Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»
Выпуск 1 (02), февраль 2019 г.

Москва, 2019

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

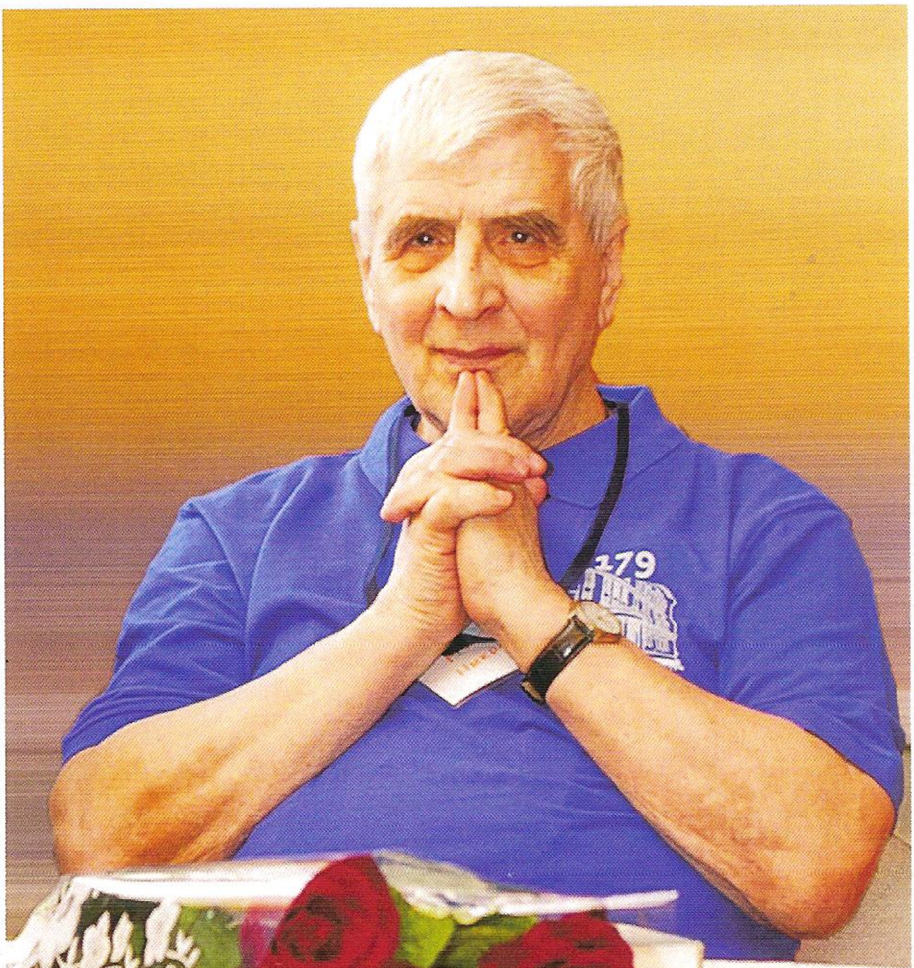
Составитель Комаров С.И.

Выпуск 1 (02), 2019 г.

В настоящем выпуске представлены работы ученика ГБОУ СОШ № 179 г. Москвы (“школы Константинова”) Руслана Салимгареева и выпускника этой школы Дмитрия Захарова, интервью с Н.Н. Константиновым и воспоминания его учеников прошлых лет. Издание продолжает систематический сбор и публикацию таких воспоминаний.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 10.02.2019. Объем 3 п.л. Тираж 400 экз. Цена свободная.



Константиновский сборник

Приложение к журналу “Математическое образование”

Выпуск 1 (02), февраль 2019 г.

