GRH) выполнена для дзета-функций числовых полей, то есть, что все нетривиальные нули $\zeta_K(s)$ лежат на прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Вот наши первые основные результаты в этой главе:

Теорема 2.1.1 (FF). *Для всякого функционального поля K, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \mathrm{Re}\,\epsilon > 0$, имеет место:*

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_K\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} = O\left(\frac{g_K}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1 + \frac{1}{\epsilon_0}\right)\right) + O\left(r^{\frac{N}{2}}\right).$$

Теорема 2.1.2 (NF, GRH). *Для любого числового поля K, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$, имеет место:*

$$\sum_{q \leq N} \frac{\Phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} + Z_K\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) + \frac{1}{\epsilon - \frac{1}{2}} =$$
$$= O\left(\frac{|\epsilon|^4 + |\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g + n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Объясним более подробно значение этих теорем. Ранее было известно (см. главу 4, а также ниже), что равенства в этих теоремах (без остаточных членов) верны в асимптотическом смысле (когда $N = \infty$ и $g = \infty$ для семейств глобальных полей). Наши теоремы дают эти результаты "на конечном уровне". Они позволяют оценить, насколько хорошо частичные суммы рядов для $Z_K(s)$ приближают эту функцию вне области сходимости этих рядов (они сходятся в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$), когда мы меняем K.

Мы доказываем эти теоремы в §2.2 и §2.3 соответственно. Оба доказательства основаны на явных формулах Вейля. Однако, в числовом случае аналитические трудности весьма впечатляющи, так что явную формулу приходится применять трижды с разным выбором тестовых функций. Заметим, что, как показано в замечаниях к соответствующим параграфам, в обоих случаях (в числовом и в функциональном) мы получаем новые доказательства основных неравенств из [65] и [67].

В наших следующих результатах рассматриваются семейства глобальных полей $\{K_i\}$ с растущим родом $g_i = g(K_i)$. Напомним ([66], [67]), что семейство глобальных полей называется асимптотически точным, если пределы

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(\{K_i\}) = \lim_{i \to \infty} \frac{\Phi_\alpha(K_i)}{g_i}$$

существуют для всех α, являющихся степенями r в функциональном случае и для всех степеней простых чисел и $\alpha = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ в числовом случае. Числа ϕ_α называются инвариантами Цфасмана–Влэдуца семейства $\{K_i\}$. С настоящего момента и до конца главы мы предполагаем, что все рассматриваемые семейства асимптотически точные.

Введем предельную дзета-функцию семейства $\{K_i\}$ как

$$\zeta_{\{K_i\}}(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\phi_q}.$$

Будем обозначать через $Z_{\{K_i\}}(s) = -\sum\limits_q \frac{\phi_q \log q}{q^s - 1}$ ее логарифмическую производную. Из основного неравенства (см. [65] и [67] или §2.2 и §2.3 этой главы) следует, что произведение и ряд сходятся абсолютно при $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2}$, а значит определяют аналитические функции для $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$.

Прежде всего, сформулируем следствие из теорем 2.1.1 и 2.1.2.

Следствие 2.1.3. *Для асимптотически точного семейства глобальных полей* $\{K_i\}$, *целого числа* $N \geq 10$ *и* $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ *такого, что* $\epsilon_0 = \mathrm{Re}\, \epsilon > 0$, *имеет место следующее:*

1. *в функциональном случае:*

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) = O\left(\frac{1}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1 + \frac{1}{\epsilon_0}\right)\right);$$

2. *в числовом случае в предположении GRH:*

$$\sum_{q \leq N} \frac{\phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) = O\left(\frac{(|\epsilon|^4 + |\epsilon|)\log^3 N}{\epsilon_0^2 N^{\epsilon_0}}\right).$$

Это следствие, в частности, влечет сходимость логарифмических производных дзета-функций глобальных полей к логарифмической производной предельной дзета-функции при $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Этот результат (без явного остаточного члена, но с гораздо более простым доказательством) получен также в главе 4.

Следующий наш результат связан с поведением $Z_{\{K_i\}}(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$.

Теорема 2.1.4. *Для асимптотически точного семейства глобальных полей* $\{K_i\}$ *существует число* $\delta > 0$, *зависящее от* $\{K_i\}$, *такое, что*

1. *в функциональном случае:*

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}} - 1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(r^{-\delta N});$$

2. *в числовом случае, в предположении GRH:*

$$\sum_{q \leq N} \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q} - 1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(N^{-\delta}).$$

Сформулируем следствие из этой теоремы, которое усиливает явную теорему Брауэра–Зигеля из [43]. Обозначим через $\varkappa_{K_i} = \mathrm{Res}_{s=1}\,\zeta_{K_i}(s)$ вычет $\zeta_{K_i}(s)$ в точке $s = 1$. Положим $\kappa = \kappa_{\{K_i\}} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{\log \varkappa_{K_i}}{g_i}$. Известно ([66] и [67]), что для асимптотически точного семейства этот предел существует и равен $\log \zeta_{\{K_i\}}(1)$ (мы предполагаем, что в числовом случае выполнена GRH). На самом деле, в случае числовых полей, этот результат может рассматриваться как обобщение классической теоремы Брауэра–Зигеля (см. [41]).

Следствие 2.1.5. *Для асимптотически точного семейства глобальных полей $\{K_i\}$ существует число $\delta > 0$, зависящее от $\{K_i\}$, такое что:*

1. *в функциональном случае:*

$$\sum_{f=1}^{N} \phi_{r^f} \log \frac{r^f}{r^f - 1} = \kappa + O\left(\frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)N}}\right);$$

2. *в предположении GRH в числовом случае:*

$$\sum_{q\le N} \phi_q \log \frac{q}{q-1} = \kappa + O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\delta}}\right).$$

Мы доказываем теорему 2.1.4, а также следствия 2.1.3 и 2.1.5 в §2.4.

2.2 Доказательство теоремы 2.1.1

Мы используем следующий аналог явной формулы Вейля для дзета-функций функциональных полей, см. [57] или [38] (в случае многообразий над конечными полями) для доказательства.

Теорема 2.2.1. *Для последовательности $v = (v_n)$ такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n r^{\frac{n}{2}}$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n r^{-\frac{n}{2}} \sum\limits_{m\mid n} m\Phi_{r^m}$ также сходится и имеет место следующее равенство:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n r^{-\frac{n}{2}} \sum_{f\mid n} f\Phi_{r^f} = \psi_v(r^{1/2}) + \psi_v(r^{-1/2}) - \sum_{j=1}^{g}\left(\psi_v\left(\frac{\pi_j}{\sqrt{r}}\right) + \psi_v\left(\frac{\bar{\pi}_j}{\sqrt{r}}\right)\right),$$

где $\pi_j, \bar{\pi}_j$ — числа, обратные к корням числителя дзета-функции K, $g = g_K$ и $\psi_v(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n t^n$.

Возьмем последовательность $v_n = v_n(N) = \frac{1}{r^{n\epsilon}}$, если $n \le N$ и 0 иначе. Подставляя ее в явную формулу, мы получаем $S_0(N,\epsilon) = S_1(N,\epsilon) + S_2(N,\epsilon) - S_3(N,\epsilon)$, где

$$S_0(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \sum_{f|n} f\Phi_{r^f},$$

$$S_1(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{n\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)},$$

$$S_2(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)},$$

$$S_3(N,\epsilon) = \sum_{j=1}^{g}\sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}(\pi_j^n + \bar{\pi}_j^n).$$

Оценим каждую из сумм S_i.

Оценка S_0:

Прежде всего, поменяем порядок суммирования в S_0:

$$S_0(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \sum_{f|n} f\Phi_{r^f} = \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \sum_{m=1}^{[N/f]} \frac{1}{r^{fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} R_0(N,\epsilon) &= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - S_0(N,\epsilon) \\ &= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \left(\frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - \sum_{m=1}^{[N/f]} r^{-fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \right) \\ &= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \sum_{m=[N/f]+1}^{\infty} r^{-fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}. \end{aligned}$$

Переходя к абсолютным величинам, можно предположить, что ϵ вещественно. Суммируя геометрическую прогрессию, мы получаем

$$0 \le \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - S_0(N,\epsilon) \le \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} r^{-\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)[N/f]f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1}.$$

Воспользуемся неравенством Вейля $f\Phi_{r^f} \le r^f + 1 + 2g\sqrt{r^f}$, а затем разделим сумму, рассматриваемую выше, на две части следующим образом. Для $f > [N/2]$ имеем $[N/f] = 1$, а для $f \le [N/2]$ мы используем неравенство $f[N/f] \ge N - f$.

$$
\begin{aligned}
|R_0(N,\epsilon)| &\le \sum_{f=1}^{N} \frac{\left(1+r^f+2g\sqrt{r^f}\right)}{r^{f\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)[N/f]}\left(r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1\right)} \\
&\le 8\sum_{f=1}^{[N/2]} \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)f}+2g\,r^{-f\epsilon}}{r^{(N-f)\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}} + 6\sum_{f>[N/2]}^{N} \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)f}+2g\,r^{-f\epsilon}}{r^{f\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}} \\
&\le \frac{6}{r^{N\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}}\sum_{f=1}^{[N/2]}(r^f+2\,g\,r^{\frac{f}{2}}) + 6\sum_{f>[N/2]}(r^{-2\epsilon f}+2\,g\,r^{-\left(\frac{1}{2}+2\epsilon\right)f}) \\
&\le \frac{6}{r^{N\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}}\left(\frac{r^{\frac{N}{2}+1}-r}{r-1}+2g\frac{r^{\frac{N}{4}+\frac{1}{2}}-r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}-1}\right) \\
&\quad +\frac{6r^{-\epsilon N}}{1-r^{-2\epsilon}}+\frac{12gr^{-\frac{N}{4}-\epsilon N}}{1-r^{-\frac{1}{2}-2\epsilon}} \\
&\le \frac{48}{r^{\epsilon N}}\left(2gr^{-\frac{N}{4}}+\frac{1}{r^{\epsilon}-1}+1\right) \le \frac{96}{r^{\epsilon N}}\left(g\,r^{-\frac{N}{4}}+\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\right).
\end{aligned}
$$

Оценка S_1:

$$
0 \le |S_1(N,\epsilon)| \le r^{\frac{1}{2}-\epsilon_0}\cdot\frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon_0\right)N}-1}{r^{\frac{1}{2}-\epsilon_0}-1} \le 4r^{N/2},
$$

так как функция $t \mapsto t\cdot\frac{t^N-1}{t-1}$ возрастает и непрерывна.

Оценка S_2:

$$
0 \le |S_2(N,\epsilon)| \le \frac{1-r^{-\left(\frac{1}{2}+\epsilon_0\right)N}}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}-1} \le 4.
$$

Оценка S_3:

$$
\begin{aligned}
R_3(N,\epsilon) &= S_3(N,\epsilon) - \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j}+\frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar{\pi}_j}\right) \\
&= -\sum_{j=1}^{g}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n+\left(\frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Абсолютное значение правой части этого равенства может быть оценено, используя тот факт, что $|\pi_j| \le r^{\frac{1}{2}}$:

$$
|R_3(N,\epsilon)| = \left|\sum_{j=1}^{g}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n+\left(\frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n\right| \le 2g\,\frac{r^{-N\epsilon_0}}{r^{\epsilon_0}-1} \le 4g\,\frac{r^{-N\epsilon_0}}{\epsilon_0}.
$$

Из формулы (2.1) для $\zeta_K(s)$, выражающей ее как рациональную функцию переменной $t = r^{-s}$, легко выводится следующее выражение для ее логарифмической производной:

$$\frac{1}{\log r} \cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) = -\frac{1}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} - \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar{\pi}_j}\right).$$

Объединяя все эти вычисления, мы получаем утверждение теоремы. □

Замечание 2.2.2. Используя нашу теорему, несложно получить новое доказательство основного неравенства из [66]. Возьмем вещественное $\epsilon < \frac{1}{4}$ и заметим, что

$$\frac{1}{\log r} \cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + g = \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar{\pi}_j} + 1\right) \geq 0,$$

так как

$$\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar{\pi}_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar{\pi}_j} + 1 = \frac{r^{1+2\epsilon}-|\pi_j|^2}{(r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j)(r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar{\pi}_j)} \geq 0.$$

Из теоремы мы получаем, что

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{r^f}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} \leq g + O\left(\frac{g}{\epsilon r^{\epsilon N}}\right) + O(r^{\frac{N}{2}}).$$

Разделим обе части неравенства на g. Затем, сначала устремим $g \to \infty$ (меняя K), затем берем предел, когда $N \to \infty$ и, наконец, рассмотрим предел, когда $\epsilon \to 0$. Произведя все это, мы получим основное неравенство из [65]:

$$\sum_{f=1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}}-1} \leq 1.$$

2.3 Доказательство теоремы 2.1.2

Нашей отправной точкой будет явная формула Вейля, доказательство которой может быть найдено в [53] или в [41, глава XVII] (с несколько более общими предположениями на тестовые функции).

Рассмотрим класс (W) четных вещественно-значных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1. существует $\epsilon > 0$ такое, что $\int_0^\infty F(x)e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x}\,dx$ сходится в смысле Коши;

2. существует $\epsilon > 0$ такое, что $F(x)e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x}$ имеет ограниченную вариацию;

3. $\frac{F(0)-F(x)}{x}$ имеет ограниченную вариацию;

4. для всех x имеем $F(x) = \frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$.

Для такой функции F определим

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{(s-\frac{1}{2})x}\,dx. \tag{2.2}$$

Явная формула Вейля для дзета-функции Дедекинда числовых полей — это следующее утверждение:

Теорема 2.3.1 (Вейль). *Пусть K — числовое поле. Пусть F — функция принадлежащая классу (W) и пусть $\phi(s)$ определена из (2.2). Тогда сумма $\sum\limits_{|\operatorname{Im}\rho|<T} \phi(\rho)$, где ρ пробегает нетривиальные нули дзета-функции Дедекинда поля K, сходится при $T \to \infty$ и имеет место следующая формула для предела $\sum\limits_{\rho} \phi(\rho)$:*

$$\sum_{\rho} \phi(\rho) = F(0)\left(2g - n(\gamma + \log 8\pi) - r_1\frac{\pi}{2}\right) + 4\int_0^\infty F(x)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+ r_1\int_0^\infty \frac{F(0)-F(x)}{2\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}\,dx + n\int_0^\infty \frac{F(0)-F(x)}{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}\,dx - 2\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{m}{2}}} F(m\log \mathrm{N}\mathfrak{p}), \tag{2.3}$$

где последняя сумма берется по всем простым идеалам $\mathfrak{p}$ поля K и всем натуральным числам $m \geq 1$.

Прежде всего, заметим, что, если задана комплексно-значная функция $F(x)$, такая, что вещественная и мнимая ее части $F_0(x)$ и $F_1(x)$ четны и принадлежат классу (W), то можно применить формулу (2.3) отдельно к $F_0(x)$ и к $F_1(x)$. Таким образом, из линейности (2.3) по тестовой функции, мы заключаем, что явная формула применима к исходной комплексно-значной функции $F(x)$.

Применим явную формулу к функции, определенной следующим образом:

$$F_{N,\epsilon}(x) = \begin{cases} e^{-\epsilon|x|} & \text{если } |x| < \log(N+\frac{1}{2}), \\ 0 & \text{если } |x| > \log(N+\frac{1}{2}) \end{cases}$$

(здесь мы взяли $N + \frac{1}{2}$, чтобы избежать взятия некоторых членов с множителем $\frac{1}{2}$).

Теперь оценим каждый член в (2.3).

2.3.1 Сумма по простым

$$\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{m}{2}}} F_{N,\epsilon}(m \log \mathrm{N}\mathfrak{p}) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^m \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}$$
$$= \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} - \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \sum_{m > \frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}.$$

Требуется оценить сумму:

$$\Delta(N,\epsilon) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \sum_{m > \frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}.$$

Переходя к абсолютным значениям, мы можем считать, что ϵ вещественно. Суммируя геометрическую прогрессию, мы получаем:

$$\Delta(N,\epsilon) \le (2+\sqrt{2}) \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)([\frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}]+1)}}$$

(так как $(1-\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-1/2-\epsilon})^{-1} \le (1-2^{-1/2})^{-1} \le \sqrt{2}(1+\sqrt{2})$).

Разделим нашу сумму на две части, в соответствии с тем $\mathrm{N}\mathfrak{p} > \sqrt{N}$ или нет. Принимая во внимание тот факт, что $\log \mathrm{N}\mathfrak{p}[\log N/\log \mathrm{N}\mathfrak{p}] \ge \log N - \log \mathrm{N}\mathfrak{p}$, если $\log \mathrm{N}\mathfrak{p} \le [\log \sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}]$, мы получаем:

$$\Delta(N,\epsilon) \le (2+\sqrt{2}) \left(\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le \sqrt{N}} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{e^{\log \mathrm{N}(\frac{1}{2}+\epsilon)}} + \sum_{\sqrt{N} < \mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(1+2\epsilon)}} \right).$$

Запишем

$$\Delta_1(N,\epsilon) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le \sqrt{N}} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{e^{\log \mathrm{N}(\frac{1}{2}+\epsilon)}},$$

$$\Delta_2(N,\epsilon) = \sum_{\sqrt{N} < \mathrm{N}\mathfrak{p} \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(1+2\epsilon)}}.$$

Для $\Delta_1(N,\epsilon)$ имеем:

$$\Delta_1(N,\epsilon) \le \frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}.$$

Последняя сумма может быть оценена с использованием результатов Лагариаса и Одлыжко (которые используют GRH, см. [39, теорема 9.1]):

$$\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \le \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \le \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^k \le \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} = \sqrt{N} + O(N^{\frac{1}{4}} \log N(g + n\log N))$$

с эффективно вычислимой абсолютной постоянной в O. Мы получаем:

$$\Delta_1(N,\epsilon) \le \frac{2+\sqrt{2}}{N^\epsilon} + a_0 \frac{g\log N + n\log^2 N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}}.$$

Сумма $\Delta_2(N,\epsilon)$ может быть оценена так:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \le \int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log t}{t^{1+2\epsilon}}\, d\pi(t),$$

где $\pi(t)$ — функция, считающая простые: $\pi(t) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le t} 1$. Как и раньше, из результатов Лагариаса и Одлыжко следует, что $\pi(t) = \int_2^t \frac{dx}{\log x} + \delta(t)$, причем $|\delta(t)| \le a_1\sqrt{t}(g+n\log t)$. Подставляя, мы получим:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \le \int_{\sqrt{N}}^{\infty} t^{-1-2\epsilon}\, dt + 2|\delta(\sqrt{N})|\frac{\log N}{N^{\frac{1}{2}+\epsilon}} + \left|\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \delta(t)\frac{1-(1+2\epsilon)\log t}{t^{2+2\epsilon}}\, dt\right|.$$

Отсюда мы выводим, что

$$\Delta_2(N,\epsilon) \le \frac{1}{2\epsilon N^\epsilon} + 2a_1(g+n\log N)\frac{\log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1(g+n\log t)\frac{|1-(1+2\epsilon)\log t|}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt.$$

Для $N \ge 8$ имеем:

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1(g+n\log t)\frac{|1-(1+2\epsilon)\log t|}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt \le \int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1(g+n\log t)\frac{(1+2\epsilon)\log t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt.$$

Интегрируя по частям, можно найти, что

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt = \frac{\log N}{2(\frac{1}{2}+2\epsilon)N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+2\epsilon)^2 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}},$$

и

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log^2 t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt = \frac{\log^2 N}{4(\frac{1}{2}+2\epsilon)N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{\log N}{2(\frac{1}{2}+2\epsilon)^2 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+2\epsilon)^3 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}}.$$

Мы заключаем, что выполнена следующая оценка:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \le \frac{1}{2\epsilon N^\epsilon} + a_2\left(\frac{n\log^2 N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{g\log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}}\right).$$

Объединяя все вместе, мы получаем:

$$|\Delta(N,\epsilon)| \ll \frac{1}{\epsilon_0 N^{\epsilon_0}} + \frac{\log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon_0}}(n\log N + g). \tag{2.4}$$

2.3.2 Архимедовы члены

Прежде всего,

$$\left|\int_0^\infty F_{N,\epsilon}(x)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx\right| \le \int_0^{\log(N+\frac{1}{2})} e^{(\frac{1}{2}-\epsilon_0)x}\,dx = \frac{(N+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}-\epsilon_0}-1}{\frac{1}{2}-\epsilon_0} \ll \sqrt{N}. \tag{2.5}$$

Положим

$$I_{N,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-F_{N,\epsilon}(x)}{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}\,dx$$

и

$$I_{\infty,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\epsilon x}}{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}\,dx.$$

Для $N \ge 4$ имеем:

$$|I_{\infty,\epsilon} - I_{N,\epsilon}| \le \int_{\log N}^\infty \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}\,dx \le \frac{4}{\sqrt{N}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} I_{\infty,\epsilon} &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x}}{1-e^{-x}}\right)dx \\ &= \int_0^\infty \left(\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}\right) + \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x}}{1-e^{-x}}\right)\right)dx \\ &= \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

так как

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{x} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)dt.$$

Второй интеграл

$$J_{N,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-F_{N,\epsilon}(x)}{2\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}\,dx$$

оценивается сходным образом, используя значение интеграла из [18, 3.541] :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\epsilon x}}{\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}\,dx = \psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Принимая во внимание, что $\psi(2x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x)+\psi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)+\log 2$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned} J_{N,\epsilon} &= \frac{\pi}{2} + \log 2 + \psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \\ I_{N,\epsilon} &= \gamma + \log 4 + \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

2.3.3 Сумма по нулям: главный член

Оценим теперь сумму $\sum\limits_{\rho} \phi(\rho)$ по нулям $\zeta_K(s)$. Пусть $\rho = \frac{1}{2} + it$ — ноль дзета-функции поля K на критической прямой. Положим $y = \log(N + \frac{1}{2})$. Имеем:

$$\phi(\rho) = \int_{-y}^{y} e^{-\epsilon|x|+itx}\,dx = \int_{0}^{y} e^{(-\epsilon+it)x}\,dx + \int_{0}^{y} e^{(-\epsilon-it)x}\,dx,$$

так что

$$\phi(\rho) = \frac{2}{\epsilon^2+t^2}(\epsilon + e^{-\epsilon y}(-\epsilon\cos(ty) + t\sin(ty))).$$

Разделим сумму по ρ на три части:

$$S_1(\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2};$$
$$S_2(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2};$$
$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{t\sin(ty)}{\epsilon^2+t^2};$$

так что

$$\sum_{\rho} \phi(\rho) = 2S_1(\epsilon) - 2\epsilon e^{-\epsilon y} S_2(y,\epsilon) + 2e^{-\epsilon y} S_3(y,\epsilon).$$

Сумма $S_1(\epsilon)$ может быть выражена через $Z_K(s)$, логарифмическую производную $\zeta_K(s)$. Формула Старка (см. [61, (9)]) дает нам, что

$$\sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + g - \frac{n}{2}\log\pi + \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{s}{2}\right) + r_2(\psi(s) - \log 2) + Z_K(s), \tag{2.7}$$

где, как и раньше, $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$. Подставляя $s = \frac{1}{2} + \epsilon$, мы получаем:

$$\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2} = \frac{1}{\epsilon-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon+\frac{1}{2}} + g - \frac{n}{2}\log\pi - r_2\log 2$$
$$+ \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) + r_2\psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right). \tag{2.8}$$

Заметим, что архимедовы слагаемые из формулы Старка и изначальной явной формулы Вейля сокращаются друг с другом. Таким образом, остается доказать, что суммы $S_2(y,\epsilon)$ и $S_3(y,\epsilon)$ достаточно малы.

2.3.4 Сумма по нулям: остаточный член.

Для оценки

$$S_2(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2}$$

мы возьмем модуль всех членов суммы, так что

$$|S_2(y,\epsilon)| \le \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{1}{|\epsilon^2+t^2|} \le \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{n(j)}{\epsilon_0^2+(t-|\epsilon_1|)^2}, \tag{2.9}$$

где $n(j)$ — число нулей, удовлетворяющих $|t-j|<1$. Стандартная оценка из [39, лемма 5.4] дает $n(j) \ll g + n\log(j+2)$, а значит

$$\begin{aligned}|S_2(y,\epsilon)| &\ll \frac{g+n\log(|\epsilon_1|+2)}{\epsilon_0^2} + g + n\sum_{j=1}^{|\epsilon_1|+1} \frac{\log j}{|\epsilon_1|+2-j} + g + n\log(|\epsilon_1|+2) \\ &\ll (g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right).\end{aligned}$$

Оценим, наконец, сумму

$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{t\sin(ty)}{\epsilon^2+t^2}.$$

Имеем

$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\sin ty}{t} - \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon^2\sin(ty)}{t(\epsilon^2+t^2)} = A(y) - B(y,\epsilon).$$

Ряд для формальной производной $B(y,\epsilon)$ по y имеет следующий вид:

$$\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon^2\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2}.$$

Используя оценку для $S_2(y,\epsilon)$, мы заключаем, что на всяком компактном подмножестве $[0,+\infty)$ этот ряд абсолютно и равномерно сходится к $B'(y)$, и мы имеем $|B'(y,\epsilon)| \ll |\epsilon|^2(g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right)$. Отсюда следует, что $|B(y)| \ll y|\epsilon|^2(g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right)$, ибо $B(0,\epsilon)=0$.

2.3.5 Сумма по нулям: трудная часть.

Нам осталось оценить член $A(y)$.