Содержание

К теореме Гаусса – Ванцеля

Руслан Салимгареев

Многим известны классические неразрешимые задачи на построение: задача о квадратуре круга, об удвоении куба, о трисекции угла. С ними тесно связана проблема построения правильных многоугольников: например, из возможности построения фигуры следовала бы возможность построить угол при её вершине — и наоборот. Теорема Гаусса – Ванцеля решает эту проблему. Обладая вполне интуитивным геометрическим смыслом, теорема может быть доказана средствами, доступными матшкольнику. И хотя ход рассуждений довольно длительный, но в конце он приводит к ожидаемому результату: теорема Гаусса-Ванцеля доказана элементарными методами. Работа выполнена учеником 11-го математического класса школы № 179 Русланом Салимгареевым в рамках уроков проектной деятельности, руководитель Андрей Юрьевич Юрков.

Рассмотрим множество *построимых чисел* P, состоящее из точек комплексной плоскости, которые можно получить циркулем и линейкой из точек $0, 1$.

Лемма 1. *Элементы P с операциями сложения и умножения комплексных чисел составляют поле, содержащее $\mathbb{Q}$.*

Поле получается, так как длины отрезков можно делить и умножать друг на друга, строя гомотетичные треугольники с общей вершиной, образованные парой пересекающихся в этой вершине прямых и ещё двумя параллельными прямыми. Если у одного треугольника две стороны, выходящие из общей вершины, равны a и 1, а у другого отмечена одна из сторон длины b, то в зависимости от её расположения вторая будет ab или $\dfrac{b}{a}$. Аргументы комплексных чисел можно складывать и вычитать как построимые углы. Также осуществимо и сложение чисел; 0 и 1 даны – все аксиомы поля выполняются.

Лемма 2. *Всякий корень квадратного уравнения с коэффициентами из P лежит в P.*

Модуль комплексного числа всегда неотрицателен, и из него можно извлечь корень: достаточно построить пересечение прямой $\Re z = 1$ с окружностью, диаметром которой является отрезок от нуля до числа $a+1$, где a – наш модуль. Аргумент делится пополам с помощью построения биссектрисы угла. С помощью формулы для корней квадратного уравнения можно построить искомые числа.

Лемма 3. *Всякий элемент $P \supset \mathbb{Q}$ алгебраичен и имеет степень, равную степени двойки.*

Для доказательства этого утверждения построим конечное расширение $M \supset \mathbb{Q}$, для которого $[M : \mathbb{Q}]$ (степень расширения) равна степени двойки. Тогда каждый его элемент будет алгебраичен (как любой элемент конечного расширения) и будет иметь степень, делящую $[M : \mathbb{Q}]$ (это может быть только степень двойки).

Рассмотрим $a \in P$. Пусть $M = \mathbb{Q}[i]\dots[a] \supset \dots \supset \mathbb{Q}[i] \supset \mathbb{Q}$. Здесь каждый этаж башни, начиная со второго, создаётся новым построением (добавлением точки, нужной для получения a), а вначале для удобства добавляется точка i. Очевидно, это построимое число, причём $[\mathbb{Q}[i] : \mathbb{Q}] = 2$. Для удобства будем проводить построения симметрично относительно действительной оси (для каждого построения будем проводить симметричное). Так при добавлении каждой точки мы будем добавлять и сопряжённое число, причём их построения будут независимы друг от друга (точки будут строиться симметрично, но не друг через друга).

Для построения новой точки есть три варианта: пересечение двух окружностей, окружности и прямой, двух прямых. В случае двух окружностей на последнем этаже башни до добавления новой точки уже есть их центры: $(a_1 + ib_1)$, $(a_2 + ib_2)$ – и радиусы: R_1, R_2. Заметим, что действительная и мнимая часть числа получаются как его полусумма или полуразность с сопряжённым (разность нужно также поделить на i), а значит, принадлежат полю, в котором лежит само число. Пусть число, которое мы добавляем, равно $(x + iy)$.

В случае пересечения двух окружностей имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2; \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = R_2^2. \end{cases}$$

Отсюда $2x(a_2 - a_1) + a_1^2 - a_2^2 + 2y(b_2 - b_1) + b_1^2 - b_2^2 = R_1^2 - R_2^2$, y и x линейно зависимы. Можно выразить y через x (или наоборот) и подставить в одно из уравнений системы (центры окружностей не совпадают). Числа оказались корнями линейного или квадратного уравнения в предыдущем расширении, значит, степень следующего этажа башни, если мы добавим любое из них (что равносильно добавлению $(x + iy)$), будет равна степени предыдущего или в два раза больше.

Точка могла получиться пересечением окружности и прямой (прямая, проведённая через точки $(a_1 + ib_1)$, $(a_2 + ib_2)$). Система уравнений, по которым можно определить x, y, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = R_1^2; \\ x \cdot \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} + \dfrac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2 - a_1} = y. \end{cases}$$

Аналогично рассмотренному выше случаю, второе уравнение даёт линейную зависимость переменных, а степень следующего этажа башни над предыдущим будет равна 1 или 2.

Пересечение двух прямых даст вовсе систему линейных уравнений (степень расширения будет равна 1). В итоге получаем, что степень верхнего этажа башни над основанием будет равна степени двойки.

Лемма 4. *Если p — простое число Ферма, т. е. $p = 2^{2^k} + 1$, то любой корень p-й степени из единицы построим. Значит, и правильный p-угольник построим.*

Рассмотрим корни p-й степени из единицы. Все они, кроме числа 1, – примитивные корни p-й степени из единицы, то есть при возведении в положительную степень, меньшую p, единице не равны. Каждый из этих примитивных корней – корень многочлена $\Phi(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x^2 + x + 1$. (Сумма всех p корней равна нулю). Можно показать, что $\Phi(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ (что эквивалентно неприводимости над $\mathbb{Q}$). Сделаем замену x на $(x + 1)$ и докажем утверждение для полученного многочлена (оно будет эквивалентно исходному в связи с существованием обратной замены).

$$\begin{aligned} &\Phi(x+1) = (x+1)^{p-1} + (x+1)^{p-2} + \ldots + (x+1)^2 + (x+1) + 1 = \\ &= x^{p-1} + (C_{p-1}^1 + 1) \cdot x^{p-2} + (C_{p-1}^2 + C_{p-2}^1 + 1) \cdot x^{p-3} + \ldots + \\ &+ (C_{p-1}^{p-1} + C_{p-2}^{p-2} + \ldots + 1) = x^{p-1} + C_p^1 \cdot x^{p-2} + C_p^2 \cdot x^{p-3} + \ldots + C_p^{p-1} \end{aligned}$$

Все коэффициенты данного многочлена, кроме старшего, кратны p. Младший при этом не кратен p^2. По модулю p многочлен сравним с x^{p-1}. Предположим, что он приводим, и разложим в произведение двух многочленов меньшей степени с целыми коэффициентами.Чтобы получился нужный результат по модулю p, нужно, чтобы только старшие коэффициенты сомножителей не были кратны p (иначе у произведения появился бы ещё один не кратный p коэффициент, соответствующий произведению младших не кратных p коэффициентов сомножителей, к которому прибавились бы другие, уже кратные p, произведения). Но получается, что коэффициент при нулевой степени должен быть кратен p^2, противоречие. Следовательно, $\Phi(x)$ неприводим.

Пусть ζ – примитивный корень p-й степени из единицы, а k – примитивный элемент (первообразный корень) по модулю p. Тогда имеет смысл следующая нумерация: произвольно выбираем нулевой корень ζ_0, а для остальных $\zeta_n = \zeta_0^{k^n}$ (получается зацикленная по модулю $p-1$ нумерация всех примитивных корней). Так как $\Phi(x)$ неприводим, $[\mathbb{Q}[\zeta_0] : \mathbb{Q}] = p-1$ и $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{p-2}\}$ – набор линейно независимых элементов, составляющий базис этого поля. Покажем, что отображение σ, задаваемое формулой $\sigma(\sum\limits_i \lambda_i\zeta_i) = \sum\limits_i \lambda_i\zeta_{i+1}$, является автоморфизмом $\mathbb{Q}[\zeta_0]$ над $\mathbb{Q}$. Оно однозначно сопоставляет одному разложению по базису другое разложение с тем же набором коэффициентов, из чего понятна аддитивность функции.