Напомним частный случай явной формулы Вейля, доказанный Ландау [40]:

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = x - \Psi(x) - r\log x - b - \frac{r_1}{2}\log(1-x^{-2}) - r_2\log(1-x^{-1}), \tag{2.10}$$

где $\Psi(x) = \sum\limits_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^k \le x} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}$, b — постоянный член в разложении $Z_K(s)$ в ряд Тейлора в 0, $r = r_1 + r_2 - 1$ и x не является степенью простого. Эта формула приводится в [40] для $x \ge \frac{3}{2}$, однако, применяя теорему 2.3.1 к функции

$$F_x(y) = \begin{cases} e^{|y|/2} & \text{при } |y| < \log x, \\ 0 & \text{при } |y| > \log x, \end{cases}$$

можно видеть, что формула остается верной для всех $x > 1$. Отметим также, что эффективная версия теоремы о простых идеалах [39, теорема 9.1] влечет следующую оценку:

$$\Psi(x) - x = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x (g + n\log x)\right). \tag{2.11}$$

Введем $C(x) = \sum\limits_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}$, $D(x) = \sum\limits_{\rho \ne \frac{1}{2}} \frac{x^\rho}{\rho - \frac{1}{2}}$ и $E(x) = D(x) - C(x)$. Из (2.10) и (2.11) мы видим, что $C(x)$ интегрируема на компактных подмножествах $(1, +\infty)$. Используя рассуждения, похожие на те, что применялись в прошлом параграфе, можно получить, что ряд для $E(x)$ абсолютно и равномерно сходится на компактных подмножествах $[1, +\infty)$, а значит $E(x)$ непрерывна на этом интервале. Из всего этого мы заключаем, что ряд для $D(x)$ также сходится к локально интегрируемой функции.

Если положить $x = e^y$, то мы получим

$$\operatorname{Re} D(e^y) = e^{\frac{y}{2}} \sum_{\rho \ne \frac{1}{2}} \frac{\sin(ty)}{t},$$

что равно $e^{\frac{y}{2}} A(y)$ с точностью до члена, соответствующего возможному нулю $\zeta_K(s)$ в точке $\rho = \frac{1}{2}$.

Так как ряд для $C(x)$ не является равномерно сходящимся, то нам придется работать с распределениями, определяемыми $C(x), D(x)$ и $E(x)$. Основные понятия и результаты, используемые здесь, могут быть почерпнуты из [55]. Из того факта, что сходящийся ряд распределений можно дифференцировать почленно, мы заключаем, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{d}{dx}\frac{E(x)}{\sqrt{x}} = \frac{C(x)}{2\sqrt{x^3}}.$$

Применим (2.10) к правой части этой формулы и проинтегрируем от $1+\delta$ до x (здесь $\delta > 0$). Полученное равенство будет верно в смысле распределений, а значит почти всюду для локально интегрируемых функций, определяющих эти распределения. Так как функция $E(x)$ непрерывна, то мы видим, что получающееся тождество

$$\frac{E(x)}{\sqrt{x}} = E(1+\delta) + \int_{1+\delta}^{x} \frac{t-\Psi(t)}{2t^{\frac{3}{2}}}\,dt - r\int_{1+\delta}^{x} \frac{\log t}{2t^{\frac{3}{2}}}\,dt \\ - \int_{1+\delta}^{x} \frac{b}{2t^{\frac{3}{2}}}\,dt - \frac{r_1}{2}\int_{1+\delta}^{x} \frac{\log(1-t^{-2})}{2t^{\frac{3}{2}}}\,dt - r_2\int_{1+\delta}^{x} \frac{\log(1-t^{-1})}{2t^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

на самом деле имеет место поточечно на $[1+\delta, +\infty)$. Для оценки $t-\Psi(t)$ воспользуемся (2.11). Легко видеть, что все интегралы сходятся, когда $\delta \to 0$. Из [40, 10.RH] следует, что $b \ll g+n$.

$$E(1) = \sum_{\rho\neq\frac{1}{2}} \frac{1}{\rho-\frac{1}{2}} - \sum_{\rho}\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2}\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{1}{\frac{1}{4}+t^2},$$

где первая сумма равна нулю, так как члены с ρ и $1-\rho$ сокращаются друг с другом. Последняя сумма может быть оценена с использованием (2.9). Это дает $|E(1)| \ll g+n$. Соединяя все воедино, мы видим, что $|E(x)| \ll \sqrt{x}\log^2 x(g+n\log x)$. Оценка $|C(x)| \ll \sqrt{x}\log^2 x(n+g)$ может быть получена непосредственно с использованием (2.11). Таким образом, мы заключаем, что $|A(y)| \ll y^2(g+ny)$.

Объединяя все вместе, мы получаем:

$$\sum_{\rho}\phi(\rho) = 2S_1(\epsilon) + O\left(\frac{|\epsilon|^4+|\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g+n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right).$$

Эта оценка вместе с (2.4), (2.5), (2.6) и (2.8) завершает доказательство теоремы. □

Замечание 2.3.2. Используя нашу теорему, мы можем передоказать основное неравенство из [67]. Действительно, применим формулу (2.8), чтобы выразить $Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)$ через $\sum\limits_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2}$, плюс некоторые архимедовы члены. Для вещественного положительного $\epsilon < \frac{1}{4}$ последняя сумма неотрицательна, а значит

$$\sum_{q\leq N} \frac{\Phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \frac{n}{2}\log\pi + r_2\log 2 - \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - r_2\psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) \\ \leq g + O\left((g+n\log N)\frac{\log^2 N}{\epsilon N^{\epsilon}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Теперь разделим на g и устремим $g \to \infty$ (меняя K). Затем перейдем к пределу, когда $N \to \infty$ и, наконец, возьмем предел, когда $\epsilon \to 0$. Принимая во внимание тот факт, что $\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2$ и $\psi(\frac{1}{4}) = -\frac{\pi}{2} - \gamma - 3\log 2$, мы получаем основное неравенство из [65]:

$$\sum_q \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q}-1} + \phi_{\mathbb{R}} \left(\log(2\sqrt{2\pi}) + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2} \right) + \phi_{\mathbb{C}} \left(\log(8\pi) + \gamma \right) \leq 1.$$

Замечание 2.3.3. Выбор тестовой функции $F_{N,\epsilon}(x)$ в явной формуле Вейля неслучаен. Действительно, получающиеся формулы "приближают" формулу Старка (2.7), когда $N \to \infty$.

2.4 Доказательство теоремы 2.1.4 и следствий

Мы проведем доказательства в функциональном случае, так как вычисления в случае числовых полей абсолютно такие же.

Доказательство следствия 2.1.3: Предположим сначала, что $\epsilon \neq \frac{1}{2} + \frac{2\pi i k}{\log r}$, $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что

$$\left| \sum_{f=1}^{\infty} \frac{f\phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + \frac{1}{g_j \log r} Z_{K_j} \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} \right| + \sum_{f=1}^{N} \frac{f \left| \frac{\Phi_{rf}}{g_j} - \phi_{rf} \right|}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1}$$

$$+ \frac{1}{g_j} \left| \sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + \frac{1}{\log r} Z_{K_j} \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \right|.$$

Взяв $\delta > 0$, выберем целое число N такое, что первая сумма меньше δ (это возможно, благодаря основному неравенству) и такое, что $\frac{1}{r^{\epsilon_0 N}} \left(1 + \frac{1}{\epsilon_0} \right) \leq \delta$. Теперь, выбирая g достаточно большим и используя теорему 2.1.1, а также сходимость $\frac{\Phi_{rf}}{g_j}$ к ϕ_{rf}, мы заключаем, что вся сумма $\ll \delta$. Значит, мы выводим, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{Z_{K_j}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}{g_j} = Z_{\{K_j\}} \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right). \tag{2.12}$$

Теперь следствие немедленно вытекает из теоремы 2.1.1 и (2.12). Хотя изначально мы предположили, что $\epsilon \neq \frac{1}{2} + \frac{2\pi i k}{\log r}$, утверждение имеет место и при $\epsilon = \frac{1}{2} + \frac{2\pi i k}{\log r}$, так как все функции непрерывны (и даже аналитичны) при $\operatorname{Re} \epsilon > 0$. $\square$

Замечание 2.4.1. Формула (2.12) становится неверной при $\epsilon = 0$, что может быть увидено из равенства $Z_K\left(\frac{1}{2}\right) = g_K - 1$. На самом деле, равенство в (2.12) имеет место тогда и только тогда, когда семейство является асимптотически оптимальным. Вопрос о том, выполняется ли подобное равенство для $\log \zeta_K(s)$, а не для его производной, кажется весьма трудным. Даже для квадратичных полей он совершенно неочевиден. Известно, что в числовом случае существует последовательность (d_i) чисел из $\mathbb{N}$, плотности не меньшей $\frac{1}{2}$, такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})}(\frac{1}{2})}{\log d_i} = 0$$

(см. [31]). Техника вычисления сглаженных моментов L-функций Дирихле, используемая в работе [31], весьма трудна. В общем случае можно доказать верхнюю границу для предела (см. главу 4 для функционального случая). Это аналог так называемого "легкого" неравенства из классической теоремы Брауэра–Зигеля.

Интерес к изучению поведения $\log \zeta_K\left(\frac{1}{2}\right)$ может быть, в некоторой степени, объяснен связью этого вопроса с вопросом об асимптотическом поведении порядка группы Шафаревича–Тейта и регулятора для постоянных суперсингулярных эллиптических кривых над функциональными полями. Такая связь имеет место благодаря гипотезе Берча–Свиннертона-Дайера. В общем случае, аналогичный вопрос может быть задан о поведении этих инвариантов в произвольных семействах эллиптических кривых. Некоторое обсуждение этой проблемы присутствует в [36] (заметим, однако, что доказательство основного результата этой статьи не может быть признано верным, так как перестановка предельных переходов, являющаяся ключевым моментом доказательства, не обоснована).

Доказательство теоремы 2.1.4: Из основного неравенства следует, что ряд, определяющий $\log \zeta_{\{K_i\}}(s)$, сходится абсолютно при $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2}$. Функция $\log \zeta_{\{K_i\}}(s)$ имеет разложение в ряд Дирихле с положительными коэффициентами, сходящийся при $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2}$. Значит, из стандартного утверждения про ряды Дирихле (см. [30, лемма 5.56]), этот ряд должен сходиться в некоторой открытой области $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2} - \delta_0$ для $\delta_0 > 0$, определяя в ней аналитическую функцию. Следовательно, в той же области ряд для $Z_{\{K_i\}}(s)$

сходится. Выбирая произвольное δ такое, что $0 < \delta < \delta_0$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}}-1} - \frac{1}{\log r} Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f}-1} \cdot \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f}-1}{r^{\frac{f}{2}}-1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{f=1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f}-1}\right| \cdot \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)N}-1}{r^{\frac{N}{2}}-1} = O(r^{-\delta N}).\end{aligned}$$

Это и дает требуемый результат. □

Доказательство следствия 2.1.5*:* Мы используем теорему 2.1.4 для получения нужной оценки, применяя тот же метод, что и при доказательстве самой теоремы 2.1.4. Используя теорему Брауэра–Зигеля для функциональных полей для получения значения κ, мы имеем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{f=1}^{N} \phi_{r^f} \log \frac{r^f}{r^f-1} - \kappa\right| &= \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}}-1} \cdot (r^{\frac{f}{2}}-1) \cdot \log \frac{r^f}{r^f-1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}}-1}\right| \cdot (r^{\frac{N}{2}}-1) \cdot \log \frac{r^N}{r^N-1} \\ &= O(r^{-\delta N}) \cdot O\left(r^{-\frac{N}{2}}\right).\end{aligned}$$

Действительно, функция $N \mapsto (r^{\frac{N}{2}}-1) \log \frac{r^N}{r^N-1}$ не возрастает при $N \geq 2$, откуда и получается требуемая оценка. □

Замечание 2.4.2*.* Наш метод дает простое и концептуальное доказательство явной версии теоремы Брауэра–Зигеля из [43] (утверждение которой, грубо говоря, является утверждением следствия 2.1.5 с $\delta = 0$). Это показывает, что остаточный член в явной теореме Брауэра–Зигеля, в сущности, зависит от того, как далеко влево аналитична функция $\zeta_{\{K_i\}}(s)$. В числовом случае наше следствие дает оценку остаточного члена, лучшую, чем в [43] на $\log^2 N$.

Глава 3

Равномерное распределение нулей L-функций модулярных форм

3.1 Введение

Хорошо известно, что нули L-функций содержат важную информацию об арифметических свойствах объектов, с которыми эти L-функции ассоциированы. Вопрос о распределении этих нулей на критической прямой изучался многими авторами. Проблема может рассматриваться с различных точек зрения: пропорция нулей на критической прямой, низколежащие нули, расстояние между нулями и т. д.

В этой главе мы изучаем распределение нулей L-функций на критической прямой при изменении модулярной формы, с которой эта L-функция ассоциирована. Похожий вопрос рассматривался С. Ленгом [40] и М. А. Цфасманом, С. Г. Влэдуцем [67] для дзета-функции Дедекинда числовых полей.

Пусть $f(z)$ — параболическая форма веса $k = k_f$ относительно группы $\Gamma_0(N)$, так что $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{(k-1)/2} e^{2\pi i n z}$ — ее разложение Фурье в параболической точке ∞. Предположим, что $f(z)$ является примитивной формой в смысле Аткина–Ленера [1]. Тогда L-функция $L_f(s)$ может быть определена с помощью Эйлеровского произведения

$$L_f(s) = \prod_{p|N} (1 - a_p p^{-s})^{-1} \prod_{p\nmid N} (1 - a_p p^{-s} + p^{-2s})^{-1}.$$

Обозначим через α_p и $\bar{\alpha}_p$ два комплексно сопряженных корня многочлена $1 - a_p p^{-s} + p^{-2s}$. Делинь показал [8], что $|\alpha_p| = |\bar{\alpha}_p| = 1$ для $p \nmid N$ (гипотеза Рамануджана–

Петерсона). С другой стороны, известно [1], что для $p \mid N$ имеет место неравенство $|a_p| \le 1$.

Определим гамма-множитель

$$\gamma_f(s) = \pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+(k-1)/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+(k+1)/2}{2}\right) = c_k(2\pi)^{-s}\Gamma\left(s+\frac{k-1}{2}\right),$$

где $c_k = 2^{(3-k)/2}\sqrt{\pi}$. Функция $\Lambda(s) = N^{s/2}\gamma_f(s)L_f(s)$ является целой и удовлетворяет функциональному уравнению $\Lambda(s) = w\Lambda(1-s)$, где $w = \pm 1$. Обобщенная гипотеза Римана (GRH) для L-функций модулярных форм утверждает, что все нетривиальные нули этих L-функций лежат на критической прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. В этой главе мы предполагаем что GRH выполняется для L-функций модулярных форм.

Аналитический кондуктор q_f (см. [30]) определяется как

$$q_f = N\left(\frac{k-1}{2}+3\right)\left(\frac{k+1}{2}+3\right) \sim \frac{Nk^2}{4},$$

когда $k \to \infty$. Мы используем это последнее выражение (или, более точно, его логарифм за вычетом константы) как вес во всех суммах по нулям в этой главе.

С каждой примитивной формой $f(z)$ можно ассоциировать меру

$$\Delta_f := \frac{2\pi}{\log q_f} \sum_{L_f(\rho)=0} \delta_{t(\rho)},$$

где $t(\rho) = \frac{1}{i}\left(\rho - \frac{1}{2}\right)$, а ρ пробегает все нетривиальные нули $L_f(s)$; здесь δ_a обозначает атомарную меру (меру Дирака), сосредоточенную в a. Так как мы предполагаем, что выполнена GRH, то Δ_f — дискретная мера на $\mathbb{R}$. Более того, несложно видеть, что Δ_f — мера медленного роста (см. §3.2).

Основной результат этой главы следующий:

Теорема 3.1.1. *В предположении GRH, для любого семейства $\{f_j(z)\}$ примитивных форм с $q_{f_j} \to \infty$ предел*

$$\Delta = \lim_{j\to\infty} \Delta_j = \lim_{j\to\infty} \Delta_{f_j}$$

существует в пространстве мер медленного роста на $\mathbb{R}$ и равен мере с плотностью 1 *(т. е. dx).*

3.2 Доказательство теоремы 3.1.1

Наш метод доказательства похож на используемый в [67], где подобный вопрос рассматривается в случае дзета-функций Дедекинда. В нашем случае детали даже упрощаются, так как рассматриваемое семейство является “асимптотически плохим”.

Напомним некоторые факты и определения из теории распределений. Мы будем использовать [55] как основной источник для ссылок. Напомним, что пространства Шварца $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ — это пространство вещественно-значных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, быстро убывающих на бесконечности (т. е. $\phi(x)$ и все ее производные стремятся к нулю, когда $|x| \to \infty$, быстрее, чем любая степень $|x|$). Пространство $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ определяется как пространство всех вещественно-значных бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем на $\mathbb{R}$. Оба пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ имеют структуру топологических векторных пространств.

Пространство $\mathcal{D}'$ (соответственно, $\mathcal{S}'$), топологически двойственное к $\mathcal{D}$ (соответственно, к $\mathcal{S}$) называется пространством распределений (соответственно, умеренных распределений). Мы определяем пространство мер $\mathcal{M}$ как топологически двойственное к пространству вещественно-значных непрерывных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{M}$ содержит конус положительных мер $\mathcal{M}_+$, т. е. мер, принимающих положительные значения на положительных функциях. Имеют место следующие включения: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ и $\mathcal{M}_+ \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{D}'$. Пересечение $\mathcal{M}_{sl} = \mathcal{M} \cap \mathcal{S}'$ называется пространством мер медленного роста. Мера μ медленного роста может быть охарактеризована следующим свойством: для всякого натурального числа k интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+1)^{-k} d\mu$$

сходится [55, теорема VII главы VII]). В частности, из этого критерия и из того факта, что ряд $\sum\limits_{\rho \neq 0,1} |\rho|^{-2}$ сходится [30, лемма 5.5], мы видим, что Δ_f является мерой медленного роста для всех f.

Наконец, заметим, что на пространствах $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ определено преобразование Фурье $\hat{}$, являющееся топологическим автоморфизмом этих пространств. Пространство $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, а значит $\hat{\mathcal{D}}$ также плотно в $\mathcal{S} = \hat{\mathcal{S}}$. Чтобы проверить, что μ — мера медленного роста, достаточно проверить, что она определена на плотном подмножестве и непрерывна на этом плотном подмножестве в топологии $\mathcal{S}$. Аналогично, для того, чтобы проверить, что последовательность мер медленного роста сходится к мере медленного роста, достаточно проверить ее сходимость на плотном подмножестве к мере, непрерывной на этом плотном подмножестве. Это следует из определения мер как линейных функционалов.

Нашим основным инструментом будет явная формула Вейля для L-функций модулярных форм, доказываемая в [49] или в [30, главе V] (в последнем источнике накладываются некоторые дополнительные условия на тестовые функции).

Пусть $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ удовлетворяет для некоторого $\epsilon > 0$ следующему условию:

$$|F(x)|, |F'(x)| \ll ce^{(-\frac{1}{2}+\epsilon)|x|} \text{ когда } |x| \to \infty. \tag{3.1}$$

Положим

$$\Phi(s) := \int_0^{\infty} F(x) e^{(s-\frac{1}{2})x} dx = \hat{F}(t),$$

где $s = \frac{1}{2} + it$. Следующее предложение дает нам явную формулу, необходимую для того, чтобы связать сумму по нулям с суммой коэффициентов Фурье модулярных форм.

Предложение 3.2.1. *Пусть $f(z)$ — примитивная параболическая форма уровня N и веса k. Тогда предел*

$$\sum_{L_f(\rho)=0} \Phi(\rho) = \lim_{T\to\infty} \sum_{\substack{L_f(\rho)=0 \\ |\rho|<T}} \Phi(\rho)$$

существует и имеет место формула:

$$\sum_{L_f(\rho)=0} \Phi(\rho) = -\sum_{p,m} b(p^m)(F(m\log p) + F(-m\log p)) \frac{\log p}{p^{m/2}} +$$
$$+ F(0)(\log N - 2\log(2\pi)) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}+it\right) + \Phi\left(\frac{1}{2}-it\right)}{2} \cdot \psi\left(\frac{k}{2}+it\right) dt,$$

где $\psi(s) = \Gamma'(s)/\Gamma(s)$, $b(p^m) = (a_p)^m$, если $p \mid N$ и $b(p^m) = (\alpha_p)^m + (\bar{\alpha}_p)^m$ иначе.

Переходя к подпоследовательности $\{f_j\}$, мы можем предположить, что существует предел $\alpha = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{\log N_j}{\log N_j + \log k_j}$. Мы проверим сходимость мер на $\hat{\mathcal{D}}$. Из обсуждения выше следует, что этого достаточно для доказательства теоремы. Возьмем произвольную функцию $\phi \in \hat{\mathcal{D}}$, $\phi = \hat{F}$, $F \in \mathcal{D}$. Имеем: $\phi(t) = \Phi\left(\frac{1}{2}+it\right)$. Функция F удовлетворяет условию (3.1), а значит, мы можем применить к ней явную формулу. Зафиксируем $\phi(t)$

и будем менять f_j. Тогда, при $j \to \infty$ имеет место равенство:

$$\Delta(\phi) = 2\pi F(0)\alpha + 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(t)+\phi(-t)}{2} \cdot \lim_{j\to\infty} \frac{\psi\left(\frac{k_j}{2}+it\right)}{\log N_j + \log k_j} dt, \tag{3.2}$$

так как $|b(p^m)| \leq 2$ и интеграл равномерно сходится благодаря тому, что $\phi(t) \in \mathcal{S}$. Предел под знаком интеграла может быть вычислен с помощью формулы Стирлинга $\psi(s) = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right)$ (см. [41, с. 332]). Это дает нам

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\psi\left(\frac{k_j}{2}+it\right)}{\log N_j + \log k_j} = \frac{1}{2}(1-\alpha).$$

Но $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)dt = 2\pi F(0)$, а значит правая часть (3.2) равна

$$2\pi F(0)\alpha + 2\pi F(0)(1-\alpha) = 2\pi F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt.$$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 3.2.2. *Всякий фиксированный открытый интервал вокруг $s = \frac{1}{2}$ содержит нули $L_f(s)$, если q_f достаточно велико.*

Замечание 3.2.3. Можно доказать похожее утверждение о равномерной распределенности для L-функций ограниченной степени в классе Сельберга, предполагая подходящие гипотезы (такие как обобщенная гипотеза Римана или гипотеза Рамануджана–Петерсона). Интересным вопросом будет вопрос о распределении нулей в том случае, когда степень L-функций растет вместе с аналитическим кондуктором. Некоторые примеры нетривиальных распределений нулей для дзета-функций Дедекинда рассматриваются в [67].

Глава 4

Асимптотические свойства дзета-функций над конечными полями

4.1 Введение

Изучение асимптотических свойств дзета-функций кривых над конечными полями было начато Цфасманом и Влэдуцем. Изначальной мотивацией для развития теории послужило неравенство Дринфельда–Влэдуца для асимптотического числа точек на кривых над конечными полями ([12], [65]). Теория развилась далеко за рамки этого изначального неравенства и привела к введению понятия предельной дзета-функции, оказавшегося очень полезным [66]. Эта теория также имела многочисленные приложения в теории кодирования (см., например, книгу [68] для некоторых из них).

Вышеупомянутое изучение предельных дзета-функций включает в себя три основных части:

1. основное неравенство, которое может рассматриваться как весьма далеко идущее обобщение неравенства Дринфельда–Влэдуца;

2. результаты, обобщающие теорему Брауэра–Зигеля, в которых изучаются асиптотические свойства специальных значений дзета-функций (что, например, дает асимптотику порядка группы Пикара в случае кривых);

3. распределение нулей дзета-функций в семействах.

Имеется, по крайней мере, два основных направления для дальнейшего изучения этих тем. Во-первых, можно задаться вопросом о том, каковы аналоги этих результатов в случае числовых полей (ведь, как хорошо известно, имеется весьма глубокая аналогия между функциональными и числовыми полями). Такие аналоги были получены Цфасманом и Влэдуцем в статье [67]. Методы, используемые ими, оказываются весьма сложными с аналитической точки зрения, но награда за все трудности тоже весьма значительна. Авторам удается решить некоторые давно стоящие проблемы (такие как обобщение теоремы Брауэра–Зигеля на асимптотически хороший случай), а также усилить некоторые трудные результаты (неравенства Одлыжко–Серра для дискриминанта, граница Циммерта для регулятора).

Во-вторых, можно спросить, что происходит для многообразий большей размерности над конечными полями. Здесь ответы, которыми мы располагаем, гораздо менее полны. Первый вопрос (основные неравенства) подробно изучался в [38]. Результаты, полученные в этой работе, весьма полные, хотя они и не применимы явно к более общим L-функциям (таким как L-функции эллиптических кривых над функциональными полями). Второй вопрос изучался значительно меньше, хотя он и получил особенное внимание в последние годы в случае эллиптических поверхностей [22], [36] и в случае дзета-функций многообразий над конечными полями [70]. Результатов касательно третьего вопроса, кажется, еще меньше. Можно упомянуть статью Мишеля [50], где изучался случай эллиптических кривых над $\mathbb{F}_q(t)$. Тем не менее, значительное внимание было посвящено более тонким вопросам, связанным с распределением нулей [33]. Однако, насколько нам известно, не доказано ни одного результата подобного типа для асимптотически хороших семейств.

Цель данной главы — изучить три выше сформулированных вопроса для случая более общих дзета и L-функций. Мы используем аксиоматический подход и определяем класс L-функций, к которым могут быть применены наши результаты. Этот класс может рассматриваться как функциональный аналог класса Сельберга (определенного для случая нулевой характеристики), хотя, очевидным образом, аналитическая составляющая в функциональном случае гораздо менее значительна (а порой и вовсе пренебрежима). В этой главе мы посвящаем больше внимания второму и третьему вопросам как наименее исследованным из трех. Поэтому, доказывая результаты, обобщающие основное неравенство, мы не стремимся получить их в полной общности (как в статье [38]). Мы надеемся, что это позволяет нам выиграть в ясности изложения, а также сэкономить значительное количество страниц.

Мы используем семейства эллиптических кривых над функциональными полями как основной пример. После каждого общего утверждения, касающегося одной из трех проблем, мы даем конкретные результаты, которые мы получаем для кривых, многообразий над конечными полями и эллиптических кривых над функциональными полями. Изучая второй из вопросов, нам удается доказать новые результаты и в классическом случае дзета-функций кривых над конечными полями. Более конкретно, мы доказываем утверждение о предельном поведении дзета-функций, частным случаем которого является теорема Брауэра–Зигеля из [66] (см. теорему 4.5.6 и следствие 4.5.14). Мы также передоказываем и обобщаем некоторые результаты Ихары о постоянных Эйлера–Кронекера функциональных полей [29], включая их в общий принцип работы с предельными дзета-функциями (см. следствие 4.5.16). Наши результаты о распределении нулей (теорема 4.6.1 и следствие 4.6.9) имеют следствием, в случае эллиптических кривых над функциональными полями, обобщение результата Мишеля [50] (однако, в отличие от нас, Мишель также дает оценки для остаточного члена).

Вот план этой главы. В §4.2 мы определяем класс дзета и L-функций, с которыми мы будем работать, затем мы доказываем явную формулу для них. В конце параграфа мы приводим несколько конкретных примеров, приходящих из алгебраической геометрии (дзета-функции кривых, дзета-функции многообразий над конечными полями, L-функции эллиптических кривых над функциональными полями), к которым мы применяем наши общие результаты. В каждом последующем параграфе имеется часть, в которой мы показываем, что дают результаты об абстрактных дзета и L-функциях в этих конкретных случаях. В §4.3 мы объясняем, в чем состоит асимптотический подход к изучению дзета и L-функций, вводя понятия асимптотически точных и асимптотически очень точных семейств. Посвящен 4.4 посвящен доказательству различных версий основного неравенства. Изучение обобщений теоремы Брауэра–Зигеля предпринято в §4.5. В том же параграфе мы показываем, как эти результаты влекут формулы для асимптотического поведения инвариантов функциональных полей, обобщающих постоянную Эйлера–Кронекера (следствие 4.5.16), а также некоторые границы по направлению к гипотезам Кунявского, Цфасмана и Андри (теорема 4.5.27). Мы доказываем результаты о распределении нулей в §4.6. Там же мы даем приложения этих результатов к вопросу о росте ранга в семействах эллиптических поверхностей (следствия 4.6.9 и 4.6.11). Наконец, в §4.7 мы обсуждаем направления дальнейшего исследования, а также приводим некоторые открытые вопросы.

4.2 Дзета и L-функции

4.2.1 Определения

Определим класс L-функций, с которыми мы будем работать. Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов.

Определение 4.2.1. *L-функция $L(s)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ — это голоморфная функция от s такая, что для $u = q^{-s}$ функция $\mathcal{L}(u) = L(s)$ является многочленом с вещественными коэффициентами, $\mathcal{L}(0) = 1$ и все корни $\mathcal{L}(u)$ расположены на окружности радиуса $q^{-\frac{d}{2}}$ для некоторого неотрицательного целого числа d.*

Последнее условие на L-функцию $L(s)$ мы будем называть гипотезой Римана для нее, так как это является функциональным аналогом классической гипотезы Римана для дзета-функции Римана. Число d в определении L-функции мы будем называть ее весом. Мы также будем называть степень g многочлена $\mathcal{L}(u)$ степенью L-функции $L(s)$ (не стоит путать степень в нашем смысле со степенью L-функции в аналитической теории чисел, где степенью называется степень многочлена в Эйлеровском произведении).

Логарифм L-функции имеет разложение в ряд Дирихле

$$\log L(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f}{f} q^{-fs},$$

сходящийся при $\operatorname{Re} s > \frac{d}{2}$. Для логарифмической производной L-функции мы получаем формулу:

$$-\frac{L'(s)}{L(s)} = \sum_{f=1}^{\infty} (\Lambda_f \log q)\, q^{-fs} = u\, \frac{\mathcal{L}'(u)}{\mathcal{L}(u)} \log q.$$

Для $L(s)$ имеется функциональное уравнение вида

$$L(d-s) = \omega q^{(\frac{d}{2}-s)g} L(s), \tag{4.1}$$

где $g = \deg \mathcal{L}(u)$ и $\omega = \pm 1$ — корневое число. Это может быть доказано следующим образом. Пусть $\mathcal{L}(u) = \prod\limits_{i=1}^{g} \left(1 - \frac{u}{\rho_i}\right)$. Тогда

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{uq^d}\right) = \prod_\rho \left(1 - \frac{1}{\rho u q^d}\right) = \prod_\rho \rho \cdot q^{dg} u^g \prod_\rho \left(\frac{u}{\bar{\rho}} - 1\right) = \pm q^{\frac{dg}{2}} u^g \prod_\rho \left(1 - \frac{u}{\rho}\right).$$

Здесь мы использовали тот факт, что все коэффициенты многочлена $\mathcal{L}(u)$ вещественны, так что все его комплексные корни идут в парах ρ и $\bar{\rho}$.

Определение 4.2.2. *Дзета-функция $\zeta(s)$ над конечным полем $\mathbb{F}_q$ — это произведение L-функций в степенях ± 1 :*

$$\zeta(s) = \prod_{k=0}^{d} L_k(s)^{w_k},$$

где $w_k \in \{-1, 1\}$, а $L_k(s)$ — L-функция веса k.

Для логарифма дзета-функции также имеется разложение в ряд Дирихле:

$$\log \zeta(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f}{f} q^{-fs}$$

сходящийся при $\operatorname{Re} s > \frac{d}{2}$.

4.2.2 Явные формулы

В этом параграфе мы доказываем аналоги явных формул Вейля и Старка для наших дзета и L-функций. Доказательство явной формулы Вейля может быть найдено в [57] для случая кривых и в [38] для случая многообразий над конечными полями. Явная формула для L-функций эллиптических поверхностей доказывается в [6]. В нашем доказательстве мы следуем методу, использованному в работе [6].

Напомним, что основным объектом нашего изучения являются дзета-функции $\zeta(s) = \prod\limits_{i=0}^{d} L_i(s)^{w_i}$, где L-функции $L_i(s)$ заданы произведением

$$L_i(s) = \prod_{j=1}^{g_i} \left(1 - \frac{q^{-s}}{\rho_{ij}}\right).$$

Как и раньше, мы определяем коэффициенты Λ_f из соотношения $\log \zeta(s) = \sum\limits_{f=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f}{f} q^{-fs}$.

Предложение 4.2.3. *Пусть* $\mathbf{v} = (v_f)_{f\geq 1}$ *— последовательность вещественных чисел и пусть* $\psi_{\mathbf{v}}(t) = \sum\limits_{f=1}^{\infty} v_f t^f$. *Пусть* $\rho_{\mathbf{v}}$ *— радиус сходимости ряда для* $\psi_{\mathbf{v}}(t)$. *Предположим, что* $|t| < q^{-d/2}\rho_{\mathbf{v}}$. *Тогда*

$$\sum_{f=1}^{\infty} \Lambda_f v_f t^f = -\sum_{i=0}^{d} w_i \sum_{j=1}^{g_i} \psi_{\mathbf{v}}(q^i \rho_{ij} t).$$

Доказательство. Докажем эту формулу для L-функций. Формула для дзета-функций будет следовать из аддитивности.

Проще всего работать с $\mathcal{L}(u) = \prod\limits_{j=1}^{g}\left(1 - \frac{u}{\rho}\right)$. Легко видеть, что коэффициент при u^f в разложении в ряд $-u\mathcal{L}'(u)/\mathcal{L}(u)$ равен $\sum\limits_{\rho} \rho^{-f}$ для $f \geq 1$. Отсюда мы получаем равенство:

$$\sum_{\rho} \rho^{-f} = -\Lambda_f.$$

Отображение $\rho \mapsto (q^d\rho)^{-1}$ переставляет нули $\{\rho\}$, а значит, для любого $f \geq 1$ мы имеем:

$$S_n = \sum_{\rho} (q^d\rho)^f = -\Lambda_f.$$

Умножая последнее тождество на $v_f t^f$ и суммируя для $f = 1, 2, \ldots$, мы получаем утверждение теоремы. □

Из этой теоремы можно получить более привычную версию явной формулы для L-функций (похожую на ту, что доказывается в [57] для случая кривых над конечными полями).

Следствие 4.2.4. *Пусть* $L(s)$ *—* L*-функция с нулями* $\rho = q^{-d/2}e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. *Пусть* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ *— четный тригонометрический многочлен*

$$f(\theta) = v_0 + 2\sum_{n=1}^{Y} v_n \cos(n\theta).$$

Тогда имеет место явная формула:

$$\sum_{\theta} f(\theta) = v_0 g - 2\sum_{f=1}^{Y} v_f \Lambda_f q^{-\frac{df}{2}}.$$

Доказательство. Мы полагаем $t = q^{-\frac{d}{2}}$ в явной формуле выше и замечаем, что сумма по нулям может быть записана, используя $\cos$, так как все невещественные нули приходят в комплексно сопряженных парах. □

В дальнейшем мы будем использовать также так называемую формулу Старка (которая берет свое имя от числового аналога из [61]).

Предложение 4.2.5 (Формула Старка)**.** *Для дзета-функции $\zeta(s)$ мы имеем:*

$$\frac{1}{\log q}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{i=0}^{d} w_i \sum_{j=1}^{g_i} \frac{1}{q^s\rho_{ij}-1} = -\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d} w_i g_i + \frac{1}{\log q}\sum_{i=0}^{d} w_i \sum_{L_i(\theta_{ij})=0} \frac{1}{s-\theta_{ij}}.$$

Доказательство. Первое равенство — тривиальное следствие формул, выражающих $\mathcal{L}_i(u)$ как многочлен от u.

Второе равенство вытекает из разложения в ряд

$$\frac{\log q}{\rho^{-1}q^s-1} + \frac{\log q}{2} = \lim_{T\to\infty} \sum_{\substack{q^\theta=\rho \\ |\theta|\le T}} \frac{1}{s-\theta}.$$

□

4.2.3 Примеры

Мы рассматриваем три типа примеров: дзета-функции кривых над конечными полями, дзета-функции многообразий над конечными полями и L-функции эллиптических кривых над функциональными полями.

Пример 4.2.6 (Кривые над конечными полями)*.* Пусть X — абсолютно неприводимая гладкая проективная кривая рода g над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов. Пусть Φ_f — число точек степени f на X. Дзета-функция кривой X определяется для $\operatorname{Re} s > 1$ как

$$\zeta_X(s) = \prod_{f=1}^{\infty}(1-q^{-fs})^{-\Phi_f}.$$

Известно, что $\zeta_X(s)$ является рациональной функцией от $u = q^{-s}$. Более того,

$$\zeta_K(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{g}\left(1-\frac{u}{\rho_j}\right)\left(1-\frac{u}{\bar\rho_j}\right)}{(1-u)(1-qu)},$$

где $|\rho_j| = q^{-\frac{1}{2}}$. Легко видеть, что в этом случае $\Lambda_f = N_f(X)$ равно числу $\mathbb{F}_{q^f}$-точек на кривой $X\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q^f}$. Важным свойством, присущим этому примеру и отсутствующим в общем случае, является тот факт, что $\Lambda_f \ge 0$ для всех f.

Хотя $\zeta_X(s)$ и не является L-функцией, во всех асимптотических рассмотрениях знаменатель не будет играть роли, а значит, $\zeta_X(s)$ будет вести себя как L-функция.

Этот пример будет служить мотивацией для наших последующих рассмотрений, так как большинство (но не все, см. §4.5) результатов, доказываемых нами для общих дзета и L-функций, известны в этой ситуации.

Пример 4.2.7 (Многообразия над конечными полями). Пусть X — неособое абсолютно неприводимое проективное многообразие размерности n, определенное над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Обозначим через $|X|$ множество замкнутых точек X. Положим $X_f = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q^f}$ и $\bar{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. Пусть Φ_f — число точек X, имеющих степень f, то есть $\Phi_f = |\{v \in |X| \mid \deg(v) = f\}|$. Число $\mathbb{F}_{q^f}$-точек многообразия X_f, обозначаемое N_f, равно $N_f = \sum\limits_{m|f} m\Phi_m$.

Пусть $b_s(X) = \dim_{\mathbb{Q}_l} H^s(\bar{X}, \mathbb{Q}_l)$ — l-адические числа Бетти многообразия X. Дзета-функция X определяется для $\mathrm{Re}(s) > d$ с помощью Эйлеровского произведения

$$\zeta_X(s) = \prod_{v \in |X|} \frac{1}{1 - \mathrm{N}v^{-s}} = \prod_{f=1}^{\infty} (1 - q^{-fs})^{-\Phi_f},$$

где $\mathrm{N}v = q^{-\deg v}$. Если положить $Z_X(u) = \zeta_X(s)$, где $u = q^{-s}$, то функция $Z_X(u)$ оказывается рациональной функцией переменной u и может быть представлена в виде

$$Z_X(u) = \prod_{i=0}^{2n} (-1)^{i-1} \log P_i(X, u),$$

где

$$P_i(X, u) = \prod_{j=1}^{b_i} \left(1 - \frac{u}{\rho_{ij}}\right),$$

и $|\rho_{ij}| = q^{-i/2}$. Более того, $P_0(X, u) = 1 - u$ и $P_{2n}(X, u) = 1 - q^d u$. Как и раньше, мы имеем, что $\Lambda_f = N_f(X) \geq 0$.

Предыдущий пример очевидным образом содержится в этом. Однако, оказывается целесообразным рассматривать эти примеры отдельно, так как в случае дзета-функций общих многообразий над конечными полями удается получить несколько меньше результатов. Тогда как дзета-функции кривых асимптотически ведут себя как L-функции, дзета-функции произвольных многообразий являются “настоящими” дзета-функциями. Таким образом, часть свойств просто не выполняется в общем случае (например, некоторые из тех, что связаны с распределением нулей).

Пример 4.2.8 (Эллиптические кривые над функциональными полями). Пусть E — непостоянная эллиптическая кривая над функциональным полем $K = \mathbb{F}_q(X)$ с конечным полем констант $\mathbb{F}_q$. Кривая E может рассматриваться как эллиптическая поверхность над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Пусть g — род кривой X. Нормирования поля K (т. е. точки кривой X) будут обозначаться через v. Пусть $d_v = \deg v$, $|v| = \mathrm{N}v = q^{\deg v}$ и положим $\mathbb{F}_v = \mathbb{F}_{\mathrm{N}v}$ — поле вычетов точки v.

Для каждого нормирования v поля K определим a_v из равенства $|E_v(\mathbb{F}_v)| = |v| + 1 - a_v$, где $|E_v(\mathbb{F}_v)|$ — число точек на редукции E_v кривой E. Локальные множители $L_v(s)$ определяются так:

$$L_v(s) = \begin{cases} (1 - a_v|v|^{-s} + |v|^{1-2s})^{-1}, & \text{если } E_v \text{ неособа;} \\ (1 - a_v|v|^{-s})^{-1}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определим глобальную L-функцию $L_E(s) = \prod\limits_v L_v(s)$. Произведение сходится при $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$ и определяет аналитическую функцию в этой полуплоскости. Определим кондуктор N_E кривой E как дивизор $\sum\limits_v n_v v$ с $n_v = 1$ в точках v мультипликативной редукции, $n_v = 2$ в точках аддитивной редукции, если $\operatorname{char} \mathbb{F}_q > 3$ (и возможно больше, если $\operatorname{char} \mathbb{F}_q = 2$ или 3) и $n_v = 0$, иначе. Пусть $n_E = \deg N_E = \sum\limits_v n_v \deg v$.

Известно, что (см. [6]) $L_E(s)$ является полиномом $\mathcal{L}_E(u)$ от $u = q^{-s}$ степени $n_E + 4g - 4$. Многочлен $\mathcal{L}_E(u)$ имеет вещественные коэффициенты, удовлетворяет $\mathcal{L}_E(0) = 1$, и все его корни по модулю равны q^{-1}.

Пусть $\alpha_v, \bar{\alpha}_v$ — корни многочлена $1 - a_v t + |v|t^2$ для точки v хорошей редукции и пусть $\alpha_v = a_v$ и $\bar{\alpha}_v = 0$ для точки v плохой редукции. Тогда, из определения $L_E(s)$, легко вывести, что

$$\Lambda_f = \sum_{m d_v = f} d_v(\alpha_v^m + \bar{\alpha}_v^m), \tag{4.2}$$

где сумма берется по всем точкам v поля K и $m \geq 1$ таким, что $m \deg v = f$.

Этот пример будет для нас основным, в том смысле, что все наши результаты для L-функций доказываются с идеей применить их к этому конкретному случаю. Такие L-функции особенно интересны с арифметической точки зрения, в частности, ввиду наличия связи специальных значений L-функций в точке $s = 1$ с арифметическими инвариантами соответствующих эллиптических кривых (порядком группы Шафаревича–Тейта и регулятором), которая получается из гипотезы Берча и Свиннертона-Дайера.

4.3 Семейства дзета и L-функций

4.3.1 Определения и простейшие свойства

Нас интересуют последовательности дзета и L-функций. Зафиксируем конечное поле $\mathbb{F}_q$.

Определение 4.3.1. *Назовем последовательность $\{L_k(s)\}_{k=1\ldots\infty}$ L-функций семейством, если все L-функции из последовательности имеют один и тот же вес d, а степень g_k стремится к бесконечности.*

Определение 4.3.2. *Назовем последовательность $\{\zeta_k(s)\}_{k=1\ldots\infty} = \left\{\prod\limits_{i=0}^{d} L_{ki}(s)^{w_i}\right\}_{k=1\ldots\infty}$ дзета-функций семейством, если полная степень $g_k = \sum\limits_{i=0}^{d} g_{ki}$ стремится к бесконечности. Здесь g_{ki} — степени L-функций $L_{ki}(s)$, входящих в $\zeta_k(s)$.*

Замечание 4.3.3. В определении семейства дзета-функций мы предполагаем, что $d = d_k$ и $w_i = w_{ki}$ одни и те же для всех k. Очевидным образом, любое семейство L-функций является семейством дзета-функций.

Определение 4.3.4. *Семейство $\{\zeta_k(s)\}_{k=1\ldots\infty}$ дзета или L-функций называется асимптотически точным, если пределы*

$$\gamma_i = \gamma_i(\{\zeta_k(s)\}) = \lim_{k\to\infty} \frac{g_{ki}}{g_k} \quad \textit{и} \quad \lambda_f = \lambda_f(\{\zeta_k(s)\}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Lambda_{kf}}{g_k}$$

существуют для всех $i = 0, \ldots, d$ и всех $f \in \mathbb{Z}$, $f \geq 1$. Оно называется асимптотически плохим, если $\lambda_f = 0$ для всех f и асимптотически хорошим в противном случае.

Следующее простое предложение будет для нас важным.

Предложение 4.3.5. *Пусть $L(s)$ — L-функция. Тогда*

1. *для каждого f имеется оценка $|\Lambda_f| \leq q^{\frac{df}{2}} g$;*
2. *существует число $C(q, d, s)$, зависящее от q, d, s, но не от g такое, что $|\log L(s)| \leq C(q, d, s) g$ для всех s таких, что $\operatorname{Re} s \neq \frac{d}{2}$. Оценка является равномерной в каждой вертикальной полосе $a \leq \operatorname{Re} s \leq b$, $\frac{d}{2} \notin [a, b]$.*

Доказательство. Для доказательства первой части мы используем предложение 4.2.3. Применяя его к последовательности, состоящей из одного ненулевого члена, мы получаем:

$$\Lambda_f = - \sum_{\mathcal{L}_{ki}(\rho)=0} q^{df} \rho^f. \tag{4.3}$$

Абсолютное значение правой части этого равенства ограничено $q^{\frac{df}{2}} g$.

Для доказательства второй части предложения допустим сначала, что $\operatorname{Re} s = \epsilon + \frac{d}{2} > \frac{d}{2}$. Имеем оценку:

$$|\log L(s)| = \left| \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\Lambda_f}{f} q^{-fs} \right| \leq \sum_{f=1}^{\infty} \frac{g}{f} \cdot q^{\frac{df}{2}} \cdot q^{-f \operatorname{Re} s} \leq g \sum_{f=1}^{\infty} \frac{1}{f q^{\epsilon f}}.$$

Случай $\operatorname{Re} s < \frac{d}{2}$ получается применением функционального уравнения (4.1). □

Предложение 4.3.6. *Любое семейство дзета и L-функций содержит асимптотически хорошее подсемейство.*

Доказательство. Заметим, что последовательности $\frac{g_{ki}}{g_k}$ и $\frac{\Lambda_{kf}}{g_k}$ ограничены. Для первой последовательности это очевидно, а вторая ограничена по предложению 4.3.5. Теперь мы можем использовать диагональный метод, чтобы выбрать подсемейство, для которого существуют пределы. □

Как и в случае кривых над конечными полями, мы должны рассмотреть отдельно множители в дзета-функциях, являющиеся асимптотически пренебрежимыми. Это может быть сделано с помощью предложения 4.3.5.

Определение 4.3.7. *Пусть $\{\zeta_k(s)\}$ — асимптотически точное семейство дзета-функций. Определим множество $I \subset \{0 \dots d\}$ условием: $i \in I$ тогда и только тогда, когда $\gamma_i = 0$. Определим через $\zeta_{\mathbf{n},k}(s) = \prod_{i \in I} L_{ki}(s)^{w_i}$ пренебрежимую часть $\zeta_k(s)$ и через $\zeta_{\mathbf{e},k}(s) = \prod_{i \in \{0 \dots d\} - I} L_{ki}(s)^{w_i}$ существенную часть $\zeta_k(s)$. Определим также $d_{\mathbf{e}} = \max\{i \mid i \notin I\}$.*

Замечание 4.3.8. Функции $\zeta_{\mathbf{n},k}(s)$ и $\zeta_{\mathbf{e},k}(s)$ имеют смысл только для семейств дзета-функций, но не для индивидуальных дзета-функций. Заметим также, что определения существенной и пренебрежимой частей тривиальны для семейств L-функций.

Следующее предложение, несмотря на свою очевидность, оказывается весьма полезным.

Предложение 4.3.9. *Для асимптотически точного семейства дзета-функций* $\{\zeta_i(s)\}$ *мы имеем:* $\lambda_f(\zeta_i(s)) = \lambda_f(\zeta_{\mathbf{e},i}(s))$.

Доказательство. Это очевидно следует из предложения 4.3.5. $\square$

Условие асимптотической точности на семейство оказывается достаточным в случае многообразий над конечными полями благодаря неотрицательности коэффициентов Λ_f. Однако, в общем случае нам потребуется накладывать несколько более жесткое условие на семейства.

Определение 4.3.10. *Мы говорим, что асимптотически точное семейство дзета или L-функций является асимптотически очень точным, если ряд*

$$\sum_{f=1}^{\infty} |\lambda_f| q^{-\frac{f d_{\mathbf{e}}}{2}}$$

сходится.

Пример 4.3.11. Очивидным примером семейства, являющегося асимптотически точным, но не очень точным, является семейство L-функций $L_k(s) = (1-q^{-s})^k$. Мы имеем $\lambda_f = -1$ для всех f и ряд $\sum\limits_{f=1}^{\infty}(-1)$, очевидно, расходится.

Предложение 4.3.12. *Предположим, что имеется асимптотически точное семейство дзета-функций* $\{\zeta_k(s)\} = \left\{\prod\limits_{i=0}^{d} L_{ki}(s)^{w_i}\right\}_{k=1\ldots\infty}$ *такое, что все семейства* $\{L_{ki}(s)\}$ *также являются асимптотически точными. Тогда семейство* $\{\zeta_k(s)\}$ *асимптотически очень точное тогда и только тогда, когда семейство* $\{L_{kd_{\mathbf{e}}}(s)\}$ *является асимптотически очень точным.*

Доказательство. Это следует из предложений 4.3.5 и 4.3.9. $\square$

На практике это предложение означает, что асимптотическое поведение дзета-функций при $\operatorname{Re} s > \frac{d_{\mathbf{e}}-1}{2}$, в сущности, такое же, как поведение их частей веса $d_{\mathbf{e}}$. Таким образом, большинство асимптотических вопросов о дзета-функциях сводится к соответствующим вопросам об L-функциях.

4.3.2 Примеры

Как и раньше мы рассматриваем три типа примеров: кривые над конечными полями, многообразия над конечными полями и эллиптические кривые над функциональными полями.

Пример 4.3.13 (Кривые над конечными полями). Пусть $\{X_j\}$ — семейство кривых над $\mathbb{F}_q$. Напомним (см. [66]), что Цфасман и Влэдуц определили асимптотически хорошее семейство кривых как семейство, для которого существуют пределы

$$\phi_f = \lim_{j\to\infty} \frac{\Phi_f(X_j)}{g_j}. \tag{4.4}$$

Это определение эквивалентно нашему, так как $\Lambda_f = N_f(X) = \sum\limits_{m|f} m\Phi_m$. Заметим небольшую разницу в нормализации коэффициентов: в случае кривых мы полагаем $\lambda_f(\{X_j\}) = \lim\limits_{j\to\infty} \frac{\Lambda_{jf}}{2g_j}$, так как $2g_j$ — степень многочлена числителе $\zeta_{X_j}(s)$, а авторы [66] рассматривают вместо этого $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{\Lambda_{jf}}{g_j}$.

Для асимптотически точного семейства дзета-функций кривых пренебрежимой частью $\zeta_X(s)$ является знаменатель $(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$, а существенной частью — числитель. Таким образом, дзета-функции кривых асимптотически ведут себя как L-функции. Как показывает основное неравенство из [66] (см. также следствие 4.4.2 ниже), всякое асимптотически точное семейство кривых является асимптотически очень точным. Причина этого, как мы увидим ниже, кроется в положительности чисел λ_f.

Пример 4.3.14 (Многообразия над конечными полями). В случае многообразий над конечными полями имеется аналогичное понятие асимптотически точного семейства [38], а именно, требуется существование пределов

$$\phi_f = \lim_{j\to\infty} \frac{\Phi_f(X_j)}{b(X_j)} \quad \text{и} \quad \beta_i = \lim_{j\to\infty} \frac{b_i(X_j)}{b(X_j)},$$

где $b(X_j) = \sum\limits_{i=0}^{2d} b_i(X_j)$ — сумма чисел Бетти. Как и раньше, это определение и наше определение 4.3.4 эквивалентны.

В этом случае множители $(1 - q^{-s})$ и $(1 - q^{d-s})$ в знаменателе также всегда пренебрежимы. Однако, как показывает следующий пример, может случиться, что пренебрежимых множителей будет больше.

Рассмотрим произведение $C \times C$, где C — кривая рода $g \to \infty$. Размерность средней группы когомологий H^2 растет как g^2, при этом $b_1 = b_3 = g$ (формула Кюннета).

Таким образом, $\zeta_{C\times C}(s)$ ведет себя как функция, обратная к L-функции. Если для асимптотически точного семейства мы имеем $d_{\mathbf{e}} = 2d-1$, то это семейство автоматически является асимптотически очень точным, как показывает основное неравенство [38, (8.8)] (из него вытекает, что ряд $\sum\limits_{f=1}^{\infty} \lambda_f q^{-f(d-1/2)}$ всегда сходится), см. также следствие 4.4.6 ниже.