$$\sigma(\lambda_i\zeta_i)\cdot\sigma(\lambda_j\zeta_j) = \lambda_i\lambda_j\zeta_{i+1}\zeta_{j+1} = \lambda_i\lambda_j\zeta_i^k\zeta_j^k = \lambda_i\lambda_j(\zeta_i\zeta_j)^k = \sigma(\lambda_i\lambda_j\zeta_i\zeta_j),$$

откуда следует и мультипликативность функции.

Множество неподвижных элементов поля K при произвольном автоморфизме f над полем k тоже составляет поле. Пусть L – множество неподвижных элементов. Результат сложения и умножения элементов L всегда будет элементом L: $\forall a, b \in L\ f(a+b) = f(a)+f(b) = a+b$, $f(ab) = f(a)\cdot f(b) = ab$. Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность сложения и умножения выполняются вследствие $L \subset K$; нуль и единица лежат в L, потому что $k \subset L$. Существуют и обратные элементы по сложению и умножению: $\forall a \in L\ a + f(-a) = f(a) + f(-a) = f(a-a) = f(0) = 0$, откуда $f(-a) = -a$; $\forall a \in L, a \neq 0\ \ a\cdot f(a^{-1}) = f(a)\cdot f(a^{-1}) = f(a\cdot a^{-1}) = f(1) = 1$ и $f(a^{-1}) = a^{-1}$. Следовательно, L – поле. Если $P(x)$ – многочлен с коэффициентами из L, то f переводит его корни только в его корни: так как коэффициенты многочлена неподвижны при действии автоморфизма, $f(P(\alpha)) = P(f(\alpha))$; если α является корнем P, это означает, что $P(f(\alpha)) = 0$.

Рассмотрим $n \mid p-1$. $\mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^n}$ – поле элементов $\mathbb{Q}[\zeta_0]$, неподвижных при действии σ^n, – расширение $\mathbb{Q}$ степени n: оно состоит из элементов вида $\lambda + \sum\limits_i(\lambda_i \cdot \sum_{j\equiv i \pmod n}\zeta_j)$, базисом являются n наборов $\sum_{j\equiv i \pmod n}\zeta_j$. Если $m \mid p-1$, $n \mid m$, то, аналогично, $\mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^m}$ – расширение $\mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^n}$ степени $\dfrac{m}{n}$ (при всём этом $\mathbb{Q}[\zeta_0] = \mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^{p-1}}$). Данное наблюдение позволяет построить башню квадратичных расширений $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^2} \subset \ldots \subset \mathbb{Q}[\zeta_0]^{\sigma^{p-1}}$. Любое квадратичное расширение можно получить присоединением корня квадратного уравнения к основному полю (следствие линейной зависимости любых трёх элементов данного поля над основным полем, в частности, элементов 1, α, α^2 для какого-то α). Таким образом, существует цепочка построений, позволяющая получить любое ζ_i и построить искомый многоугольник.

Лемма 5. *Для прочих простых нечётных p нельзя построить соответствующий корень (и многоугольник), как нельзя построить и многоугольник с непростым числом сторон, равным степени простого числа.*

Для простых p, не являющихся числами Ферма, степень $\Phi(x)$ не равна степени двойки. Поэтому нельзя построить соответствующий корень из единицы и многоугольник. Рассмотрим степень произвольного нечётного простого числа – p^d, многочлен $\Phi_{p^d}(x) = \dfrac{x^{p^d}-1}{x^{p^{d-1}}-1} = (x^{p^{d-1}})^{p-1} + (x^{p^{d-1}})^{p-2} + \ldots + 1$.