Пример 4.3.15 (Эллиптические кривые над функциональными полями). В последнем примере нас будут интересовать два конкретным типа асимптотически точных семейств.

Асимптотически плохие семейства. Зафиксируем функциональное поле $K = \mathbb{F}_q(X)$ и рассмотрим последовательность всех попарно неизоморфных эллиптических кривых E_i/K. Мы получаем семейство L-функций, так как при этом $n_{E_i} \to \infty$. Из (4.2) мы заключаем, что $|\Lambda_f| \leq 2\left(\sum\limits_{d_v|f} d_v\right) q^{\frac{f}{2}}$, что не зависит от n_{E_i}. Значит, семейство является асимптотически точным и асимптотически плохим, т. е. $\lambda_f = 0$ для всех $f \geq 1$. Это будет единственным фактом, важным для асимптотических рассмотрений. Для нас не будет никакой разницы в изучении этого конкретного семейства или любого другого асимптотически плохого семейства L-функций.

Это семейство рассматривалось в [22] в связи с обобщенной теоремой Брауэра–Зигеля. Основной результат статьи [22] — сведение утверждения о поведении порядка группы Шафаревича–Тейта и регулятора эллиптических кривых над функциональными полями к утверждению о значениях их L-функций в точке $s = 1$. См. также [21], где подобная проблема изучается в случае числовых полей.

Замена базы. Рассмотрим семейство, которое, в некотором смысле, ортогонально к предыдущему. Пусть $K = \mathbb{F}_q(X)$ — функциональное поле, и пусть E/K — эллиптическая кривая над ним. Пусть $f : \mathcal{E} \to X$ — соответствующая эллиптическая поверхность. Рассмотрим семейство накрытий кривых $X = X_0 \leftarrow X_1 \cdots \leftarrow X_i \leftarrow \dots$ и семейство эллиптических поверхностей $\mathcal{E}_i$, получающееся заменой базы:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 & \longleftarrow & \mathcal{E}_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \mathcal{E}_i & \longleftarrow & \dots \\
\downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & X_i & \longleftarrow & \dots .
\end{array}$$

Пусть $\Phi_{v,f}(X_i)$ — число точек на кривой X_i, лежащих над замкнутой точкой $v \in |X|$ таких, что их поле вычетов имеет степень f над $\mathbb{F}_v$.

Лемма 4.3.16. *Пределы*

$$\phi_{v,f} = \phi_{v,f}(\{X_i\}) = \lim_{i\to\infty} \frac{\Phi_{v,f}(X_i)}{g(X_i)}$$

всегда существуют.

Доказательство. Мы будем следовать доказательству похожего утверждения для Φ_f из [67, лемма 2.4]. Пусть $K_2 \supseteq K_1 \supseteq K$ — конечное расширение функциональных полей. Из формулы Римана–Гурвица мы получаем неравенство $g(K_2)-1 \geq [K_2 : K_1](g(K_1)-1)$, где $[K_2 : K_1]$ — степень соответствующего расширения. Теперь, если зафиксировать w — точку поля K_1 над v и рассмотреть ее разложение $\{w_1, \ldots, w_r\}$ в K_2, то мы будем иметь: $\sum\limits_{i=1}^{r} \deg w_i \leq [K_2 : K_1]$. Значит, для всякого $n \geq 1$ мы получаем неравенство $\sum\limits_{f=1}^{n} f\Phi_{v,f}(K_2) \leq [K_2 : K_1] \sum\limits_{f=1}^{n} f\Phi_{v,f}(K_1)$. Деля, мы видим, что

$$\frac{\sum\limits_{f=1}^{n} f\Phi_{v,f}(K_2)}{g(K_2)-1} \leq \frac{\sum\limits_{f=1}^{n} f\Phi_{v,f}(K_1)}{g(K_1)-1}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\sum\limits_{f=1}^{n} \frac{f\Phi_{v,f}(X_i)}{g(X_i)-1}$ не возрастает и ограничена для любого фиксированного n, а значит, имеет предел. Беря $n = 1$, мы видим, что $\phi_{v,1}$ существует, беря $n = 2$, мы выводим существование $\phi_{v,2}$ и т. д. □

Отметим, что $\Phi_f = \sum\limits_{m \deg v = f} \Phi_{v,m}$, где сумма берется по все точкам v поля K, и, что подобное равенство верно и для ϕ_v.

Для нашего семейства можно получить конкретное выражение для коэффициентов разложения в ряд Дирихле логарифма L-функций. Действительно, (4.2) дает нам

$$\Lambda_f = \sum_{mkd_v = f} md_v \Phi_{v,m}(\alpha_v^{mk} + \bar{\alpha}_v^{mk}). \tag{4.5}$$

Лемма 4.3.17. *Пусть E_i/K_i — семейство эллиптических кривых, полученное заменой базы, и пусть $n_i = n_{E_i/K_i}$ — степень кондуктора E_i/K_i. Тогда отношение $\frac{n_i}{g_i}$ ограничено константой, зависящей только от E_0/K_0.*

Если, кроме того, $\operatorname{char} \mathbb{F}_q \neq 2, 3$ *или расширения K_i/K_0 являются расширениями Галуа для всех i, то предел $\nu = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_i}{g_i}$ существует.*

Доказательство. Доказательство, в сущности, состоит в рассмотрении определения кондуктора и применении того же метода, что и при проверке леммы 4.3.16. Напомним, что, если E/K — эллиптическая кривая над локальным полем K, $T_l(E)$ — ее модуль Тейта, $l \neq \operatorname{char} \mathbb{F}_q$, $V_l(E) = T_l(E) \otimes \mathbb{Q}_l$, $I(\bar{K}/K)$ — подгруппа инерции $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$, то ручная часть кондуктора определяется как

$$\varepsilon(E/K) = \dim_{\mathbb{Q}_l}(V_l(E)/V_l(E)^{I(\bar{K}/K)}).$$

Легко видеть, что это выражение не возрастает при расширении поля K. Более того, известно, что $0 \leq \varepsilon(E/K) \leq 2$ (см. [60, Глава IV, §10]).

Если положить $L = K(E[l])$, $g_i(L/K) = |G_i(L/K)|$, где $G_i(L/K)$ — группа ветвления с номером i расширения L/K, то дикая часть кондуктора определяется как

$$\delta(E/K) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(L/K)}{g_0(L/K)} \dim_{\mathbb{F}_l}(E[l]/E[l]^{G_i(L/K)}).$$

Можно доказать [60, Глава IV, §10], что $\delta(E/K)$ обращается в ноль, если характеристика поля вычетов K не равна 2 или 3. В любом случае, определение показывает, что $\delta(E/M)$ может принимать лишь конечное число значений для фиксированной кривой E при изменении расширения M/K.

Показатель кондуктора кривой E над локальным полем K определяется как $f(E/K) = \varepsilon(E/K) + \delta(E/K)$.

Из предыдущего обсуждения мы видим, что отношение $\frac{n_i}{g_i}$ ограничено. Если, кроме того, $\operatorname{char} \mathbb{F}_q \neq 2, 3$, то рассуждение, похожее, на то, что использовалось в доказательстве леммы 4.3.16, и тот факт, что $n_w(E) \leq n_v(E)$ если w лежит над v в расширении полей, показывают, что последовательность $\frac{n_i}{g_i}$ не возрастает, а значит, имеет предел $\nu = \nu(\{E_i/K_i\})$.

В случае расширений Галуа мы замечаем, что $n_w(E)$ должно стабилизироваться в башне, а значит, предыдущее рассуждение снова применимо. □

Теперь мы готовы доказать следующее важное предложение:

Предложение 4.3.18. *Всякое семейство эллиптических кривых, полученное заменой базой, содержит асимптотически очень точное подсемейство. Если, кроме того,* $\operatorname{char} \mathbb{F}_q \neq 2, 3$ *или расширения* K_i/K_0 *являются расширениями Галуа для всех* i, *то семейство само является асимптотически очень точным.*

Доказательство. Напомним, что, для каждого расширения E_i/K_i, степень соответствующей L-функции равна n_i+4g_i-4. Из предыдущей леммы следует, что достаточно доказать существование пределов $\tilde{\lambda}_f = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{\Lambda_f(E_i)}{g_i}$ и сходимость ряда $\sum\limits_{f=1}^{\infty} |\tilde{\lambda}_f| q^{-f}$.

Первое утверждение является прямым следствием леммы 4.3.16 и (4.5). Что касается второго утверждения, то мы имеем следующую оценку:

$$|\Lambda_f| \leq 2 \sum_{mkd_v=f} md_v \Phi_{v,m} q^{\frac{f}{2}} = 2 \sum_{lk=f} l\Phi_l q^{\frac{f}{2}} = 2N_f q^{\frac{f}{2}}.$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{f=1}^{\infty} \nu_f q^{-\frac{f}{2}}$ с $\nu_f = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{N_f(X_i)}{g_i}$ следует из основного неравенства из [65, следствие 1]. $\square$

Замечание 4.3.19. Было бы интересно понять, верно ли утверждение предыдущего предложения без дополнительных предположений, т. е. всегда ли семейство, полученное заменой базы, является асимптотически точным. Это зависит от условий, при которых доказывается лемма 4.3.17 и которую нам не удалось доказать в общем случае.

Семейство эллиптических кривых, получаемое заменой базы, изучалось в [36] также в связи с попытками получить обобщение теоремы Брауэра–Зигеля на этот случай. Кунявский и Цфасман формулируют гипотезу об асимптотическом поведении порядка группы Шафаревича–Тейта и регулятора в таких семействах (см. гипотезу 4.5.25 ниже). Они более детально рассматривают случай постоянных эллиптических кривых. К сожалению, доказательство их основного результата [36, теорема 2.1] содержит пробелы (перестановка пределов не обоснована, при этом возможность такой перестановки кажется фактом более, чем трудным).

Замечание 4.3.20. Если, на минуту, мы снова рассмотрим общие семейства эллиптических поверхностей, возникает следующий естественный вопрос:

Вопрос 4.3.21. Верно ли, что всякое семейство эллиптических поверхностей содержит асимптотически очень точное подсемейство?

То, что этот факт верен для двух “ортогональных” случаев, внушает некоторый оптимизм.

4.4 Основные неравенства

В этом параграфе мы, наконец, начинаем выполнят программу по обобщению асимптотических результатов со случая кривых над конечными полями на случай общих дзета и L-функций. Мы начнем со случая L-функций, где можно сказать несколько больше. Затем мы докажем несколько более слабый результат для семейств дзета-функций.

4.4.1 Основное неравенство для L-функций

Наша цель — доказать следующую теорему, обобщающую основное неравенство из [65].

Теорема 4.4.1. *Пусть задано асимптотически точное семейство L-функций $\{L_i(s)\}$ веса d или асимптотически точное семейство дзета-функций $\{\zeta_i(s)\}$ такое, что $\zeta_{\mathbf{e},i}(s)$ является L-функцией веса d для всех i. Тогда для всех $b \in \mathbb{N}$ выполняется следующее неравенство:*

$$\sum_{j=1}^{b}\left(1-\frac{j}{b+1}\right)\lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Доказательство. Используя предложение 4.3.9, легко видеть, что достаточно доказать утверждение теоремы для L-функций.

Как и в доказательстве для кривых, нашим основным инструментом будет так называемое неравенство Дринфельда. Рассмотрим L-функцию $L(s)$ и положим $\alpha_i = q^{\frac{d}{2}}\rho_i$, где ρ_i — корни многочлена $\mathcal{L}(u)$, так что $|\alpha_i| = 1$. Для каждого α_i мы имеем:

$$0 \leq |\alpha_i^b + \alpha_i^{b-1} + \cdots + 1|^2 = (b+1) + \sum_{j=1}^{b}(b+1-j)(\alpha_i^j + \alpha_i^{-j}).$$

Значит, $b+1 \geq -\sum_{j=1}^{b}(b+1-j)(\alpha_i^j+\alpha_i^{-j})$. Просуммируем неравенства для $i = 1, \ldots, g$. Так как коэффициенты многочлена $\mathcal{L}(u)$ вещественны, то мы получаем, что $\sum_{i=1}^{g}\alpha_i^j = \sum_{i=1}^{g}\alpha_i^{-j}$. Из (4.3) мы видим, что $\Lambda_j = -q^{dj}\sum_{i=1}^{g}\rho_i^j$. Объединяя это, можно заключить, что

$$g(b+1) \geq 2\sum_{j=1}^{b}(b+1-j)\Lambda_j q^{-\frac{dj}{2}}.$$

Теперь, меняя $L_i(s)$, так что $g_i \to \infty$, мы получаем требуемое неравенство. $\square$

К сожалению, мы не можем сказать ничего большего в общем случае, когда не известны дополнительные свойства λ_j. Однако, следующее следствие показывает, что иногда можно усилить результат.

Следствие 4.4.2. *Если семейство $\{L_i(s)\}$ асимптотическо точно, то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} \leq \frac{1}{2},$$

при выполнении одного из следующих условий:

1. *семейство асимптотически очень точно или*

2. *$\lambda_j \geq 0$ для всех j.*

Доказательство. Для доказательства утверждения следствия при выполнении первого условия мы выбираем $\epsilon > 0$ и $b' \in \mathbb{N}$ такие, что $\sum\limits_{j=b'+1}^{\infty} |\lambda_j| q^{-\frac{dj}{2}} < \epsilon$. Затем, мы выбираем b'' так, что $\frac{b'}{b''+1} < \epsilon$. Теперь, мы можем применить неравенство из теоремы 4.4.1 с $b = b''$. Мы получаем:

$$\frac{1}{2} \geq \sum_{j=1}^{b''} \left(1 - \frac{j}{b''+1}\right) \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} \geq \sum_{j=1}^{b'} \left(1 - \frac{j}{b''+1}\right) \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} +$$
$$+ \sum_{j=b'+1}^{b''} \left(1 - \frac{j}{b''+1}\right) \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} \geq (1-\epsilon) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}} - 2\epsilon.$$

Значит, первая часть следствия верна.

Для доказательства утверждения при выполнении второго условия, мы используем тот же прием. Возьмем $b' \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{b}{b'+1} < \epsilon$. Затем применим теорему 4.4.1 с $b = b'$ и заметим, что сумма лишь уменьшится, если мы отбросим часть $\sum\limits_{j=b+1}^{b'} \left(1 - \frac{j}{b'+1}\right) \lambda_j q^{-\frac{dj}{2}}$, ибо $\lambda_j \geq 0$. Это дает нам вторую часть следствия. $\square$

Замечание 4.4.3. Заметим, что из следствия вытекает, что любое асимптотически точное семейство L-функций, удовлетворяющее $\lambda_j \geq 0$ для всех j, является асимптотически очень точным. Это утверждение и утверждение следствия остаются верными, если предположить, что $\lambda_j \geq 0$ для всех, кроме конечного числа $j \in \mathbb{N}$.

Замечание 4.4.4. Методы §4.6 позволяют доказать несколько более сильное утверждение. Более подробно см. в замечании 4.6.4.

4.4.2 Основное неравенство для дзета-функций

Как мы заметили в предыдущем параграфе, даже для случая L-функций мы не получаем полных результатов без предположения о том, что семейство является асимптотически очень точным или, что коэффициенты λ_f положительны. При работе с дзета-функциями возникает та же проблема. Однако, мы обходим ее другим способом из-за отсутствуя общей нижней границы для сумм типа (4.6), тогда как такая нижняя граница оказывается необходимой, ибо дзета-функции являются произведениями L-функций как в положительных, так и в отрицательных степенях.

Теорема 4.4.5. *Пусть $\{\zeta_k(s)\}$ — асимптотически точное семейство дзета-функций. Тогда для всякого вещественного s такого, что $\frac{d_{\mathbf{e}}}{2} < s < \frac{d_{\mathbf{e}}+1}{2}$, мы имеем:*

$$-\sum_{i=0}^{d_{\mathbf{e}}} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} - w_i} \le \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-sj} \le \sum_{i=0}^{d_{\mathbf{e}}} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} + w_i}.$$

Доказательство. Прежде всего, предложение 4.3.5 гарантирует, что достаточно доказать неравенство в случае, когда $\zeta_k(s) = \zeta_{\mathbf{e},k}(s)$ и $d = d_{\mathbf{e}}$.

Запишем формулу Старка из предложения 4.2.5:

$$\frac{1}{\log q} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{g_i} \frac{1}{q^s \rho_{ij} - 1}.$$

Заметим, что все члены вещественны для вещественных s и

$$R(r, \theta) = \operatorname{Re} \frac{re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} = \frac{r \cos\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

Используя это соотношение, мы видим, что

$$\frac{1}{\log q} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{i=0}^{d} w_i \sum_{j=1}^{g_i} R(q^{i/2-s}, \theta_{ij}),$$

где $\rho_{kj} = q^{-\frac{k}{2}} e^{i\theta_{kj}}$.

Для $0 < r < 1$ мы имеем оценки на $R(r, \theta)$:

$$-\frac{r}{r+1} \le R(r, \theta) \le \frac{r}{r-1}.$$

Из этого можно вывести, что для s таких, что $\frac{d}{2} < s < \frac{d+1}{2}$, выполнено следующее неравенство:

$$-\sum_{i=0}^{d} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} - w_i} \le \frac{-1}{\log q} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \le \sum_{i=0}^{d} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} + w_i}. \tag{4.7}$$

Следующий шаг — использовать теорему 4.5.6. Для всякого s из интервала $\left(\frac{d}{2}, \frac{d+1}{2}\right)$ мы получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{-1}{g_k \log q} \cdot \frac{\zeta_k'(s)}{\zeta_k(s)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-\frac{sj}{2}}.$$

Деля (4.7) на g, переходя к пределу и используя предыдущее равенство, мы получаем утверждение теоремы. □

Следствие 4.4.6. *1. Если $w_{d_\mathfrak{e}} = 1$ и, либо семейство асимптотически точное, либо $\lambda_j \geq 0$ для всех j, то*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-\frac{d_\mathfrak{e} j}{2}} \leq \sum_{i=0}^{d_\mathfrak{e}} \frac{\gamma_i}{q^{(d_\mathfrak{e}-i)/2} + w_i}$$

2. Если $w_{d_\mathfrak{e}} = -1$ и, либо семейство асимптотически точное, либо $\lambda_j \leq 0$ для всех j, то

$$-\sum_{i=0}^{d_\mathfrak{e}} \frac{\gamma_i}{q^{(d_\mathfrak{e}-i)/2} - w_i} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-\frac{d_\mathfrak{e} j}{2}}.$$

Доказательство. Предположим, что $w_{d_\mathfrak{e}} = 1$ (второй случай рассматривается аналогично). Для асимптотически очень точного семейства, для любого $\epsilon > 0$ можно выбрать $N > 0$ такое, что $\sum\limits_{j>N}^{\infty} |\lambda_j| q^{-\frac{d_\mathfrak{e} j}{2}} < \epsilon$. Значит, для асимптотически очень точных семейств и для семейств с $\lambda_j \geq 0$ для всех j мы имеем:

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j q^{-sj} \leq \sum_{i=0}^{d_\mathfrak{e}} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} + w_i} + \epsilon$$

для любого вещественного s, удовлетворяющего $\frac{d_\mathfrak{e}}{2} < s < \frac{d_\mathfrak{e}+1}{2}$. Переходя к пределу при $s \to \frac{d_\mathfrak{e}}{2}$, мы получаем утверждение следствия. □

Замечание 4.4.7. Как и раньше, мы видим, что всякое асимптотически хорошее семейство, удовлетворяющее условию $w_{d_\mathfrak{e}} \operatorname{sign}(\lambda_j) = 1$ для всех j, является асимптотически очень хорошим.

Замечание 4.4.8. Хотя следствие 4.4.6 влечет следствие 4.4.2, основное неравенство для L-функций из теоремы 4.4.1 отличается от того, что получается применением теоремы 4.4.5.

4.4.3 Примеры

Пример 4.4.9 (Кривые над конечными полями). Для кривых над конечными полями мы получаем классическое основное неравенство из [65]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2\lambda_j q^{-\frac{j}{2}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_m}{q^{m/2}-1} \leq 1.$$

Конечно, это неслишком интересный пример, так как мы использовали это неравенство в качестве изначальной мотивации.

Пример 4.4.10 (Многообразия над конечными полями). Похожим образом, для многообразий над конечными полями мы получаем неравенство из [38, (8.8)]:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\phi_m}{q^{(2d-1)m/2}-1} \leq (q^{(2d-1)/2}-1)\left(\frac{\beta_1}{2} + \sum_{2|i} \frac{\beta_i}{q^{(i-1)/2}+1} + \sum_{2\nmid i} \frac{\beta_i}{q^{(i-1)/2}-1}\right).$$

Приложив больше усилий, можно передоказать большую часть неравенств из [38, (8.8)] в общем контексте дзета-функций, так как основной инструмент, использующийся в [38] — это явные формулы. Однако, мы не делаем этого здесь, ибо, на настоящий момент, мы не видим возможных интересных приложений к конкретным типам дзета-функций.

Пример 4.4.11 (Эллиптические кривые над конечными полями). Случай асимптотически плохих семейств тривиален: мы не получаем интересных результатов, так как все $\lambda_j = 0$.

Рассмотрим случай замены базы. Возьмем асимптотически очень точное семейство эллиптических кривых, полученное заменой базы (по предложению 4.3.18 всякое семейство, полученное заменой базы, асимптотически очень точно, если $\operatorname{char}\mathbb{F}_q \neq 2, 3$). Применив следствие 4.4.2, мы получим, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j q^{-j/2} \leq \frac{1}{2}$. Используя (4.5), можно переписать неравенство в терминах $\phi_{v,m}$:

$$\sum_{v,m} \frac{md_v\phi_{v,m}(\alpha_v^m + \bar{\alpha}_v^m)q^{-md_v}}{1-(\alpha_v^m + \bar{\alpha}_v^m)q^{-md_v}} \leq \frac{\nu+4}{2}$$

(здесь $\nu = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{n_{E_i/K_i}}{g_{K_i}}$).

4.5 Обобщения теоремы Брауэра–Зигеля

4.5.1 Предельные дзета-функции и теорема Брауэра–Зигеля

Наш подход к результатам, обобщающим теорему Брауэра–Зигеля, основан на понятии предельной дзета-функции.

Определение 4.5.1. *Пусть $\{\zeta_k(s)\}$ — асимптотически точное семейство дзета-функций. Тогда соответствующая предельная дзета-функция определяется как*

$$\zeta_{\mathbf{lim}}(s) = \exp\left(\sum_{f=1}^{\infty} \frac{\lambda_f}{f}\, q^{-fs}\right).$$

Замечание 4.5.2. Если дзета-функции $\zeta_k(s) = \zeta_{f_k}(s)$ построены по некоторым арифметическим или геометрическим объектам f_k, то мы будем обозначать соответствующую предельную дзета-функцию $\zeta_{\{f_k\}}(s)$.

Замечание 4.5.3. Основное неравенство из теоремы 4.4.5 может быть переформулировано в терминах $\zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ следующим образом:

$$-\sum_{i=0}^{d_{\mathbf{e}}} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} - w_i} \leq -\frac{1}{\log q}\,\frac{\zeta'_{\mathbf{lim}}(s)}{\zeta_{\mathbf{lim}}(s)} \leq \sum_{i=0}^{d_{\mathbf{e}}} \frac{\gamma_i}{q^{s-i/2} + w_i}.$$

Вот некоторые элементарные свойства предельных дзета-функций:

Предложение 4.5.4.

1. *Для асимптотически точного семейства дзета-функций $\{\zeta_k(s)\}$ ряд для $\log \zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ абсолютно и равномерно сходится на компактах в области $\operatorname{Re} s > \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$, определяя там аналитическую функцию.*

2. *Если семейство является асимптотически очень точным, то функция $\zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ непрерывна при $\operatorname{Re} s \geq \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$.*

3. *Если для семейства выполнено $\lambda_j \geq 0$ для всех j и $w_{d_{\mathbf{e}}} = 1$, то ряд для $\log \zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ абсолютно и равномерно сходится в области $\operatorname{Re} s \geq \frac{d_{\mathbf{e}}}{2} - \delta$ для некоторого $\delta > 0$.*

Доказательство. Первая часть предложения очевидным образом следует из предложений 4.3.5 и 4.3.9.

По определению асимптотически очень точного семейства, ряд для $\log \zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ сходится равномерно и абсолютно при $\operatorname{Re} s \geq \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$, а значит, определяет в этой области непрерывную функцию. Таким образом, и вторая часть предложения доказана.

Чтобы получить третью часть, мы применяем следствие 4.4.6, чтобы вывести, что семейство асимптотически очень точное. Затем мы используем хорошо известный результат о том, что областью сходимости ряда Дирихле с неотрицательными коэффициентами является открытая полуплоскость $\operatorname{Re} s > \sigma$. □

Оказывается немаловажным понять, в какой мере предельные дзета-функции являются пределами соответствующих дзета-функций над конечными полями. Ответ на этот вопрос дается теоремой Брауэра–Зигеля. Прежде чем сформулировать ее, дадим еще одно определение.

Определение 4.5.5. *Для асимптотически точного семейства дзета-функций* $\{\zeta_k(s)\}$ *предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log \zeta_k(s)}{g_k}$ *называется отношением Брауэра–Зигеля этого семейства.*

Теорема 4.5.6 (Обобщенная теорема Брауэра–Зигеля)**.** *Для асимптотически точного семейства дзета-функций* $\{\zeta_k(s)\}$ *и любого* s *такого, что* $\operatorname{Re} s > \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$*, мы имеем:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log \zeta_{\mathbf{e},k}(s)}{g_k} = \log \zeta_{\mathbf{lim}}(s).$$

Если, кроме того, $2\operatorname{Re} s \notin \mathbb{Z}$*, то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log \zeta_k(s)}{g_k} = \log \zeta_{\mathbf{lim}}(s).$$

Сходимость равномерна в каждой области $\frac{d_{\mathbf{e}}}{2} + \epsilon < \operatorname{Re} s < \frac{d_{\mathbf{e}}+1}{2} - \epsilon$, $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Доказательство. Чтобы получить первое утверждение теоремы мы применяем предложение 4.3.9 и переставляем предел, когда $k \to \infty$, и суммирование. Это можно сделать, так как рассматриваемый ряд абсолютно и равномерно сходится в маленькой (но фиксированной) окрестности s.

Для того, чтобы получить второе утверждение, мы применяем предложение 4.3.5, которое дает нам:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log \zeta_{\mathbf{n},k}(s)}{g_k} = 0.$$

Теперь, вторая часть теоремы следует из первой. □

Замечание 4.5.7. Может показаться неясным, почему мы называем теоремой Брауэра–Зигеля утверждение последней теоремы. Мы увидим ниже в §4.5.3, что из теоремы

4.5.6 действительно следует естественный аналог теоремы Брауэра–Зигеля для кривых и многообразий над конечными полями. Стоит отметить, насколько простым становится доказательство обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля, если дать подходящие определения.

Замечание 4.5.8. Наметим другой способ доказательства обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля. Он может показаться излишне сложным, но имеет то преимущество, что он остается применимым в случае числовых полей, где ряд для $\log L_k(s)$ может расходиться при $\mathrm{Re}\, s > \frac{d}{2}$. Мы будем рассматривать L-функции, чтобы упростить обозначения. Основная идея — доказать, используя формулу Старка (предложение 4.2.5 в случае L-функций над конечными полями), что $\frac{L_k'(s)}{L_k(s)} \leq C(\epsilon) g_k$ для всех s таких, что $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{d}{2} + \epsilon$. Затем мы применяем теорему Витали из комплексного анализа, утверждающую, что для последовательности ограниченных голоморфных функций в области $\mathcal{D}$ достаточно проверить сходимость на множестве точек $\mathcal{D}$, имеющем предельную точку в $\mathcal{D}$.

Замечание 4.5.9. Естественно задать вопрос о том, каково поведение предельных дзета и L-функций для $\mathrm{Re}\, s \leq \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$. К сожалению, хорошие свойства L-функций, такие как функциональное уравнение или гипотеза Римана, перестают быть верными для $L_{\mathbf{lim}}(s)$. Это может быть увидено уже на примере семейств дзета-функций кривых. Проблема состоит в том, что поведение $L_{\mathbf{lim}}(s)$ может значительно отличаться от поведения $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log L_k(s)}{g_k}$, когда мы проходим через критическую прямую.

4.5.2 Поведение в центральной точке

Зададимся вопросом о том, какова связь между предельной дзета-функцией и пределом дзета-функций над конечными полями на критической прямой (то есть при $\mathrm{Re}\, s = \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$). Связь эта представляется весьма непростой. Например, несложно видеть, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{g_k} \frac{\zeta_k'(1/2)}{\zeta_k(1/2)}$ всегда равен 1 для семейств кривых (это получается из функционального уравнения), что, конечно, не верно для $\frac{\zeta_{\mathbf{lim}}'(1/2)}{\zeta_{\mathbf{lim}}(1/2)}$.

Однако, знание этой связи важно для некоторых арифметических приложений (см. пример эллиптических поверхностей в следующем параграфе). Кажется, что для "хороших" семейств утверждение обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля должно быть верным и при $s = \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$. Имеется очень небольшое число случаев, когда мы умеем доказывать это (см. обсуждение в §4.7) и, на самом деле, мы даже не можем сформулировать подходящей гипотезы, так как не ясно, какие условия необходимо накладывать на рассматриваемые L-функции.

Тем не менее, в общем случае мы можем доказать "легкое" неравенство. Термин "легкое" позаимствован из классической теоремы Брауэра–Зигеля из числового случая, где верхняя граница является безусловной (и ее не очень сложно доказать), тогда как нижняя граница не доказана в общем случае (требуется предположить, либо, что выполнена обобщенная гипотеза Римана, либо некоторое условие нормальности на рассматриваемые числовые поля). Эта аналогия, однако, не идет слишком далеко, так как в классической теореме Брауэра–Зигеля изучается поведение дзета-функций вдали от критической прямой, здесь же нас интересует более тонкий вопрос о поведении дзета-функций на критической прямой.

Пусть $\{\zeta_k(s)\}$ — асимптотически точное семейство дзета-функций. Определим r_k и c_k из разложения в ряд Тейлора:

$$\zeta_k(s) = c_k \left(s - \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}\right)^{r_k} + O\left(\left(s - \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}\right)^{r_k+1}\right).$$

Теорема 4.5.10. *Для асимптотически очень точного семейства дзета-функций $\{\zeta_k(s)\}$ такого, что $w_{d_{\mathbf{e}}} = 1$ мы имеем:*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log |c_k|}{g_k} \leq \log \zeta_{\mathbf{lim}}\left(\frac{d_{\mathbf{e}}}{2}\right).$$

Доказательство. Заменяя семейство $\{\zeta_k(s)\}$ на семейство $\{\zeta_{\mathbf{e},k}(s)\}$, мы можем предполагать, что $d = d_{\mathbf{e}}$.

Запишем

$$\zeta_k(s) = c_k \left(s - \frac{d}{2}\right)^{r_k} F_k(s),$$

где $F_k(s)$ — аналитическая функция в окрестности $s = \frac{d}{2}$ такая, что $F_k\left(\frac{d}{2}\right) = 1$. Положим $s = \frac{d}{2} + \theta$, где $\theta > 0$ — маленькое положительное число. Имеем следующее равенство:

$$\frac{\log \zeta_k(\frac{d}{2} + \theta)}{g_k} = \frac{\log c_k}{g_k} + r_k \frac{\log \theta}{g_k} + \frac{\log F_k(\frac{d}{2} + \theta)}{g_k}.$$

Для доказательства теоремы достаточно построить последовательность θ_k такую, что

1. $\frac{1}{g_k}\log\zeta_k\left(\frac{d}{2}+\theta_k\right)\to\log\zeta_{\mathbf{lim}}\left(\frac{d}{2}\right)$;

2. $\frac{r_k}{g_k}\log\theta_k\to 0$;

3. $\liminf\frac{1}{g_k}\log F_k\left(\frac{d}{2}+\theta_k\right)\geq 0$.

Для всякого натурального числа N найдем убывающую последовательность $\theta(N)$, удовлетворяющую условию

$$\left|\zeta_{\mathbf{lim}}\left(\frac{d}{2}\right)-\zeta_{\mathbf{lim}}\left(\frac{d}{2}+\theta(N)\right)\right|<\frac{1}{2N}.$$

Это возможно, так как функция $\zeta_{\mathbf{lim}}(s)$ непрерывна при $\operatorname{Re}s\geq\frac{d}{2}$ по предложению 4.5.4. Затем, выберем такую последовательность $k'(N)$, что

$$\left|\frac{1}{g_k}\log\zeta_k\left(\frac{d}{2}+\theta\right)-\log\zeta_{\mathbf{lim}}\left(\frac{d}{2}+\theta\right)\right|<\frac{1}{2N}$$

для любого $\theta\in[\theta(N+1),\theta(N)]$ и любого $k\geq k'(N)$. Это можно сделать ввиду теоремы 4.5.6. Теперь, выберем $k''(N)$ так, что

$$\frac{r_k\log\theta(N+1)}{g_k}\leq\frac{\theta(N)}{N}$$

для всех $k\geq k''(N)$. Такой выбор возможен, так как следствие 4.6.2 гарантирует нам, что для асимптотически очень точного семейства $\frac{r_k}{g_k}\to 0$. Наконец, выберем возрастающую последовательность $k(N)$ такую, что $k(N)\geq\max(k'(N),k''(N))$ для всех N.

Теперь, если определить $N=N(k)$ из условия $k(N)\leq k\leq k(N+1)$ и положить $\theta_k=\theta(N(k))$, то, из наложенных выше ограничений на θ_k, мы автоматически получаем (1) и (2). Более тонким является условие (3). Применим формулу Старка из предложения 4.2.5, чтобы получить оценку на $\left(\log F_k\left(\frac{d}{2}+\theta\right)\right)'$:

$$\frac{1}{g_k}\left(\log\zeta_k\left(\frac{d}{2}+\theta\right)+r_k\log\theta\right)'=-\frac{\log q}{2g_k}\sum_{i=0}^{d}w_ig_i+$$
$$+\frac{1}{g_k}\sum_{i=0}^{d-1}w_i\sum_{L_i(\theta_{ij})=0}\frac{1}{\frac{d}{2}+\theta-\theta_{ij}}+\frac{1}{g_k}\sum_{L_d(\theta_{dj})=0}\frac{1}{\frac{d}{2}+\theta-\theta_{dj}}.$$

Первый член в правой части равенства, очевидным образом, ограничен снизу числом $-\log q$. Первая сумма, включающая в себя L-функции также ограничена снизу постоянной C_1, что можно заключить, применяя формулу Старка к каждой из L-функций, а затем, используя предложение 4.3.5. Последняя сумма неотрицательна. Таким образом, мы видим, что $\frac{1}{g_k}\left(\log F_k\left(\frac{d}{2}+\theta\right)\right)' \geq C$ для всякого достаточно малого θ. Из этого и из того, что $F_k\left(\frac{d}{2}\right) = 1$, мы заключаем, что

$$\frac{1}{g_k}\log F_k\left(\frac{d}{2}+\theta_k\right) \geq C\theta_k \to 0.$$

Это доказывает (3), а значит, и утверждение теоремы. □

Замечание 4.5.11. Доказательство теоремы показывает важность "низколежащих" нулей дзета-функций (т. е. нулей, близких к $s = \frac{d}{2}$) в изучении отношения Брауэра–Зигеля при $s = \frac{d}{2}$. Трудность контролирования этих нулей — та причина, почему мы не можем доказать нижнюю оценку на $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log|c_k|}{g_k}$.

Замечание 4.5.12. Если ограничиться рассмотрением L-функций с целыми коэффициентами (т. е. таких, что многочлен $\mathcal{L}(u)$ имеет целые коэффициенты), то можно видеть, что отношение $\frac{\log|c_k|}{g_k}$ ограничено снизу числом $-d\log q$, по крайней мере, для четных d. Это следует из простого наблюдения, что, если многочлен с целыми коэффициентами принимает ненулевое значение в целой точке, то это значение по абсолютной величине не меньше единицы. Можно задать вопрос, имеется ли такая нижняя граница для всех d и выполняется ли нечто подобное в числовом случае.

4.5.3 Примеры

Пример 4.5.13 (Кривые над конечными полями). Прежде всего, покажем, что классическая теорема Брауэра–Зигеля для кривых над конечными полями, доказанная в [66], является следствием обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля 4.5.6.

Пусть h_X — число $\mathbb{F}_q$-рациональных точек на якобиане кривой X, т. е. $h_X = |\operatorname{Pic}^0_{\mathbb{F}_q}(X)|$.

Следствие 4.5.14. *Для асимптотически точного семейства кривых* $\{X_i\}$ *над конечным полем* $\mathbb{F}_q$ *имеет место равенство:*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log h_i}{g_i} = \log q + \sum_{f=1}^{\infty}\phi_f \log\frac{q^f}{q^f-1}. \tag{4.8}$$

Доказательство. Хорошо известно, что для кривой X число h_X может быть выражено как $h_X = \mathcal{L}_X(1)$, где $\mathcal{L}_X(u)$ — числитель дзета-функции X. Используя функциональное уравнение для $\zeta_X(s)$, мы видим, что $L_X(0) = L_X(1) + g \log q$.

Правая часть равенства (4.8) может быть записана как $\log q + 2\log\zeta_{\{X_i\}}(1)$, где $\zeta_{\{X_i\}}(s)$ — предельная дзета-функция (множитель 2 появляется из определения $\log\zeta_{\{X_i\}}(s)$, в котором мы делим на $2g$, а не на g). Значит, достаточно доказать, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log L_{X_i}(1)}{2g_i} = \log\zeta_{\{X_i\}}(1).$$

Это немедленно следует из первого равенства теоремы 4.5.6. □

Почти такое же доказательство дает еще один результат об асимптотическом поведении инвариантов функциональных полей. Чтобы сформулировать его, определим так называемые постоянные Эйлера–Кронекера кривой X (см. [29]):

Определение 4.5.15. *Пусть X — кривая над конечным полем $\mathbb{F}_q$, рассмотрим разложение в ряд Тейлора в точке $s = 1$ функции $\frac{\zeta_X'(s)}{\zeta_X(s)}$:*

$$\frac{\zeta_X'(s)}{\zeta_X(s)} = -(s-1)^{-1} + \gamma_X^0 + \gamma_X^1(s-1) + \gamma_X^2(s-1)^2 + \dots.$$

Тогда $\gamma_X = \gamma_X^0$ называется постоянной Эйлера–Кронекера кривой X, а γ_X^k, $k \geq 1$ называются высшими постоянными Эйлера–Кронекера X.

Определим также асимптотические постоянные Эйлера–Кронекера $\gamma_{\{X_i\}}^k$ из равенства:

$$\frac{\zeta_{\{X_i\}}'(s)}{\zeta_{\{X_i\}}(s)} = \gamma_{\{X_i\}}^0 + \gamma_{\{X_i\}}^1(s-1) + \gamma_{\{X_i\}}^2(s-1)^2 + \dots$$

($\zeta_{\{X_i\}}(s)$ является голоморфной функцией, не обращающейся в ноль в точке $s = 1$, так что ее логарифмическая производная не имеет полюса в этой точке).

Следующий результат обощает теорему 2 из [29]:

Следствие 4.5.16. *Для асимптотически точного семейства кривых $\{X_i\}$ имеем:*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\gamma_i^k}{g_i} = \gamma_{\{X_i\}}^k$$

для всякого целого неотрицательного k. В частности,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\gamma_i}{g_i} = -\sum_{f=1}^{\infty} \frac{\phi_f f \log q}{q^f - 1}.$$

Доказательство. . Применим первое равенство из теоремы 4.5.6. Используя явное выражение $(1-q^{-s})(1-q^{1-s})$ для пренебрежимой части дзета-функций, мы видим, что

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log\zeta_{X_i}(s)}{2g_i}=\log\zeta_{\{X_i\}}(s)$$

для всех s таких, что $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$ и $s\neq 1+\frac{2\pi k}{\log q}$, $k\in\mathbb{Z}$, причем сходимость равномерна в области $a<|s-1|<b$ для достаточно малых a и b. Теперь, чтобы получить утверждение следствия, мы дифференцируем обе части равенства и используем интегральную формулу Коши. □

Замечание 4.5.17. Весьма интересным было бы изучить поведение γ_X^k "на конечном уровне", т. е. попытаться получить границы на γ_X^k для конкретных кривых X. Это было сделано в [29] для γ_X. В общем случае может быть полезной явная версия обобщенной теоремы Брауэра–Зигеля из главы 2.

Замечание 4.5.18. Стоит отметить, что все следствия выше описывают соотношение между $\log\zeta_{X_i}(s)$ и $\log\zeta_{\{X_i\}}(s)$ в окрестности точки $s=1$. Теорема 4.5.6 значительно сильнее, так как она дает это соотношение при всех s с $\operatorname{Re}s>\frac{1}{2}$.

Пример 4.5.19 (Многообразия над конечными полями). Как и для кривых, для многообразий над конечными полями мы получаем аналогичные следствия, касательно асимптотического поведения $\zeta_{X_i}(s)$ в окрестности точки $s=d$. Мы приводим лишь формулировки, так как доказательства почти дословно повторяют предыдущие.

Следующий результат (теорема Брауэра–Зигеля для многообразий) был ранее доказан в [70].

Следствие 4.5.20. *Для асимптотически точного семейства многообразий $\{X_i\}$ размерности d над конечным полем $\mathbb{F}_q$ мы имеем:*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log|\kappa_i|}{b(X_i)}=\sum_{f=1}^{\infty}\phi_f\log\frac{q^{fd}}{q^{fd}-1},$$

где $\kappa_i=\operatorname{Res}_{s=d}\zeta_{X_i}(s)$.

В следующем следствии для многообразий над конечными полями мы используем то же определение постоянных Эйлера–Кронекера, что и для кривых (см. предыдущий пример).

Следствие 4.5.21. *Для асимптотически точного семейства многообразий* $\{X_i\}$ *мы имеем* $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\gamma_i^k}{b(X_i)}=\gamma_{\{X_i\}}^k$ *для всех* k. *В частности,* $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{\gamma_i}{b(X_i)}=-\sum\limits_{f=1}^{\infty}\frac{\phi_f f\log q}{q^{fd}-1}$.

Пример 4.5.22 (Эллиптические кривые над функциональными полями). Напомним, прежде всего, гипотезы, обобщающие теорему Брауэра–Зигеля на случай эллиптических кривых над функциональными полями, сформулированные Андри–Пачеко [22] и Кунявским–Цфасманом [36].

Для эллиптической кривой E/K, $K=\mathbb{F}_q(X)$ определим $c_{E/K}$ и $r_{E/K}$ из равенства $L_{E/K}(s)=c_{E/K}(s-1)^{r_{E/K}}+o\left((s-1)^{r_{E/K}}\right)$. Инварианты $r_{E/K}$ и $c_{E/K}$ важны с арифметической точки зрения, так как, согласно гипотезе Берча и Свиннертона-Дайера, число $r_{E/K}$ равно рангу группы K-рациональных точек кривой E/K, а $c_{E/K}$ выражается через порядок группы Шафаревича–Тейта, кообъем решетки Морделла–Вейля (регулятор) и некоторые другие инварианты E/K, которые более просто контролировать.

Гипотеза 4.5.23 (Андри–Пачеко). *Пусть* E_i *пробегает семейство попарно неизоморфных эллиптических кривых над фиксированным функциональным полем* K. *Тогда*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log|c_{E_i/K}|}{h(E_i)}=0,$$

где $h(E_i)$ *— логарифмическая высота* E_i.

Замечание 4.5.24. В утверждении этой гипотезы мы могли делить $\log|c_{E_i/K}|$ на n_{E_i}, так как $h(E_i)$ и n_{E_i} имеют схожий порядок роста.

Гипотеза 4.5.25 (Кунявский–Цфасман). *Для семейства эллиптических кривых* $\{E_i/K_i\}$, *полученного заменой базы, имеет место равенство:*

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log|c_{E_i/K_i}|}{g_{K_i}}=-\sum_{v\in X, f\geq 1}\phi_{v,f}\log\frac{|E_v(\mathbb{F}_{\mathrm{N}v^f})|}{\mathrm{N}v^f}.$$

Несложно видеть, что обе гипотезы являются утверждениями, подобными тем, что рассматривались в §4.5.2. Это довольно очевидно для первой гипотезы, а для второй гипотезы это ясно из следующего явного выражения для предельной L-функции:

$$\log L_{\{E_i/K_i\}}(s)=-\frac{1}{\nu+4}\sum_{v,f}\phi_{v,f}\log\left(1-(\alpha_v^f+\bar{\alpha}_v^f)\mathrm{N}v^{-fs}+\mathrm{N}v^{f(1-2s)}\right).$$

Можно объединить эти гипотезы следующим образом:

Гипотеза 4.5.26. *Для асимптотически очень точного семейства $\{E_i/K_i\}$ эллиптических кривых над функциональными полями имеет место равенство:*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log |c_{E_i/K_i}|}{g_i} = \log L_{\{E_i/K_i\}}(1),$$

где g_i — степень L-функции $L_{E_i/K_i}(s)$.

Из теорем 4.5.6 и 4.5.10 получается следующий результат в направлении гипотез, сформулированных выше:

Теорема 4.5.27. *Для асимптотически очень точного семейства эллиптических кривых $\{E_i/K_i\}$ при $\operatorname{Re} s > 1$ верно равенство*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log L_{E_i/K_i}(s)}{g_i} = \log L_{\{E_i/K_i\}}(s)$$

(здесь $g_i = n_{E_i} + 4g_{K_i} - 4$). Более того,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log |c_{E_i/K_i}|}{g_i} \leq \log L_{\{E_i/K_i\}}(1).$$

Замечание 4.5.28. Если рассматривать семейства постоянных эллиптических кривых (т. е. $E_i = E \times X_i$, где $E/\mathbb{F}_q$ — фиксированная эллиптическая кривая), то из доказательства теоремы 2.1 из [36] следует, что вопрос о поведении $L_{E_i/X_i}(s)$ в точке $s = 1$ сводится к вопросу о поведении $\zeta_{X_i}(s)$ на критической прямой. Например, если кривая E — суперсингулярна, то гипотеза 4.5.26 выполняется тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{\log|\zeta_{X_i}(1/2)|}{g_i} = \log \zeta_{\{X_i\}}(1/2)$ (где $\zeta_{X_i}(1/2)$ понимается как первый ненулевой коэффициент в разложении $\zeta_{X_i}(s)$ в ряд Тейлора в точке $s = \frac{1}{2}$). Таким образом, для доказательства простейшего случая гипотезы 4.5.26 необходимо понять асимптотическое поведение дзета-функций кривых над конечными полями на критической прямой.

4.6 Распределение нулей

4.6.1 Основные результаты

В этом параграфе мы доказываем результаты о предельном распределении нулей в семействах L-функций. Как следствие этих результатов, мы увидим, что кратности нулей в асимптотически очень хороших семействах L-функций не могут расти очень быстро.

Пусть $C = C[-\pi, \pi]$ — пространство вещественно-значных непрерывных функций на $[-\pi, \pi]$ с топологией равномерной сходимости. Пространство мер μ на $[-\pi, \pi]$ по определению есть пространство $\mathcal{M}$, топологически двойственное к C. На $\mathcal{M}$ имеется $*$-слабая топология: $\mu_i \to \mu$ тогда и только тогда, когда $\mu_i(f) \to \mu(f)$ для всех $f \in C$.

Пространство C может рассматриваться как подпространство $\mathcal{M}$: если $\phi(x) \in C$, то $\mu_\phi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)\, dx$. Подпространство C плотно в $\mathcal{M}$ в $*$-слабой топологии.

Пусть $L(s)$ — L-функция и пусть $\rho_1, \ldots, \rho_g$ — нули соответствующего многочлена $\mathcal{L}(u)$. Определим $\theta_k \in (-\pi, \pi]$ из формулы $\rho_k = q^{-d/2} e^{i\theta_k}$. Функции $L(s)$ можно сопоставить меру:

$$\mu_L(f) = \frac{1}{g} \sum_{k=1}^{g} \delta_{\theta_k}(f), \tag{4.9}$$

где δ_{θ_k} — мера Дирака с носителем в θ_k, т. е. $\delta_{\theta_k}(f) = f(\theta_k)$ для $f \in C$.

Основной результат этого параграфа таков:

Теорема 4.6.1. *Пусть $\{L_j(s)\}$ — асимптотически очень точное семейство L-функций. Тогда предел $\mathcal{M}_{\mathbf{lim}} = \lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{M}_j$ существует. Более того, $\mathcal{M}_{\mathbf{lim}}$ — неотрицательная непрерывная функция, задаваемая абсолютно и равномерно сходящимся рядом:*

$$\mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(kx) q^{-\frac{dk}{2}}.$$

Доказательство. Абсолютная и равномерная сходимость ряда следует из определения асимптотически очень точного семейства. Достаточно доказать сходимость мер на пространстве C.

Линейные комбинации $\cos(mx)$ и $\sin(mx)$ плотны в пространстве непрерывных функций C, а значит, достаточно доказать, что для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ имеются равенства:

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_j(\cos(mx)) = \mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(\cos(mx)), \tag{4.10}$$

и

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_j(\sin(mx)) = \mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(\sin(mx)). \tag{4.11}$$

Следствие 4.2.4 показывает, что

$$\mathcal{M}_j(\cos(mx)) = \sum_{k=1}^{g_j} \cos(m\theta_{kj}) = -2\Lambda_m q^{-\frac{dm}{2}}$$

для $m \neq 0$, и $\mathcal{M}_j(1) = g_j$. Деля на g_j и переходя к пределу при $j \to \infty$, мы получаем (4.10).

Теперь заметим, что, если $\rho = e^{i\theta}$ с $\theta \neq k\pi$ является корнем $\mathcal{L}(u)$, то $\rho = e^{i(\theta+\pi)}$ — также корень $\mathcal{L}(u)$ той же кратности. Значит, $\mathcal{M}_j(\sin(mx)) = 0 = \mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(\sin(mx))$ для всех j и m, т. е. мы получаем (4.11). Теорема доказана. □

Следствие 4.6.2. *Пусть $\{\zeta_j(s)\}$ — асимптотически очень точное семейство дзета-функций, удовлетворяющее условию $w_{d_{\mathbf{e}}} = 1$. Пусть r_j — порядок нуля $\zeta_j(s)$ в точке $s = \frac{d_{\mathbf{e}}}{2}$. Тогда*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{r_j}{g_j} = 0.$$

Доказательство. Предположим, что $\limsup \frac{r_j}{g_j} = \epsilon > 0$. Переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что $\lim\limits_{j\to\infty} \frac{r_j}{g_j} = \epsilon$. Еще раз переходя к подпоследовательности с использованием предложения 4.3.12, мы можем предположить, что работаем с асимптотически точным семейством L-функций $\{L_j(s)\} = \{L_{jd_{\mathbf{e}}}(s)\}$, для которого выполняется то же условие на рост r_j.

По предыдущей теореме $\lim\limits_{j\to\infty} \mathcal{M}_j = \mathcal{M}_{\mathbf{lim}}$. Возьмем непрерывную неотрицательную функцию $f(x) \in C[-\pi,\pi]$ с носителем, содержащимся в $(-\frac{\epsilon}{\alpha}, \frac{\epsilon}{\alpha})$, где $\alpha = 4\max\{\int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(x)\,dx, 1\}$ и такую, что $f(0) = 1$. Тогда

$$\epsilon \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{M}_j(f(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathcal{M}_{\mathbf{lim}}(x)\,dx \leq \frac{\epsilon}{2},$$

и мы приходим к противоречию. □

Замечание 4.6.3. То же самое доказательство позволяет увидеть, что кратность нуля в фиксированной точке на критической прямой растет асимптотически медленнее, чем g.

Замечание 4.6.4. Используя теорему 4.6.1, можно получить еще одно доказательство основного неравенства для асимптотически очень точных семейств L-функций (следствие 4.4.2). Действительно, все меры, определенные равенством (4.9), неотрицательны.

Значит, и предельная мера $\mathcal{M}_{\mathbf{lim}}$ должна иметь неотрицательную плотность в любой точке, в частности, в точке $x = 0$. Это дает нам в точности основное неравенство. Кроме этого, мы получаем интерпретацию разности между правой и левой частями основного неравенства: это "асимптотическое число нулей $L_j(s)$, собирающихся в окрестности $s = \frac{d}{2}$".

На самом деле, используя предыдущее рассуждение, мы получаем целое семейство неравенств (которые представляют интерес, когда не все коэффициенты λ_f неотрицательны):

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos(kx) q^{-\frac{dk}{2}} \leq \frac{1}{2}$$

для всякого $x \in \mathbb{R}$.

4.6.2 Примеры

Пример 4.6.5 (Кривые над конечными полями). В случае кривых над конечными полями мы получаем в точности теорему 2.1 из [66]:

Следствие 4.6.6. *Для асимптотически точного семейства* $\{X_i\}$ *кривых над конечным полем* $\mathbb{F}_q$ *предел* $\mathcal{M}_{\{X_i\}} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}_{X_i}$ *является непрерывной функцией, задающейся абсолютно и равномерно сходящимся рядом:*

$$\mathcal{M}_{\{X_i\}}(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} k\phi_k h_k(x),$$

где

$$h_k(x) = \frac{q^{k/2}\cos(kx) - 1}{q^k + 1 - 2q^{k/2}\cos(kx)}.$$

Доказательство. Это следует из теоремы 4.6.1 и следующего разложения в ряд:

$$\sum_{l=1}^{\infty} t^{-l}\cos(lkx) = \frac{t\cos(kx) - 1}{t^2 + 1 - 2t\cos(kx)}.$$

□

Пример 4.6.7 (Многообразия над конечными полями). Мы не можем сказать многого в этом случае, так как теорема о распределении нулей 4.6.1 применима только к L-функциям. Единственный результат, который мы получаем, — это то, что кратность нулей на прямой $\operatorname{Re} s = d - \frac{1}{2}$, деленная на сумму чисел Бетти, стремится к нулю (следствие 4.6.2).

Пример 4.6.8 (Эллиптические кривые над функциональными полями). Рассмотрим сначала асимптотически плохие семейства эллиптических кривых. Мы имеем следующее следствие теоремы 4.6.1.

Следствие 4.6.9. *Для асимптотически плохого семейства эллиптических кривых* $\{E_i\}$ *над функциональными полями нули* $L_{E_i}(s)$ *равномерно распределены на критической прямой, когда* $i \to \infty$.

Это результат для семейств эллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_q(t)$ был получен в [50]. На самом деле, в отличие от нас, Мишель получает оценку для разности $\mathcal{M}_i - \mathcal{M}_{\{E_i\}}$ в терминах кондуктора n_{E_i}. Было бы интересно получить такую оценку в общем случае.

Следствие 4.6.10. *Для асимптотически очень хорошего семейства эллиптических кривых* $\{E_i/K_i\}$, *полученного заменой базы, предел* $\mathcal{M}_{\{E_i/K_i\}} = \lim_{i\to\infty} \mathcal{M}_{E_i/K_i}$ *является непрерывной функцией, задаваемой абсолютно и равномерно сходящимся рядом:*

$$\mathcal{M}_{\{E_i/K_i\}}(x) = 1 - \frac{2}{\nu+4} \sum_{v,f} \phi_{v,f} f d_v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_v^k + \bar{\alpha}_v^k}{q^{f d_v k}} \cos(f d_v k x).$$

Следствие 4.6.11. *Для семейства эллиптических кривых* $\{E_i/K_i\}$, *получаемого заменой базы,*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{r_i}{g_i} = 0.$$

Доказательство. По предложению 4.3.18 всякое такое семейство содержит асимптотически точное подсемейство, а значит, мы можем применить следствие 4.6.2. □

Замечание 4.6.12. Для фиксированного поля K и эллиптических кривых над ним похожее утверждение может быть получено из оценок, приведенных в [6]. Однако, в случае замены базы, оценки Брюмера не позволяют получить следствие 4.6.2. Было бы интересным получить оценки на ранг эллиптических кривых, дающие хорошие результаты при изменении поля K. Должно быть возможным получить такие оценки с помощью подходящего выбора тестовой функции в явных формулах.

4.7 Открытые вопросы и дальнейшие направления для исследования

В этом параграфе мы даем сводку открытых проблем и вопросов, возникающих естественным образом в связи с результатами, полученными в предыдущих параграфах этой главы. Начнем с общих вопросов. Прежде всего:

Вопрос 4.7.1. До какой степени формальные дзета и L-функции, определенные в §4.2, приходят из геометрии?

Можно уточнить этот вопрос несколькими способами. Например, можно спросить, верно ли, что всякая L-функция веса d, такая что $\mathcal{L}(u)$ имеет целые коэффициенты, является характеристическим многочленом автоморфизма Фробениуса, действующего на d-ой группе когомологий некоторого многообразия $V/\mathbb{F}_q$. Частичный ответ на этот вопрос при $d = 1$ дается теоремой Хонды–Тейта об абелевых многообразиях [62]. Аналогичный вопрос можно задать для мотивов над $\mathbb{F}_q$. Все это напоминает гипотезы для L-функций из класса Сельберга в случае числовых полей (модулярность, представления Галуа и т. д.) [63].

Вопрос 4.7.2. Описать множество $\{(\lambda_1, \lambda_2, \dots)\}$ для асимптотически точных (очень точных) семейств дзета-функций (L-функций).

Имеются некоторые ограничения на это множество, задаваемые основными неравенствами (теоремы 4.4.1 и 4.4.5, замечание 4.6.4). Было бы интересно понять, имеются ли другие ограничения. Подчеркнем, что проблема не является арифметической по своей сути, так как мы не предполагаем, что коэффициенты многочленов, соответствующих L-функциям, являются целыми. Интересно было бы понять, какие дополнительные ограничения вносит такое условие целочисленности. Заметим, что, используя геометрические конструкции, Цфасман и Влэдуц [66] доказали, что все множества параметров λ_f, удовлетворяющие $\lambda_f \geq 0$ для всех f, а также основному неравенству, реализуются в случае, когда q — квадрат, а $d = 1$. Из этого следует аналогичное утверждение для L-функций с любыми q и d. Однако, новые L-функции уже не обязательно будут иметь целые коэффициенты.

Вопрос 4.7.3. Как много асимптотически хороших (очень хороших) семейств имеется среди всех семейств?

Стоит уточнить понятие “как много” в этом вопросе. Один из возможных способов сделать это таков. Рассмотрим множество V_g векторов коэффициентов многочленов, соответствующих L-функциям степени g и его подмножество $V_g(f, a, b)$, состоящее из векторов коэффициентов многочленов, соответствующих L-функциям с $a < \frac{\Lambda_f}{g} < b$. Естественный вопрос: верно ли, что отношение объема $V_g(f, a, b)$ к объему V_g имеет предел, когда $g \to \infty$, и чему этот предел равен. См. работу [11] для дополнительной информации о множестве V_g. Этот вопрос частично основывается на том факте, что асимптотически хорошие семейства кривых строить трудно, и нам бы хотелось понять, почему это так.

Зададим теперь вопросы, касательно конкретных результатов об L-функциях, доказанных в предыдущих параграфах.

Вопрос 4.7.4. Верно ли, что обобщенная теорема Брауэра–Зигеля 4.5.6 имеет место на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ для некоторых (большинства) асимптотически очень точных семейств?

Очень вероятно, что без дополнительных арифметических условий на семейство утверждение не будет выполняться. Наиболее интересно изучать в данном контексте семейства эллиптических кривых над функциональными полями, рассмотренные в §4.5.3, из-за приложений данного вопроса к арифметическим проблемам. На данный момент, автору не известно ни единого семейства, происходящего из геометрии, для которого был бы известен этот результат. Можно попытаться проверить результат для конкретных семейств кривых над конечными полями, для которых дзета-функции более или менее известны. Таковы, например, семейства кривых Ферма [33] или кривых Якоби [35].

Известные нам примеры в пользу положительного ответа на вопрос приходят из числового случая. Известно, что существует последовательность $\{d_i\}$ натуральных чисел, имеющая плотность, не меньшую $\frac{1}{2}$, такая, что

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\log \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})}(\frac{1}{2})}{\log d_i} = 0$$

(см. [31]). Метод подсчета сглаженных моментов L-функций Дирихле, использованный в этой статье, весьма сложен. Было бы интересно узнать, можно ли получить аналогичные результаты в функциональном случае. Схожи вопросы для функциональных полей изучались в [33]. Не ясно, могут ли результаты про плотности уровня один для нулей, полученные в этой работе, быть применены к вопросу о получении нижней границы на $\frac{\log|c_i|}{g_i}$ для некоторой положительной пропорции полей (как в числовом, так и в функциональном случаях).

Вопрос 4.7.5. Доказать обобщенную теорему Брауэра–Зигеля 4.5.6 с явным остаточным членом.

Это было сделано для кривых над конечными полями в главе 2 и, кажется, подобный метод работает в общем случае. Также интересно было бы посмотреть на конкретные приложения, которые мог бы иметь такой результат, в частности, для получения оценок на постоянные Эйлера–Кронекера "на конечном уровне".

Вопрос 4.7.6. Как охарактеризовать меры, соответствующие асимптотически очень точным семействам?

Это было сделано в [66] для семейств, удовлетворяющих $\lambda_f \geq 0$ для всех f. Общий случай остается открытым.

Вопрос 4.7.7. Оценить остаточный член в теореме 4.6.1.

Как было упомянуто ранее, в случае эллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_q(t)$ оценки были даны в [50].

Вопрос 4.7.8. Найти явные границы на порядок нулей L-функций на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{d}{2}$.

Следствие 4.6.2 показывает, что отношение $\frac{r_i}{g_i} \to 0$ для асимптотически очень точных семейств (здесь r_i — кратность нуля). Для частного случая эллиптических кривых над фиксированным функциональным полем, Брюмер в работе [6] доказывает границы, которые асимптотически растут медленнее кондуктора. Используя явные формулы с подходящим выбором тестовых функций, должно быть возможным доказать такие верхние границы для семейств эллиптических кривых, полученных заменой базы, если не в общем случае.

Зададим, наконец, еще несколько общих вопросов.

Вопрос 4.7.9. Как можно применить результаты этой главы для получения информации об арифметических или геометрических свойствах объектов, по которым строятся L-функции?

Мы (по крайней мере, в некоторой степени) ответили на этот вопрос в случае кривых и многообразий над конечными полями и эллиптических кривых над функциональными полями. Дополнительные примеры подобного рода были бы более чем интересны.

Наконец,

Вопрос 4.7.10. Каковы анлоги результатов, полученных в этой главе, для числовых полей?

Кажется, что большинство результатов переносится на L-функции из класса Сельберга (в определении, данном, например, в [30, Глава 5]), если предположить некоторые естественные дополнительные гипотезы (такие как Обобщенная Гипотеза Римана, Обобщенная Гипотеза Рамануджана и т. д.). Конечно, для того, чтобы сделать это, потребуется преодолеть немалое количество аналитических сложностей (ср., например, [66] и [67]).

Мы надеемся обратиться к этой весьма многообещающей теме в дальнейшем.

Часть II

Абелевы многообразия размерности 3

Глава 5

Якобианы и абелевы многообразия размерности 3: формула Клейна и вопрос Серра (совместно с Ж. Лашо и К. Ритценталером)

5.1 Введение

5.1.1 Теорема Торелли

а Пусть k — алгебраически замкнутое поле, а $g \geq 1$ — целое число. Теорема Торелли утверждает, что для гладкой неприводимой проективной кривой X рода g, определенной над k, отображение $X \mapsto (\operatorname{Jac} X, j)$, ставящее в соответствие кривой X ее якобиан вместе с канонической поляризацией j, является инъективным. Вопрос об определении образа этого отображения изучается с весьма давних времен.

Пусть A_g — пространство модулей главнополяризованных абелевых многообразий размерности g, а M_g — пространство модулей гладких алгебраических кривых рода g. Если $g = 3$, то A_g и M_g имеют размерность $g(g+1)/2 = 3g-3 = 6$. Хойт [23], Орт и Уено [52] показали, что образом M_3 при отображении Торелли является пространство неразложимых главнополяризованных абелевых многообразий размерности 3. Более того, в случае, когда $k = \mathbb{C}$, Игуса [28] дал характеризацию множества разложимых трехмерных абелевых многообразий и множества гиперэллиптических якобианов, используя модулярные формы Зигеля Σ_{140} и χ_{18}. Похожая характеризация существует и для случая $g = 2$ (см. [44]).

Предположим теперь, что поле k произвольно и $g \geq 1$. Ж.-П. Серр заметил в [42], что уточненная форма теоремы Торелли показывает существование препятствия для того, чтобы якобианы над алгебраическим замыканием поля k (геометрические якобианы) были якобианами над k. Более точно, он доказал следующее:

Теорема 5.1.1. *Пусть (A, a) — главнополяризованное абелево многообразие размерности $g \geq 1$ над полем k. Предположим, что (A, a) изоморфно над $\overline{k}$ якобиану кривой X_0 рода g, определенной над $\overline{k}$. Тогда имеет место следующая альтернатива:*

1. *Если X_0 — гиперэллиптическая, то существует кривая X/k, изоморфная X_0 над $\overline{k}$, такая что (A, a) изоморфно якобиану $(\operatorname{Jac} X, j)$ над полем k.*

2. *Если X_0 — не гиперэллиптическая, то существует кривая X/k, изоморфная X_0 над $\overline{k}$ и квадратичный характер*

$$\varepsilon : \operatorname{Gal}(k^{sep}/k) \longrightarrow \{\pm 1\},$$

такие, что подкрученное абелево многообразие $(A, a)_\varepsilon$ изоморфно $(\operatorname{Jac} X, j)$ над полем k. Характер ε тривиален тогда и только тогда, когда (A, a) является k-якобианом.

Таким образом, только первый случай теоремы имеет место, если $g = 1$ или $g = 2$, так как все кривые в этом случае эллиптические или гиперэллиптические. В этой главе мы полностью решаем вопрос о характеризации якобианов над полями характеристики ноль для первого нетривиального случая $g = 3$.

5.1.2 Кривые рода 3

Предположим снова, что $g = 3$. Пусть задано неразложимое главнополяризованное трехмерное абелево многообразие (A, a) определенное над полем k. В письме Я. Топу [58] Ж.-П. Серр задает следующие вопросы:

- *Как определить, зная пару (A, a), что соответствующая кривая X является гиперэллиптической?*

- *Если кривая X не является гиперэллиптической, как найти квадратичный характер ε ?*

Будем предполагать, что $k \subset \mathbb{C}$. Ответ на первый вопрос легко дать, используя модулярные формы Зигеля Σ_{140} и χ_{18}. Что касается второго вопроса, Серр предположил, что характер ε тривиален в том и только в том случае, когда значение χ_{18} является квадратом в $k^\times$ (см. теорему 5.4.2 для более точной формулировки). Это предположение было мотивировано формулой Клейна [34], которая связывает модулярную форму χ_{18} (в обозначениях Игусы) с квадратом дискриминанта плоских квартик, которая делает правдоподобной одну из импликаций. В статье [37] Ж. Лашо и К. Ритценталер доказали утверждение Серра для трехмерного семейства абелевых многообразий и, в частности, определили постоянный множитель, входящий в формулу Клейна.

В этой главе мы доказываем, что предположение Серра верно для всех трехмерных абелевых многообразий, давая, таким образом, алгоритм, позволяющий для любого главнополяризованного трехмерного абелевого многообразия над полем k определить, является ли оно якобианом над k. Для того, чтобы сделать это, мы рассматриваем проблему более широко. Вот наша стратегия, имеющая смысл для всех $g > 1$:

1. Рассматривается действие $\overline{k}$-изоморфизмов на Зигелевы модулярные формы, определенные над k и определяются инварианты k-классов изоморфизма абелевых многообразий над k.

2. Изучается связь между модулярными формами Зигеля, Тейхмюллера и инвариантами плоских кривых.

С помощью этого подхода, мы можем доказать предположение Серра следующим образом:

- используя (2), получить, что некоторая модулярная форма Зигеля f является подходящей n-ой степенью для некоторого $n > 1$ на множестве якобианов;

- используя (1), различить якобианы и их подкрутки на характеры. Действительно, действие подкрутки на f может изменить ее значение на элемент, не являющийся n-ой степенью и, таким образом, в соответствии с пунктом (2) теоремы 5.1.1, мы получаем критерий, позволяющий выделить якобианы над k.

Для $g = 3$ формула Клейна показывает, что форма χ_{18} является квадратом на множестве якобианов и этого оказывается достаточно для характеризации этого множества. С другой стороны, мы показываем, что естественное обобщение χ_h, $h = 2^{g-2}(2^g+1)$ не дает искомой характеризации при $g > 3$.

Связь формулы Клейна с проблемой характеризации якобианов — замечательное наблюдение Серра. Мы, однако, хотим отметить, что проблема характеризации якобианов может быть решена и без нее. Вместо этого можно использовать формулу Ичикавы, связывающую χ_{18} с квадратом модулярной формы Тейхмюллера $\mu_{3,9}$. Тем не менее, мы думаем, что связь между модулярными формами Зигеля и инвариантами является интересной сама по себе. Мы используем эту связь, чтобы дать новое строгое доказательство формулы Клейна.

Эта глава организована следующим образом. В §5.2 мы напоминаем необходимые сведения из теории модулярных форм Зигеля и Тейхмюллера. Только §5.2.4 является оригинальным: мы рассматриваем действие изоморфизмов и то, как это действие отражается на значениях модулярных форм. В §5.3 мы связываем модулярные формы с некоторыми инвариантами тернарных форм. Наконец, в §5.4 мы рассматриваем случай рода $g = 3$. Прежде всего, мы доказываем формулу Клейна, затем, дается доказательство верности стратегии определения якобианов, предложенной Серром. Наконец, в последней части, мы объясняем, почему не работает очевидное обобщение теории на случай большей размерности и задаем некоторые естественные вопросы, связанные с этим.

5.2 Модулярные формы Зигеля и Тейхмюллера

5.2.1 Геометрические модулярные формы Зигеля

Для более подробного обсуждения см. [7], [9], [13], [14]. Пусть $g > 1$ и $n > 0$ — два целых числа, а $\mathsf{A}_{g,n}$ — стек модулей главнополяризованных абелевых схем относительной размерности g с симплектической структурой уровня n. Пусть $\pi : \mathsf{V}_{g,n} \longrightarrow \mathsf{A}_{g,n}$ — универсальная абелева схема с нулевым сечением $\varepsilon : \mathsf{A}_{g,n} \longrightarrow \mathsf{V}_{g,n}$, а

$$\pi_*\Omega^1_{\mathsf{V}_{g,n}/\mathsf{A}_{g,n}} = \varepsilon^*\Omega^1_{\mathsf{V}_{g,n}/\mathsf{A}_{g,n}} \longrightarrow \mathsf{A}_{g,n}$$

расслоение ранга g, индуцированное относительными регулярными дифференциальными формами степени один на $\mathsf{V}_{g,n}$ над $\mathsf{A}_{g,n}$. Относительное каноническое расслоение над $\mathsf{A}_{g,n}$ — это линейное расслоение

$$\boldsymbol{\omega} = \bigwedge^g \varepsilon^*\Omega^1_{\mathsf{V}_{g,n}/\mathsf{A}_{g,n}}.$$

Для неособого проективного многообразия X над полем k обозначим через

$$\Omega^1_k[X] = H^0(X, \Omega^1_X \otimes k)$$

конечномерное k-векторное пространство регулярных дифференциальных форм на X, определенных над k. Слой расслоения $\Omega^1_{\mathsf{V}_{g,n}/\mathsf{A}_{g,n}}$ над $A \in \mathsf{A}_{g,n}(k)$ равен $\Omega^1_k[A]$, а слоем расслоения $\boldsymbol{\omega}$ является одномерное векторное пространство

$$\boldsymbol{\omega}[A] = \bigwedge^g \Omega^1_k[A].$$

Положим $\mathsf{A}_g = \mathsf{A}_{g,1}$ и $\mathsf{V}_g = \mathsf{V}_{g,1}$. Пусть R — коммутативное кольцо, а h — натуральное число. *Геометрическая модулярная форма Зигеля* рода g и веса h над R — это элемент R-модуля

$$\mathbf{S}_{g,h}(R) = \Gamma(\mathsf{A}_g \otimes R, \boldsymbol{\omega}^{\otimes h}).$$

Заметим, что для любого $n \geq 1$ имеет место изоморфизм

$$\mathsf{A}_g \simeq \mathsf{A}_{g,n}/\operatorname{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Если $n \geq 3$, то, как показано в [51], из леммы о жесткости Серра [56], можно вывести, что пространство модулей $\mathsf{A}_{g,n}$ может быть представлено гладкой схемой над $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$.

Следовательно, для любой алгебры R над $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$, модуль $\mathbf{S}_{g,h}(R)$ является подмодулем

$$\Gamma(\mathsf{A}_{g,n} \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]} R, \boldsymbol{\omega}^{\otimes h}),$$

состоящим из элементов, инвариантных относительно действия $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Предположим теперь, что $R = k$ является полем. Если $f \in \mathbf{S}_{g,h}(k)$, A — главнополяризованное абелево многообразие размерности g, определенное над k, ω — базис $\boldsymbol{\omega}_k[A]$, определим

$$f(A, \omega) = f(A)/\omega^{\otimes h}. \tag{5.1}$$

Таким образом, модулярная форма задает правило, в соответствии с которым каждой паре (A, ω) сопоставляется элемент $f(A, \omega) \in k$. При этом

1. $f(A, \lambda\omega) = \lambda^{-h} f(A, \omega)$ для всякого $\lambda \in k^\times$.

2. $f(A, \omega)$ зависит только от $\overline{k}$-класса изоморфизма пары (A, ω).

Наоборот, всякое такое правило, определяет единственную $f \in \mathbf{S}_{g,h}(k)$. Это определение — прямое обобщение определений Делиня–Серра [10] и Катца [32] на случай $g > 1$.

5.2.2 Комплексная униформизация

Предположим, что $R = \mathbb{C}$. Напомним, что верхняя полуплоскость Зигеля рода g определяется как

$$\mathbb{H}_g = \left\{\tau \in \mathbf{M}_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau,\ \operatorname{Im}\tau > 0\right\}.$$

Пусть $\Gamma = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Как объяснено в [7, §2], комплексное орбиобразие $\mathsf{A}_g(\mathbb{C})$ может быть представлено как фактор $\Gamma\backslash\mathbb{H}_g$, где Γ действует следующим образом:

$$M.\tau = (a\tau + b)\cdot(c\tau + d)^{-1} \quad \text{для} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Группа $\mathbb{Z}^{2g}$ действует на $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g$ преобразованиями

$$v.(\tau, z) = (\tau, z + \tau m + n) \quad \text{для} \quad v = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2g}.$$

Если положить $\mathbb{U}_g = \mathbb{Z}^{2g}\backslash(\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g)$, то проекция

$$\pi : \mathbb{U}_g \longrightarrow \mathbb{H}_g$$

определяет универсальное главнополяризованное абелево многообразие со слоями

$$A_\tau = \pi^{-1}(\tau) = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g).$$

Положим $j(M,\tau) = c\tau + d$ и определим действие Γ на $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g$ по формуле

$$M.(\tau,(z_1,\ldots,z_g)) = (M.\tau, {}^t j(M,\tau)^{-1} \cdot (z_1,\ldots,z_g)) \quad \text{для } M \in \Gamma.$$

Отображение ${}^t j(M,\tau)^{-1} : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}^g$ индуцирует изоморфизм:

$$\varphi_M : A_\tau \longrightarrow A_{M.\tau}.$$

Следовательно, $\mathsf{V}_g(\mathbb{C}) \simeq \Gamma\backslash\mathbb{U}_g$, и следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
\Gamma\backslash\mathbb{U}_g \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathsf{V}_g(\mathbb{C}) \arrow[d, "\pi"'] \\
\Gamma\backslash\mathbb{H}_g \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{A}_g(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Как в [13, с. 141], положим

$$\zeta = \frac{dq_1}{q_1} \wedge \cdots \wedge \frac{dq_g}{q_g} = (2i\pi)^g dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g \in \Gamma(\mathbb{H}_g, \boldsymbol{\omega}),$$

где $(z_i,\ldots,z_g) \in \mathbb{C}^g$ и $(q_i,\ldots,q_g) = (e^{2i\pi z_1},\ldots e^{2i\pi z_g})$. Это сечение канонического расслоения является базисом $\boldsymbol{\omega}[A_\tau]$ для всех $\tau \in \mathbb{H}_g$, а относительное каноническое расслоение $\mathbb{U}_g/\mathbb{H}_g$ тривиализуется с помощью ζ:

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{U}_g/\mathbb{H}_g} = \bigwedge^g \Omega^1_{\mathbb{U}_g/\mathbb{H}_g} \simeq \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}\cdot\zeta.$$

Группа Γ действует на $\boldsymbol{\omega}_{\mathbb{U}_g/\mathbb{H}_g}$ следующим образом:

$$M.(\tau,\zeta) = (M.\tau, \det j(M,\tau)\cdot\zeta) \quad \text{для } M \in \Gamma,$$

так что

$$\varphi_M^*(\zeta_{M.\tau}) = \det j(M,\tau)^{-1}\zeta_\tau.$$

Таким образом, геометрическая модулярная форма Зигеля f веса h является следующим выражением:

$$f(A_\tau) = \widetilde{f}(\tau)\cdot\zeta^{\otimes h},$$

где $\widetilde{f}$ принадлежит (хорошо известному) векторному пространству $\mathbf{R}_{g,h}(\mathbb{C})$ *аналитических модулярных форм Зигеля* веса h на $\mathbb{H}_g$, состоящему из комплексно-значных голоморфных функций $\phi(\tau)$ на $\mathbb{H}_g$, удовлетворяющих условию

$$\phi(M.\tau) = \det j(M.\tau)^h \phi(\tau)$$

для любого $M \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Заметим, что из принципа Кошера [14, с. 11] следует, что условие голоморфности на бесконечности автоматически выполнено, ибо мы предполагаем, что $g > 1$. Имеет место следующее предложение [13, с. 141]:

Предложение 5.2.1. *Если $f \in \mathbf{S}_{g,h}(\mathbb{C})$ и $\tau \in \mathbb{H}_g$, положим*

$$\widetilde{f}(\tau) = f(A_\tau)/\zeta^{\otimes h} = (2i\pi)^{-gh} f(A_\tau)/(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)^{\otimes h}.$$

Тогда отображение $f \mapsto \widetilde{f}$ является изоморфизмом $\mathbf{S}_{g,h}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}_{g,h}(\mathbb{C})$. □

5.2.3 Модулярные формы Тейхмюллера

Пусть $g > 1$ и $n > 0$ — натуральные числа и пусть $\mathsf{M}_{g,n}$ обозначает стек модулей гладких собственных кривых рода g с симплектической структурой уровня n (см. [9]). Пусть $\pi : \mathsf{C}_{g,n} \longrightarrow \mathsf{M}_{g,n}$ — универсальная кривая, а $\boldsymbol{\lambda}$ — обратимый пучок, ассоциированный с *расслоением Ходжа*, то есть

$$\boldsymbol{\lambda} = \bigwedge^g \pi_* \Omega^1_{\mathsf{C}_{g,n}/\mathsf{M}_{g,n}}.$$

Для алгебраически замкнутого поля k слоем над $C \in \mathsf{M}_{g,n}(k)$ является одномерное векторное пространство $\boldsymbol{\lambda}[C] = \bigwedge^g \Omega^1_k[C]$.

Пусть R — коммутативное кольцо, а h — натуральное число. *Модулярная форма Тейхмюллера* рода g и веса h над R — это элемент пространства

$$\mathbf{T}_{g,h}(R) = \Gamma(\mathsf{M}_g \otimes R, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h}).$$

Такие модулярные формы подробно изучались Ишикавой в [24], [25], [26], [27]. Как и в случае пространства модулей абелевых многообразий, для любого $n \geq 1$ мы имеем:

$$\mathsf{M}_g \simeq \mathsf{M}_{g,n}/\, \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Кроме того, $\mathsf{M}_{g,n}$ представляется гладкой схемой над $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$, если $n \geq 3$. Для любой алгебры R над $\mathbb{Z}[\zeta_n, 1/n]$ модуль $\mathbf{T}_{g,h}(R)$ является подмодулем

$$\Gamma(\mathsf{M}_{g,n} \otimes_{\mathbb{Z}[\zeta_n,1/n]} R, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h}),$$

состоящим из элементов, инвариантных отнсительно $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Пусть C/k — кривая рода g. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ — базис $\Omega^1_k[C]$, а $\lambda = \lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_g$ — базис $\boldsymbol{\lambda}[C]$. Как и для модулярных форм Зигеля в (5.1), для модулярной формы Тейхмюллера $f \in \mathbf{T}_{g,h}(k)$ определено выражение

$$f(C, \lambda) = f(C)/\lambda^{\otimes h} \in k.$$

Ишикава доказывает следующее предложение:

Предложение 5.2.2. *Отображение Торелли $t : \mathsf{M}_g \longrightarrow \mathsf{A}_g$, сопоставляющее кривой C ее якобиан $\mathrm{Jac}\, C$ с канонической поляризацией j, удовлетворяет условию $t^*\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda}$ и для всякого коммутативного кольца R индуцирует линейное отображение:*

$$t^* : \mathbf{S}_{g,h}(R) = \Gamma(\mathsf{A}_g \otimes R, \boldsymbol{\omega}^{\otimes h}) \longrightarrow \mathbf{T}_{g,h}(R) = \Gamma(\mathsf{M}_g \otimes R, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h})$$

такое, что $[t^*f](C) = t^*[f(\mathrm{Jac}\, C)]$. Если зафиксировать базис λ слоя $\boldsymbol{\lambda}[C]$, то

$$f(\mathrm{Jac}\, C, \omega) = [t^*f](C, \lambda) \qquad \text{при } t^*\omega = \lambda.$$

□

5.2.4 Действие изморфизмов

Предположим, что $\phi : (A', a') \longrightarrow (A, a)$ является $\overline{k}$-изоморфизмом главнополяризованных абелевых многообразий. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g \in \Omega^1{}_{\overline{k}}[A]$ и $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_g \in \boldsymbol{\omega}[A]$. Тогда, по определению,

$$f(A, \omega) = f(A', \gamma),$$

где $\gamma_i = \phi^*(\omega_i)$ — базис $\Omega^1{}_{\overline{k}}[A']$, а $\gamma = \gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_g \in \boldsymbol{\omega}[A']$. Пусть $\omega'_1, \ldots, \omega'_g$ — другой базис $\Omega^1{}_{\overline{k}}[A']$, а $\omega' = \omega'_1 \wedge \cdots \wedge \omega'_g$. Обозначим через $M_\phi \in \mathrm{GL}_g(\overline{k})$ матрицу перехода от базиса (γ_i) к базису (ω'_i). Легко видеть, что

Предложение 5.2.3. *В обозначениях, введенных выше,*

$$f(A,\omega) = \det(M_\phi)^h \cdot f(A',\omega'). \quad \square$$

Прежде всего, из этой формулы, примененной к действию отображения -1, мы получаем, что, если k — поле характеристики, отличной от 2, то $\mathbf{S}_{g,h}(k) = \{0\}$, если произведение gh нечетно. Далее мы предполагаем, что gh четно и $\operatorname{char} k \neq 2$.

Следствие 5.2.4. *Пусть (A,a) — главнополяризованное абелево многообразие размерности g, определенное над k и пусть $f \in \mathbf{S}_{g,h}(k)$. Пусть $\omega_1,\dots,\omega_g$ — базис $\Omega^1_k[A]$. Положим $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g \in \boldsymbol{\omega}[A]$. Тогда*

$$\bar{f}(A) = f(A,\omega) \bmod^\times k^{\times h} \in k/k^{\times h}$$

не зависит от выбора базиса $\Omega^1_k[A]$. В частности, $\bar{f}(A)$ является инвариантом k-класса изоморфизма A. $\square$

Следствие 5.2.5. *Предположим, что g — нечетно. Пусть $f \in \mathbf{S}_{g,h}(k)$ и $\phi : A' \longrightarrow A$ — нетривиальная квадратичная подкрутка. Тогда существует $c \in k \setminus k^2$, такое что $\bar{f}(A) = c^{h/2}\bar{f}(A')$. Таким образом, если $\bar{f}(A) \neq 0$, то $\bar{f}(A)$ и $\bar{f}(A')$ принадлежат разным классам в $k^\times/k^{\times h}$.*

Доказательство. Предположим, что отображение ϕ задается квадратичным характером ε группы $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Тогда

$$d^\sigma = \varepsilon(\sigma)^g \cdot d, \text{ где } \quad d = \det(M_\phi) \in \overline{k}, \quad \sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{k}/k).$$

По условию теоремы g нечетно. Значит, по нашему предположение h четно и $d^2 = \varepsilon(\sigma) d d^\sigma \in k$. Но $d \notin k$, так как существует элемент σ, такой что $\varepsilon(\sigma) = -1$. Используя предложение 5.2.3, мы видим, что

$$f(A,\omega) = (d^2)^{h/2} f(A',\omega').$$

Элемент d^2 не является квадратом в k, а значит, если $\bar{f}(A) \neq 0$, то $\bar{f}(A)$ и $\bar{f}(A')$ принадлежат двум разным классам $\bmod^\times k^{\times h}$. $\square$

Пусть теперь (A,a) — главнополяризованное абелево многообразие размерности g, определенное над $\mathbb{C}$. Пусть $\omega_1,\dots,\omega_g$ — базис $\Omega^1_{\mathbb{C}}[A]$, а $\omega = \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_g \in \boldsymbol{\omega}[A]$. Пусть

$\gamma_1, \dots \gamma_{2g}$ — симплектический базис (для поляризации a). Матрица периодов определяется как

$$\Omega = [\Omega_1\ \Omega_2] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{pmatrix}.$$

При этом $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathbb{H}_g$.

Предложение 5.2.6. *В введенных выше обозначениях*

$$f(A, \omega) = (2i\pi)^{gh} \frac{\widetilde{f}(\tau)}{\det \Omega_2^h}.$$

Доказательство. Абелево многообразие A изоморфно $A_\Omega = \mathbb{C}^g/\Omega\mathbb{Z}^{2g}$, а $\omega \in \boldsymbol{\omega}[A]$ отображается этим изоморфизмом в $\xi = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g \in \boldsymbol{\omega}[A_\Omega]$. Линейное отображение $z \mapsto \Omega_2^{-1} z = z'$ индуцирует изоморфизм

$$\varphi : A_\Omega \longrightarrow A_\tau = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g).$$

Обозначим $\xi' = dz'_1 \wedge \cdots \wedge dz'_g = (2i\pi)^{-g}\zeta$ в $\boldsymbol{\omega}[A_\tau]$. Используя предложение 5.2.3, равенство (5.1) и предложение 5.2.1, мы получаем:

$$\begin{aligned} f(A, \omega) = f(A_\Omega, \xi) = \det \Omega_2^{-h} f(A_\tau, \xi') \\ = \det \Omega_2^{-h} f(A_\tau)/\xi'^{\otimes h} = (2i\pi)^{gh} \det \Omega_2^{-h} f(\tau)/\zeta^{\otimes h} = (2i\pi)^{gh} \frac{\widetilde{f}(\tau)}{\det \Omega_2^h}, \end{aligned}$$

откуда и следует утверждение предложения. □

5.3 Инварианты и модулярные формы

Пусть $d > 0$ — натуральное число. В этом параграфе мы предполагаем, что k — алгебраически замкнутое поле такое, что его характеристика взаимно проста с d.

5.3.1 Инварианты

Напомним некоторые сведения из классической теории инвариантов. Пусть E — векторное пространство размерности n над k. Левое регулярное представление r группы

$\mathrm{GL}(E)$ на векторном пространстве $\mathsf{X}_d = \mathrm{Sym}^d(E^*)$ однородных многочленов степени d на E задается как

$$r(u) : F(x) \mapsto (u \cdot F)(x) = F(ux)$$

для $u \in \mathrm{GL}(E)$, $F \in \mathsf{X}_d$ и $x \in E$. Если U — открытое подмножество X_d, инвариантное относительно r, мы будет обозначать через r левое регулярное представление $\mathrm{GL}(E)$ на k-алгебре $\mathcal{O}(U)$ регулярных функций на U, т. е.

$$r(u) : \Phi(F) \mapsto (u \cdot \Phi)(F) = \Phi(u \cdot F),$$

для $u \in \mathrm{GL}(E)$, $\Phi \in \mathcal{O}(U)$ и $F \in U$. Если $h \in \mathbb{Z}$, определим $\mathcal{O}_h(U)$ как подпространство однородных элементов степени h, удовлетворяющих $\Phi(\lambda F) = \lambda^h \Phi(F)$ для $\lambda \in k^\times$ и $F \in U$. Подпространства $\mathcal{O}_h(U)$ являются инвариантными относительно r. Элемент $\Phi \in \mathcal{O}_h(U)$ — *инвариант степени h на U*, если

$$u \cdot \Phi = \Phi \quad \text{для всех } u \in \mathrm{SL}(E).$$

Обозначим $\mathsf{Inv}_h(U)$ — подпространство $\mathcal{O}_h(U)$, состоящее из инвариантов степени h на U. Если $\mathsf{Inv}_h(U) \neq \{0\}$, то $hd \equiv 0 (\bmod n)$, так как группа $\boldsymbol{\mu}_n$ корней n-ой степени из единицы лежит в ядре r. Следовательно, если $\Phi \in \mathcal{O}(U)$, а w и h — два целых числа таких, что $hd = nw$, то следующие утверждения эквивалентны:

1. $\Phi \in \mathsf{Inv}_h(U)$;
2. $u \cdot \Phi = (\det u)^w \Phi \quad$ для всех $u \in \mathrm{GL}(E)$.

Если эти условия выполнены, то мы называем w *весом* элемента Φ.

Многомерный результант $\mathrm{Res}(f_1, \ldots, f_n)$ форм $f_1, \ldots f_n$ от n переменных с коэффициентами в k — это неприводимый многочлен от коэффициентов $f_1, \ldots, f_n$, обращающийся в ноль тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots f_n$ имеют общий ненулевой корень. Кроме того, требуется, чтобы результант был неприводимым над $\mathbb{Z}$, т. е. чтобы он имел коэффициенты в $\mathbb{Z}$ с наибольшим общим делителем, равным 1. Более того, мы предполагаем, что

$$\mathrm{Res}(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) = 1$$

для любых $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$. Многомерный результант существует и единственен. Пусть теперь $F \in \mathsf{X}_d$. Обозначим через $q_1, \dots, q_n$ частные производные F. *Дискриминант* F — это

$$\operatorname{Disc} F = c_{n,d}^{-1} \operatorname{Res}(q_1, \dots, q_n), \quad \text{где} \quad c_{n,d} = d^{((d-1)^n - (-1)^n)/d}$$

(коэффициент $c_{n,d}$ выбран нами в соответствии с [58]). Таким образом, проективная гиперповерхность, задаваемая $F \in \mathsf{X}_d$, является неособой тогда и только тогда, когда $\operatorname{Disc} F \neq 0$. Дискриминант является неприводимым многочленом от коэффициентов F, см., например, [15, глава 9, пример 1.6(a)]. Далее мы ограничимся рассмотрением случая $n = 3$, т. е. мы будем изучать инварианты тернарных форм степени d. Сведем воедино необходимые нам результаты о дискриминанте:

Предложение 5.3.1. *Если $F \in \mathsf{X}_d$ — тернарная форма степени d, то дискриминант*

$$\operatorname{Disc} F = d^{-(d-1)(d-2)-1} \cdot \operatorname{Res}(q_1, q_2, q_3),$$

где q_1, q_2, q_3 — частные производные F, является многочленом от коэффициентов F, неприводимым над $\mathbb{Z}$, обращающимся в ноль тогда и только тогда, когда плоская кривая C_F, определенная F является особой. Дискриминант является инвариантом на X_d степени $3(d-1)^2$ и веса $d(d-1)^2$. □

В [15, с. 118] и [37] дается явная формула для дискриминанта, найденная Сильвестром.

Пример 5.3.2 (Квартики Чиани). Напомним некоторые результаты, доказанные в [37]. Пусть

$$m = \begin{bmatrix} a_1 & b_3 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_1 \\ b_2 & b_1 & a_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{Sym}_3(k)$$

Для $1 \leq i \leq 3$ обозначим $c_i = a_j a_k - b_i^2$. Если

$$\det(m) \neq 0, \ a_1 a_2 a_3 \neq 0 \text{ и } c_1 c_2 c_3 \neq 0,$$

то

$$F_m(x, y, z) = a_1 x^4 + a_2 y^4 + a_3 z^4 + 2(b_1 y^2 z^2 + b_2 x^2 z^2 + b_3 x^2 y^2)$$

определяет неособую плоскую квартику. Более того,

$$\operatorname{Disc} F_m = 2^{40}\, a_1\, a_2\, a_3\, (c_1\, c_2\, c_3)^2\, \det(m)^4.$$

Заметим, что разница между степенями двойки здесь и в [37, предложение 2.2.1] происходит из нормализации на коэффициент $c_{n,d}$.

5.3.2 Геометрические инварианты неособых плоских квартик

Пусть E — векторное пространство размерности 3 над k и $G = \mathrm{GL}(E)$. *Универсальная кривая* над аффинным пространством $\mathsf{X}_d = \mathrm{Sym}^d(E)$ — это многообразие

$$\mathsf{Y}_d = \left\{(F, x) \in \mathsf{X}_d \times \mathbb{P}^2 \mid F(x) = 0\right\}.$$

Мы определим *неособое множество* в X_d как главное открытое подмножество

$$\mathsf{X}_d^0 = (\mathsf{X}_d)_{\mathrm{Disc}} = \{F \in \mathsf{X}_d \mid \mathrm{Disc}(F) \neq 0\}.$$

Если Y_d^0 — универсальная кривая над неособым множеством X_d^0, то проекция является гладким сюръективным k-морфизмом

$$\pi : \mathsf{Y}_d^0 \longrightarrow \mathsf{X}_d^0,$$

чьим слоем над F является неособая плоская кривая C_F.

Напомним классический способ задания явного k-базиса в $\Omega^1[C_F] = H^0(C_F, \Omega^1)$ для $F \in \mathsf{X}_d^0(k)$ (см. [5, с. 630]). Пусть

$$\eta_1 = \frac{f(x_2 dx_3 - x_3 dx_2)}{q_1}, \quad \eta_2 = \frac{f(x_3 dx_1 - x_1 dx_3)}{q_2}, \quad \eta_3 = \frac{f(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)}{q_3},$$

где q_1, q_2, q_3 — частные производные F, а f принадлежит пространству X_{d-3} тернарных форм степени $d-3$. Формы η_i склеиваются и определяя регулярную дифференциальную форму $\eta_f(F) \in \Omega^1[C_F]$. Так как $\dim \mathsf{X}_{d-3} = (d-1)(d-2)/2 = g$, то линейное отображение $f \mapsto \eta_f(F)$ определяет изоморфизм

$$\mathsf{X}_{d-3} \xrightarrow{\sim} \Omega^1[C_F].$$

Из этого следует, что сечения $\eta_f \in \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \pi_* \Omega^1_{\mathsf{Y}_d^0/\mathsf{X}_d^0})$ дают тривиализацию

$$\mathsf{X}_d^0 \times \mathsf{X}_{d-3} \xrightarrow{\sim} \pi_* \Omega^1_{\mathsf{Y}_d^0/\mathsf{X}_d^0}.$$

Обозначим через $\eta_1, \dots, \eta_g$ последовательность сечений, получаемую подстановкой g элементов канонического базиса X_{d-3}, занумерованных в лексикографическом порядке, в качестве f в η_f. Тогда

$$\eta = \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_g$$

является сечением

$$\boldsymbol{\alpha} = \bigwedge^g \pi_* \Omega^1_{\mathsf{Y}^0_d/\mathsf{X}^0_d},$$

расслоения Ходжа универсальной кривой над X^0_d.

Так как отображение $u : x \mapsto ux$ индуцирует изоморфизм

$$u : C_{u\cdot F} \xrightarrow{\sim} C_F,$$

то имеется естественное действие $u^* : \Omega^1[C_F] \to \Omega^1[C_{u\cdot F}]$ на дифференциалах и, как следствие, на сечениях $\boldsymbol{\alpha}^h$ для $h \in \mathbb{Z}$. Более конкретно, если $s \in \Gamma(\mathsf{X}^0_d, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h})$, то $s = \Phi \cdot \eta^{\otimes h}$, где $\Phi \in \mathcal{O}(\mathsf{X}^0_d)$; для $F \in \mathsf{X}^0_d$, имеем:

$$u^* s(F) = \Phi(F) \cdot (u^* \eta(F))^{\otimes h}.$$

Лемма 5.3.3. *Для всех $u \in G$ и $F \in \mathsf{X}^0_d$ сечения $\eta \in \Gamma(\mathsf{X}^0_d, \boldsymbol{\alpha})$ удовлетворяют равенству:*

$$u^* \eta(F) = \det(u)^{w_0} \cdot \eta(u \cdot F), \quad \text{где } w_0 = \binom{d}{3} = \frac{dg}{3} \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Так как $\dim \boldsymbol{\alpha}[F] = \dim \boldsymbol{\alpha}[u \cdot F] = 1$, то существует элемент $c(u, F) \in k^\times$ такой, что

$$u^* \eta(F) = c(u, F) \cdot \eta(u \cdot F).$$

где c удовлетворяет равенству:

$$c(uu', F) = c(u, F)\, c(u', u \cdot F).$$

Регулярная функция $F \mapsto c(u, F)$ не обращается в ноль на X^0_d. Из леммы 5.3.4 ниже и неприводимости дискриминанта (предложение 5.3.1) мы имеем:

$$c(u, F) = \chi(u)(\operatorname{Disc} F)^{n(u)},$$

где $\chi(u) \in k^\times$, а $n(u) \in \mathbb{Z}$. Группа G является связанной, а значит функция $n(u) = n$ — постоянна. Так как $c(\mathbf{I}_3, F) = 1$, то $(\operatorname{Disc} F)^n = \chi(\mathbf{I}_3)^{-1}$, что влечет $n = 0$. Значит, $c(u, F)$

не зависит от F и χ является характером G. Группа, порожденная коммутаторами элементов из G совпадает с $\mathrm{SL}_3(k)$, следовательно

$$\chi(u) = \det(u)^{w_0}$$

для некоторого $w_0 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, достаточно сосчитать $\chi(u)$ при $u = \lambda \mathbf{I}_3$, $\lambda \in k^\times$. В этом случае $u \cdot F = \lambda^d F$. Более того, для всех $f \in X_{d-3}$ из того, что сечения η_f однородны степени -1, мы имеем:

$$\eta_f(\lambda^d F) = \lambda^{-d} \cdot \eta_f(F), \text{ и } \eta(\lambda^d F) = \lambda^{-dg} \cdot \eta(F).$$

Так как u тождественно на кривой $C_F = C_{u \cdot F}$, то

$$u^* \eta(F) = \eta(F) = \lambda^{dg} \cdot \eta(u \cdot F) = \det(u)^{w_0} \cdot \eta(u \cdot F).$$

Из этого следует, что

$$\det(u)^{w_0} = \lambda^{3w_0} = \lambda^{dg},$$

Тем самым, лемма доказана. $\square$

Мы использовали следующую элементарную лемму:

Лемма 5.3.4. *Пусть $f \in k[T_1, \dots, T_n]$ — неприводимый многочлен и пусть $g \in k(T_1, \dots, T_n)$ — рациональная функция без нулей и полюсов вне множества нулей f. Тогда существуют $m \in \mathbb{Z}$ и $c \in k^\times$ такие, что $g = cf^m$.*

Доказательство. Это очевидное следствие теоремы Гильберта о нулях и факториальности кольца $k[T_1, \dots, T_n]$. $\square$

Для $h \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h})^G$ подпространство сечений $s \in \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h})$ таких, что

$$u^* s(F) = s(u \cdot F) \quad \text{для всех } u \in G, F \in \mathsf{X}_d^0.$$

Предложение 5.3.5. *Пусть $h \geq 0$ — целое число. Линейное отображение*

$$\Phi \mapsto \rho(\Phi) = \Phi \cdot \eta^{\otimes h}$$

является изоморфизмом

$$\rho : \mathsf{Inv}_{gh}(\mathsf{X}_d^0) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h})^G.$$

Доказательство. Пусть $\Phi \in \mathsf{Inv}_{gh}(\mathsf{X}_d^0)$, $s = \rho(\Phi) = \Phi \cdot \eta^{\otimes h}$, и $w = dgh/3$ — вес Φ. Используя лемму 5.3.3, мы видим, что

$$\begin{aligned} u^* s(F) &= \Phi(F) \cdot (u^*\eta(F))^{\otimes h} \\ &= \Phi(F) \cdot \det(u)^{w_0 h} \cdot \eta(u \cdot F)^{\otimes h} \\ &= \det(u)^w \Phi(F) \cdot \eta(u \cdot F)^{\otimes h} \\ &= \Phi(u \cdot F) \cdot \eta(u \cdot F)^{\otimes h} = s(u \cdot F). \end{aligned}$$

Значит, $\rho(\Phi) \in \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h})^G$. В другую сторону: изоморфизмом, обратным к ρ, является отображение $s \mapsto s/\eta^{\otimes h}$, что и доказывает предложение. $\square$

5.3.3 Модулярные формы как инварианты

Пусть $d > 2$ — целое число и $g = \binom{d}{2}$. Слои отображения $\mathsf{Y}_d^0 \longrightarrow \mathsf{X}_d^0$ являются неособыми не гиперэллиптическими плоскими кривыми рода g, а значит, из универсального свойства M_g, мы имеем морфизм:

$$p : \mathsf{X}_g^0 \longrightarrow \mathsf{M}_g^0,$$

где M_g^0 — стек модулей не гиперэллиптических кривых рода g и $p^*\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha}$ по построению. Это индуцирует морфизм

$$p^* : \Gamma(\mathsf{M}_g^0, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h}) \longrightarrow \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h}).$$

Более того, для $u \in G$ из того, что $u : C_{u \cdot F} \to C_F$ является изоморфизмом, мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\lambda}[C_F] & \xrightarrow{u^*} & \boldsymbol{\lambda}[C_{u\cdot F}] \\ {\scriptstyle p^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle p^*}\big\downarrow \\ \boldsymbol{\alpha}[F] & \xrightarrow{u^*} & \boldsymbol{\alpha}[u \cdot F]. \end{array}$$

Для всякой модулярной формы $f \in \Gamma(\mathsf{M}_g^0, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h})$ модулярная инвариантность f означает, что

$$u^* f(C_F) = f(C_{u \cdot F}).$$

Таким образом,

$$u^*[(p^*f)(F)] = u^*[p^*(f(C_F))] = p^*[u^*f(C_F)] = p^*[f(C_{u\cdot F})] = (p^*f)(u \cdot F),$$

а это значит, что $p^*f \in \Gamma(\mathsf{X}_d^0, \boldsymbol{\alpha}^{\otimes h})^G$. Этот факт вместе с предложением 5.3.5 дает нам:

Предложение 5.3.6. *Для всякого целого числа* $h \geq 0$ *линейное отображение* $\sigma = \rho^{-1} \circ p^*$ *является гомоморфизмом*

$$\Gamma(\mathsf{M}_g^0, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h}) \longrightarrow \mathsf{Inv}_{gh}(\mathsf{X}_d^0).$$

Для любого $F \in \mathsf{X}_d^0$ *и для любого сечения* $f \in \Gamma(\mathsf{M}_g^0, \boldsymbol{\lambda}^{\otimes h})$ *мы имеем:*

$$\sigma(f)(F) = f(C_F, \lambda),$$

где $\lambda = (p^*)^{-1}\eta$. □

В конце этого параграфа мы хотим установить связь между инвариантами и аналитическими модулярными формами Зигеля. Пусть $F \in X_d^0(\mathbb{C})$ и пусть $\eta_1, \ldots, \eta_g$ — базис регулярных дифференциалов на C_F, определенный в параграфе 5.3.2. Пусть $\gamma_1, \ldots \gamma_{2g}$ — симплектический базис $H_1(C, \mathbb{Z})$ (для спаривания, задаваемого пересечением). Матрица

$$\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \eta_1 & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \eta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \eta_g & \cdots & \int_{\gamma_{2g}} \eta_g \end{pmatrix}$$

принадлежит множеству $\mathcal{R}_g \subset \mathbf{M}_{g,2g}(\mathbb{C})$ матриц Римана, а $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathbb{H}_g$.

Следствие 5.3.7. *Пусть* $f \in \mathbf{S}_{g,h}(\mathbb{C})$ *— геометрическая модулярная форма Зигеля, а* $\widetilde{f} \in \mathbf{R}_{g,h}(\mathbb{C})$ *— соответствующая аналитическая модулярная форма. Пусть* $\Phi = \sigma(t^* f)$ *— соответствующий инвариант. Тогда, в выше введенных обозначениях,*

$$\Phi(F) = (2i\pi)^{gh} \frac{\widetilde{f}(\tau)}{\det \Omega_2^h} \,.$$

Доказательство. Пусть $\lambda = (p^*)^{-1}(\eta)$ и $\omega = (t^*)^{-1}(\lambda)$. Из предложений 5.2.2 и 5.3.6 мы заключаем, что

$$\Phi(F) = (t^* f)(C_F, \lambda) = f(\operatorname{Jac} C_F, \omega).$$

С другой стороны, из канонических отождествлений

$$\Omega^1[C_F] = \Omega^1[\operatorname{Jac} C_F], \quad H_1(C_F, \mathbb{Z}) = H_1(\operatorname{Jac} C_F, \mathbb{Z})$$

и предложения 5.2.6 мы получаем:

$$f(\operatorname{Jac} C_F, \omega) = (2i\pi)^{gh} \frac{\widetilde{f}(\tau)}{\det \Omega_2^h} \,,$$

откуда и следует наше утверждение. □

5.4 Случай рода 3

5.4.1 Формула Клейна

Следуя [4], напомним определение тета-функций с (целыми) характеристиками

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g.$$

Для $\tau \in \mathbb{H}_g$ и $z \in \mathbb{C}^g$ определим *(классическую) тета-функцию* как

$$\theta \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} (z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} q^{(n+\varepsilon_1/2)\tau(n+\varepsilon_1/2)+2(n+\varepsilon_1/2)(z+\varepsilon_2/2)}.$$

Функции *тета-нуль* определяются как значения тета-функций в точке $z = 0$:

$$\theta[\boldsymbol{\varepsilon}](\tau) = \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} (\tau) = \theta \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} (0, \tau).$$

Напомним, что характеристика называется *четной*, если $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \equiv 0 \pmod 2$, и *нечетной* иначе. Пусть S_g — множество четных характеристик с коэффициентами в $\{0, 1\}$. Для $g \geq 2$ положим $h = |S_g|/2 = 2^{g-2}(2^g + 1)$ и

$$\widetilde{\chi}_h(\tau) = \prod_{\boldsymbol{\varepsilon} \in S_g} \theta[\boldsymbol{\varepsilon}](\tau).$$

В замечательной статье [28], Игуса доказывает следующий результат [28, леммы 10 и 11]. Обозначим через $\widetilde{\Sigma}_{140}$ модулярную форму, являющуюся тридцать пятой элементарной симметрической функцией от восьмых степеней функций тета-нуль с четными характеристиками. Напомним, что главнополяризованное абелево многообразие (A, a) называется разложимым, если оно является произведением главнополяризованных абелевых многообразий меньшей размерности и неразложимым в противном случае.

Теорема 5.4.1. *Если $g \geq 3$, то $\widetilde{\chi}_h(\tau) \in \mathbf{R}_{g,h}(\mathbb{C})$. Более того, если $g = 3$ и $\tau \in \mathbb{H}_3$, то:*

1. *A_τ — разложимое абелево многообразие, если $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) = \widetilde{\Sigma}_{140}(\tau) = 0$.*

2. *A_τ — гиперэллиптический якобиан, если $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) = 0$ и $\widetilde{\Sigma}_{140}(\tau) \neq 0$.*

3. *A_τ — не гиперэллиптический якобиан, если $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) \neq 0$.* □

Используя предложение 5.2.1, мы определяем геометрические Зигелевы модулярные формы веса h :

$$\chi_h(A_\tau) = (2i\pi)^{gh}\,\widetilde{\chi}_h(\tau)(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_g)^{\otimes h}.$$

Ишикава в [26], [27] доказал, что $\chi_h \in \mathbf{S}_{g,h}(\mathbb{Q})$. Для $g = 3$ имеем:

$$\chi_{18}(A_\tau) = -(2\pi)^{54}\,\widetilde{\chi}_{18}(\tau)(dz_1 \wedge dz_2 \wedge dz_3)^{\otimes 18}.$$

Теперь мы готовы доказать следующий результат [34, уравнение 118, с. 462]:

Теорема 5.4.2 (Формула Клейна)**.** *Пусть* $F \in \mathsf{X}_4^0(\mathbb{C})$, *а* C_F *— соответствующая гладкая плоская квартика. Пусть* η_1, η_2, η_3 *— классический базис* $\Omega^1[C_F]$ *из §5.3.2, а* $\gamma_1, \dots \gamma_6$ *— симплектический базис* $H_1(C_F, \mathbb{Z})$ *для спаривания пересечения. Пусть*

$$\Omega = [\Omega_1\ \Omega_2] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \eta_1 & \cdots & \int_{\gamma_6} \eta_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \eta_3 & \cdots & \int_{\gamma_6} \eta_3 \end{pmatrix}$$

— матрица периодов $\mathrm{Jac}(C)$ *и* $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathbb{H}_3$. *Тогда*

$$\mathrm{Disc}(F)^2 = \frac{1}{2^{28}}(2\pi)^{54}\frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}}.$$

Доказательство. Следствие 5.3.7 показывает, что для всякого $F \in \mathsf{X}_4^0$ инвариант $I = \sigma \circ t^*(\chi_{18})$ удовлетворяет

$$I(F) = -(2\pi)^{54}\frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det \Omega_2^{18}}.$$

Более того, из теоремы 5.4.1(3) следует, что $I(F) \neq 0$ для всех $F \in \mathsf{X}_4^0$. Значит, I является ненулевым инвариантом веса 54. Применяя лемму 5.3.4 к дискриминанту и сравнивая веса, мы получаем, что $I = c\,\mathrm{Disc}^2$, где $c \in \mathbb{C}$ — константа. Однако, для квартик Чиани F_m, ассоциированных с матрицами $m \in \mathrm{Sym}_3(k)$ (см. пример 5.3.2), в [37, следствие 4.2] доказывается, что формула Клейна верна для F_m и $c = -2^{28}$. $\square$

Замечание 5.4.3. Отображение t^* определяет инъективный морфизм градуированных k-алгебр

$$\mathbf{S}_3(k) = \oplus_{h \geq 0}\mathbf{S}_{3,h}(k) \longrightarrow \mathbf{T}_3(k) = \oplus_{h \geq 0}\mathbf{T}_{3,h}(k).$$

Ишикава в работе [25] доказывает, что, если k — поле характеристики 0, то алгебра $\mathbf{T}_3(k)$ порождена образом $\mathbf{S}_3(k)$ и примитивной модулярной формой Тейхмюллера

$\mu_{3,9} \in \mathbf{T}_{3,9}(\mathbb{Z})$ веса 9, не приходящей из пространства модулярных форм Зигеля. Он также доказывает в [27], что

$$t^*(\chi_{18}) = -2^{28} \cdot (\mu_{3,9})^2. \tag{5.2}$$

Из теоремы 5.4.2 следует, что $\mu_{3,9}$ совпадает с дискриминантом с точностью до знака.

Замечание 5.4.4. Кроме аналогов формулы Клейна для гиперэллиптического случая ([44] и [19]), существует красивая алгебраическая формула Клейна для кривых рода 3, связывающая дискриминант с иррациональными инвариантами [16, теорема 11.1].

5.4.2 Якобианы и трехмерные абелевы многообразия

Пусть $k \subset \mathbb{C}$ — поле и $g = 3$. Следующая теорема позволяет определить, когда заданное абелево многообразие размерности 3, определенное над полем k, изоморфно над k якобиану кривой, определенной над тем же полем. Это дает ответ на вопрос Ж.-П. Серра, обсуждавшийся во введении.

Теорема 5.4.5. *Пусть (A, a) — главнополяризованное трехмерное абелево многообразие, определенное над полем $k \subset \mathbb{C}$. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — произвольный базис $\Omega^1_k[A]$, а $\gamma_1, \dots \gamma_6$ — симплектический базис (для поляризации a) пространства $H_1(A, \mathbb{Z})$, так что*

$$\Omega = [\Omega_1\ \Omega_2] = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\gamma_6} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \int_{\gamma_1} \omega_3 & \cdots & \int_{\gamma_6} \omega_3 \end{pmatrix}$$

является матрицей периодов (A, a). Положим $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1 \in \mathbb{H}_3$.

1. *Если $\widetilde{\Sigma}_{140}(\tau) = 0$ и $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) = 0$, то (A, a) разложимо над $\bar{k}$. В частности, оно не является якобианом.*

2. *Если $\widetilde{\Sigma}_{140}(\tau) \neq 0$ и $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) = 0$, то существует гиперэллиптическая кривая X/k такая, что $(\operatorname{Jac} X, j) \simeq (A, a)$.*

3. *Если $\widetilde{\chi}_{18}(\tau) \neq 0$, то (A, a) изоморфно якобиану над k тогда и только тогда, когда*

$$-\chi_{18}(A, \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) = (2\pi)^{54} \frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}}$$

является квадратом в k.

Доказательство. Первое и второе утверждения следуют из теоремы 5.4.1 и теоремы 5.1.1. Предположим теперь, что многообразие (A, a) изоморфно над k якобиану не гиперэллиптической кривой C/k рода 3. Положим $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$. Используя предложение 5.2.2, мы получаем

$$-\chi_{18}(A, \omega) = t^*(-\chi_{18})(C, \lambda),$$

где $\lambda = t^*\omega$. Левая часть равенства переписывается в виде (предложение 5.2.6):

$$-\chi_{18}(A, \omega) = -(2i\pi)^{54} \frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}} = (2\pi)^{54} \frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}}.$$

Из замечания 5.4.3 мы видим, что правая часть есть ни что иное как

$$t^*(-\chi_{18})(C, \lambda) = 2^{28} \cdot \mu_{3,9}^2(C, \lambda) = (2^{14} \cdot \mu_{3,9}(C, \lambda))^2.$$

Таким образом, интересующее нас выражение является квадратом в k.

Напротив, следствие 5.2.5 показывает, что, если (A, a) — квадратичная подкрутка якобиана (A', a'), то существует $c \in k$, не являющееся квадратом, такое, что

$$-\bar{\chi}_{18}(A) = c^9 \cdot (-\bar{\chi}_{18}(A')).$$

Так как мы только что показали, что $-\bar{\chi}_{18}(A')$ — ненулевой квадрат в $k/k^{\times 18}$, то $-\chi_{18}(A, \omega)$ не является таковым. □

Следствие 5.4.6. *В обозначениях теоремы 5.4.5, квадратичный характер ε группы* $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$, *введенный в теореме 5.1.1, задается формулой $\varepsilon(\sigma) = d/d^\sigma$, где*

$$d = \sqrt{(2\pi)^{54} \frac{\widetilde{\chi}_{18}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{18}}},$$

с произвольным выбором знака для квадратного корня.

5.4.3 Случай большей размерности

Естественно было бы попытаться обобщить наши результаты на случай $g > 3$. Первый вопрос, который стоит задать, это

- Существует ли аналог формулы Клейна для $g > 3$?

Здесь мы можем дать частичный ответ. Используя результаты §5.2.3, можно рассмотреть модулярную форму Тейхмюллера $t^*(\chi_h)$ с $h = 2^{g-2}(2^g+1)$. В [27, предложение 4.5] (см. также [64]) доказывается, что для $g > 3$ модулярная форма

$$t^*(\chi_h)/2^{2^{g-1}(2^g-1)}$$

имеет в качестве квадратного корня примитивный элемент $\mu_{g,h/2} \in \mathbf{T}_{g,h/2}(\mathbb{Z})$. При $g = 4$ в примечании к с. 462 в [34] мы находим следующую замечательную формулу:

$$\frac{\widetilde{\chi}_{68}(\tau)}{\det(\Omega_2)^{68}} = c \cdot \Delta(X)^2 \cdot T(X)^8. \tag{5.3}$$

Здесь $\tau = \Omega_2^{-1}\Omega_1$, $\Omega = [\Omega_1\ \Omega_2]$ — матрица периодов не гиперэллиптической кривой X рода 4, заданной в $\mathbb{P}^3$ как пересечение квадрики Q и кубической поверхности E. Элементы $\Delta(X)$ и $T(X)$ определяются в классической теории инвариантов как дискриминант Q и такт-инвариант Q и E соответственно (см. [54, с. 122]). К сожалению, доказательство этой формулы отсутствует в [34], так что проблема заслуживает дальнейшего изучения. В случае, когда $g > 4$, подобные формулы авторам неизвестны.

Обратим внимание на то, что происходит, когда мы пытаемся применить подход Серра для $g > 3$. Для начала, если g четно, следствие 5.2.4 не может быть использовано для того, чтобы различать квадратичные подкрутки. В частности, мы видим, что $\chi_h(A, \omega_k)$ — всегда квадрат, если A — главнополяризованное абелево многообразие определенное над k и являющееся якобианом над $\bar{k}$. Возникает следующий естественный вопрос:

- Каково соотношение между этим арифметическим условием и множеством абелевых многообразий над k, являющимися якобианами над $\bar{k}$?

Предположим теперь, что g — нечетно. Следствие 5.2.5 показывает, что существует $c \in k \setminus k^2$ такое, что

$$\overline{\chi}_h(A') = c^{h/2} \cdot \overline{\chi}_h(A)$$

для якобиана A и его квадратичной подкрутки A'. Тот факт, что $h/2 = 9$ для $g = 3$, позволил нам различить A и A' в этом случае. Однако, при $g > 3$, $2 \mid 2^{g-3}$, причем $g - 3$ — максимальная степень 2, делящая $h/2$. Таким образом, для различения A и

A', нам недостаточно, чтобы $\bar{\chi}_{18}(A)$ было квадратом в k; нам нужно, чтобы это значение было элементом $k^{2^{g-2}}$. Из доказательства [64, теорема 1] можно легко вывести, что $t^*(\chi_h)$ не допускает корня четвертой степени. Согласно [2] или [69], это означает, что $\overline{\chi}_h(A) \notin k^{2^{g-2}}$ для бесконечного числа якобианов A, определенных над числовым полем k. Таким образом, модулярная форма χ_h не может быть использована для характеризации якобианов над k. Естественным вопросом является:

- Можно ли найти модулярную форму, заменяющую χ_h в нашем подходе для $g > 3$?

Литература

[1] Atkin, A. O. L.; Lehner, J. Hecke operators on $\Gamma_0(m)$. Math. Ann. **185** (1970), 134–160.

[2] Bilu, Y. F. Частное обсуждение.

[3] Brauer, R. On zeta-functions of algebraic number fields. Amer. J. Math. **69**, Num. 2, 1947, 243–250.

[4] Birkenhake C.; Lange, H. *Complex abelian varieties*. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **302** Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[5] Brieskorn, E.; Knörrer, H. *Plane Algebraic Curves.* Birkhäuser Verlag, 1986.

[6] Brumer, A. The average rank of elliptic curves. I. Invent. Math. **109** (1992), no. 3, 445–472.

[7] Chai, C.-L. Siegel moduli schemes and their compactifications over $\mathbb{C}$. *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), 231–251, Springer, New York, 1986.

[8] Deligne, P. Formes modulaires et représentations l-adiques. *Séminaire Bourbaki*, **11** (1968–1969), Exposé No. 355.

[9] Deligne, P.; Mumford, D. The irreducibility of the space of curves of given genus. Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. **36** (1969), 75–109.

[10] Deligne, P.; Serre, J.-P. Formes modulaires de poids 1. Ann. Sci. École Norm. Sup. (1974), 507–530; = Serre, J.-P. Œuvres, vol. III, No **101**, 193–216.

[11] DiPippo, S.; Howe, E. Real polynomials with all roots on the unit circle and abelian varieties over finite fields. J. Number Theory **73** (1998), no. 2, 426–450.

[12] Влэдуц, С. Г.; Дринфельд, В. Г. О числе точек алгебраической кривой. Функ. Анализ и Прил. **17** (1983), no. 1, 68–69.

[13] Faltings, G.; Chai, C.-L. *Degeneration of abelian varieties.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), **22**. Springer, Berlin, 1990.

[14] Van Der Geer, G. *Siegel modular forms.* Препринт, arXiv: math/0605346v2 [math.AG] (2007).

[15] Gel'fand, I.M.; Kapranov, M.M.; Zelevinsky, A.V. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.* Birkhäuser, Boston, (1994).

[16] Gizatullin, M. On covariants of plane quartic associated to its even theta characteristic. *Algebraic geometry*, 37–74, Contemp. Math., **422**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[17] Goldfeld, D. M. A simple proof of Siegel's theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **71** (1974), c. 1055.

[18] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. *Table of integrals, series, and products.* Translated from the fourth Russian edition. Fifth edition. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[19] Guàrdia, G. Jacobian nullwerte and algebraic equations. J. Algebra **253** (2002), 112–132.

[20] Hajir, F.; Maire, C. Tamely ramified towers and discriminant bounds for number fields II. J. Symbolic Comput. **33** (2002), no. 4, 415–423.

[21] Hindry, M. Why is it difficult to compute the Mordell–Weil group. Proceedings of the conference "Diophantine Geometry", 197–219, Ed. Scuola Normale Superiore Pisa, 2007.

[22] Hindry, M.; Pacheco, A. Un analogue du théorème de Brauer–Siegel pour les variétés abéliennes en charactéristique positive. Препринт.

[23] Hoyt, W.L. On products and algebraic families of Jacobian varieties. Ann. of Math. **77**, (1963), 415–423.

[24] Ichikawa, T. On Teichmüller modular forms. Math. Ann. **299** (1994), no. 4, 731–740.

[25] Ichikawa, T. Teichmüller modular forms of degree 3. Amer. J. Math. **117** (1995), no. 4, 1057–1061.

[26] Ichikawa, T. Theta constants and Teichmüller modular forms. J. Number Theory **61** (1996), no. 2, 409–419.

[27] Ichikawa, T. Generalized Tate curve and integral Teichmüller modular forms. Amer. J. Math. **122** (2000), no. 6, 1139–1174.

[28] Igusa, J.-I. Modular forms and projective invariants. Amer. J. Math, **89**, (1967), 817–855.

[29] Ihara, Y. On the Euler–Kronecker constants of global fields and primes with small norms. Algebraic geometry and number theory, Progr. Math., **253** (2006), Birkhäuser Boston, Boston, MA, 407–451.

[30] Iwaniec, H.; Kowalski, E. *Analytic number theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **53**. AMS, Providence, RI, 2004.

[31] Iwaniec, H.; Sarnak, P. Dirichlet L-functions at the central point. *Number theory in progress*, Vol. 2 (Zakopane-Koscielisko, 1997), 941–952, de Gruyter, Berlin, 1999.

[32] Katz, N. M. p-adic properties of modular schemes and modular forms. *Modular functions of one variable, III* (Antwerp, 1972), 69–190. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.

[33] Katz, N. M.; Sarnak, P. *Random matrices, Frobenius eigenvalues, and monodromy.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **45**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[34] Klein, F. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. Math. Annalen, **36** (1889–90); = Gesammelte mathematische Abhandlungen **XCVII**, 388–474.

[35] Koblitz, N. Jacobi sums, irreducible zeta-polynomials, and cryptography. Canad. Math. Bull. **34** (1991), no. 2, 229–235.

[36] Kunyavskii, B. E.; Tsfasman, M. A. Brauer–Siegel theorem for elliptic surfaces. Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. **8**.

[37] Lachaud, G.; Ritzenthaler, C. On a conjecture of Serre on abelian threefolds. *Algebraic Geometry and its applications* (Papeete, 2007), 88–115. Series on Number Theory and Its Applications 5. World Scientific, Hackensack, NJ, 2008.

[38] Lachaud, G.; Tsfasman, M. A. Formules explicites pour le nombre de points des variétés sur un corps fini, J. Reine Angew. Math. **493** (1997), 1–60.

[39] Lagarias, J. C.; Odlyzhko, A. M. Effective versions of the Chebotarev density theorem. *Algebraic number fields: L-functions and Galois properties* (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975), Academic Press, London, 1977, 409–464.

[40] Lang, S. On the zeta function of number fields. Invent. Math. **12** (1971), 337–345.

[41] Lang, S. *Algebraic number theory* (Second Edition), Graduate Texts in Mathematics **110**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[42] Lauter, K. Geometric methods for improving the upper bounds on the number of rational points on algebraic curves over finite fields, with an appendix by J. P. Serre. Journal of Algebraic Geometry **10** (2001), 19–36.

[43] Lebacque, P. Generalised Mertens and Brauer–Siegel Theorems. Acta Arith. **130** (2007), no. 4, 333–350.

[44] Lockhart, P. On the discriminant of a hyperelliptic curve. Trans. Amer. Math. Soc. **342**, (1994), 729–752.

[45] Louboutin, S. R. Explicit upper bounds for residues of Dedekind zeta functions and values of L-functions at $s = 1$, and explicit lower bounds for relative class number of CM-fields. Canad. J. Math, Vol. **53**(6), 2001, 1194–1222.

[46] Louboutin, S. R. Explicit lower bounds for residues at $s = 1$ of Dedekind zeta functions and relative class numbers of CM-fields. Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 3079–3098.

[47] Louboutin, S. R. On the Brauer-Siegel theorem. J. London Math. Soc. (2) **72** (2005), no. 1, 40–52.

[48] Martinet, J. Tours de corps de classes et estimations de discriminants. Invent. Math. **44** (1978), no. 1, 65–73.

[49] Mestre, J.-F. Formules explicites et minorations de conducteurs de variétés algébriques. Compositio Math. **58** (1986), no. 2, 209–232.

[50] Michel, P. Sur les zéros de fonctions L sur les corps de fonctions. Math. Ann. **313** (1999), no. 2, 359–370.

[51] Mumford, D.; Fogarty, J.; Kirwan, F. *Geometric invariant theory.* Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2) **34**. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[52] Oort, F.; Ueno, K. Principally polarized abelian varieties of dimension two or three are Jacobian varieties. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **20**, (1973), 377–381.

[53] Poitou, G. Sur les petits discriminants. *Séminaire Delange–Pisot–Poitou*, 18e année (1976/77), Théorie des nombres, Fasc. 1, Exp. No. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

[54] Salmon, G. *Traité de géométrie analytique à trois dimensions.* Troisième partie. Ouvrage traduit de l'anglais sur la quatrième édition, Paris, 1892.

[55] Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Hermann, Paris, 1966.

[56] Serre, J.-P. Rigidité du foncteur de Jacobi d'échelon $n \geq 3$. Appendix to: Grothendieck, A. Techniques de construction en géométrie analytique, X. Construction de l'espace de Teichmüller. *Séminaire Henri Cartan* **13**, No 2, exp. 17. Secrétariat Mathématique, Paris, 1960-61.

[57] Serre, J.-P. *Rational points on curves over Finite Fields.* Notes of Lectures at Harvard University by F. Q. Gouvêa, 1985.

[58] Serre, J.-P. Two letters to Jaap Top. *Algebraic Geometry and its applications* (Tahiti, 2007) 84–87. World Scientific, Singapore, 2008.

[59] Shafarevich, I. Extensions with prescribed ramification points. Publ. Math. I.H.E.S. **18** (1964), 71–95.

[60] Silverman, J. H. *Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves.* Graduate Texts in Mathematics, **151**, Springer-Verlag, New York, 1994.

[61] Stark, H. M. Some effective cases of the Brauer–Siegel Theorem. Invent. Math. **23**(1974), 135–152.

[62] Tate, J. Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini. *Séminaire Bourbaki*, **11** (1968–1969), Exp. No. 352, 95–110.

[63] Taylor, R. Galois representations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I (Beijing, 2002), 449–474, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[64] Tsuyumine, S. Thetanullwerte on a moduli space of curves and hyperelliptic loci. Math. Z. **207** (1991), 539–568.

[65] Tsfasman, M. A. Some remarks on the asymptotic number of points. *Coding Theory and Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. **1518**, 178–192, Springer—Verlag, Berlin 1992.

[66] Tsfasman, M. A.; Vlăduţ, S. G. Asymptotic properties of zeta-functions. J. Math. Sci. **84** (1997), Num. 5, 1445–1467.

[67] Tsfasman, M. A.; Vlăduţ, S. G. Infinite global fields and the generalized Brauer–Siegel theorem. Moscow Mathematical Journal, Vol. **2** (2002), Num. 2, 329–402.

[68] Tsfasman, M. A.; Vlăduţ, S. G.; Nogin, D. *Algebraic geometric codes: basic notions.* Mathematical Surveys and Monographs, **139**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[69] Xarles, X. Частное обсуждение.

[70] Zykin, A. On the generalizations of the Brauer–Siegel theorem. Proceedings of the Conference AGCT 11 (2007), Contemp. Math. series, AMS, 2009.

Публикации по теме диссертации

(Z1) А. И. Зыкин, "Brauer–Siegel and Tsfasman–Vladut theorems for almost normal extensions of global fields". *Moscow Mathematical Journal*, т. **5** (2005), номер 4, 961–968.

(Z2) А. И. Зыкин, "On the generalizations of the Brauer–Siegel theorem". Труды конференции AGCT 11 (2007), Contemp. Math. series, **487** (2009), 195–206.

(Z3) А. И. Зыкин, "Асимптотические свойства дзета-функции Дедекинда в семействах числовых полей". *Успехи математических наук*, **64:6**(390) (2009), 175—176.

(Z4) А. И. Зыкин, "Теорема Брауэра–Зигеля для семейств эллиптических поверхностей над конечными полями". *Математические Заметки*, **86:1**, 148–150.

(Z5) А. И. Зыкин, Ф. Лебак, "Логарифмическая производная дзета-функций в семействах глобальных полей". *Доклады Академии Наук*, т. **431** (2010), номер 2, с. 162–164.

(Z6) А. И. Зыкин, Ж. Лашо, К. Ритценталер, "Якобианы и абелевы многообразия размерности 3: формула Клейна и вопрос Серра". *Доклады Академии Наук*, т. **431** (2010), номер 3, с. 313–315.