$$\begin{aligned}
&\Phi_{p^d}(x+1) = ((x+1)^{p^{d-1}})^{p-1} + ((x+1)^{p^{d-1}})^{p-2} + \ldots + (x+1)^{p^{d-1}} + 1\\
&(x+1)^{p^{d-1}} \equiv x^{p^{d-1}} + 1 \pmod p\\
&\Phi_{p^d}(x+1) \equiv (x^{p^{d-1}}+1)^{p-1} + (x^{p^{d-1}}+1)^{p-2} + \ldots + 1 \pmod p\\
&\Phi_{p^d}(x+1) \equiv x^{(p-1)p^{d-1}} \pmod p
\end{aligned}$$

Итак, все коэффициенты многочлена, кроме старшего, кратны p. Младший коэффициент $\Phi_{p^d}(x+1)$ при этом равен p (не кратен p^2), значит, многочлен неприводим над $\mathbb{Z}$. Все его корни – корни числителя, не являющиеся корнями знаменателя, – примитивные корни единицы степени p^d. Степень корней $\Phi_{p^d}(x)$ над $\mathbb{Q}$ равна $(p-1)p^{d-1}$ – это не степень двойки. Значит, их нельзя построить. Нельзя построить и правильный p^d-угольник.

Теорема. [Гаусс, 1796; Ванцель, 1836] *Правильный n-угольник можно построить с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \ldots p_l$, где p_i — различные простые числа Ферма.*

Понятно, что при $(m, n) = 1$, $m, n > 2$ построить mn-угольник можно тогда и только тогда, когда построимы m- и n-угольник по отдельности. ($\exists x, y \in \mathbb{Z} : mx + ny = 1$ – между соответствующими вершинами двух многоугольников, построенных вокруг одного центра и с одной общей вершиной, пролегает отрезок – сторона mn-угольника). Удваивать или делить на 2 число вершин можно всегда. Теперь утверждение теоремы очевидно следует из возможности построения правильного p-угольника для простых p, являющихся числами Ферма, и невозможности построения для других простых чисел и степеней нечётных простых чисел.

Остроугольные множества

Дмитрий Захаров

Множество точек в $\mathbb{R}^d$ называется *остроугольным*, если любая тройка точек из него образует острый угол. В этой заметке мы строим остроугольное множество в $\mathbb{R}^d$ размером не менее $2^{d/2}$.

Множество точек в $\mathbb{R}^d$ называется *остроугольным*, если любая тройка точек из него образует острый угол. В 1972 году Данцер и Грюнбаум [1] задали следующий вопрос: каков максимальный размер $f(d)$ остроугольного множества в $\mathbb{R}^d$? Они доказали линейную нижнюю оценку $f(d) \geq 2d-1$ и предположили, что эта оценка является лёгкой. Однако в 1983 г. Эрдёш и Фюреди [2] опровергли эту гипотезу при больших измерениях. Они дали экспоненциальную нижнюю границу:

$$f(d) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d > 0{,}5 \cdot 1{,}154^d.$$

Их доказательство — очень элегантное применение вероятностного метода. Один из недостатков их метода заключается в том, что доказано только наличие острого набора такого размера, и нет возможности превратить его в явную конструкцию.

В 2011 году Харанги [3] усовершенствовал подход Эрдёша и Фюреди и улучшил их оценку до

$$f(d) \geq c\left(\sqrt[10]{\frac{144}{23}}\right)^d > c \cdot 1{,}2^d.$$

В этой заметке мы докажем следующее рекуррентное неравенство:

Теорема 1. $f(d+2) \geq 2f(d)$. Из этой теоремы легко получается, что

$$f(d) \leq 2^{\frac{d}{2}+1} \quad \text{при} \quad d \geq 4.$$

В частности, и эти неравенства следуют также из [3], $f(4) \geq 8$, $f(5) \geq 12$.

Доказательство теоремы 1 явное и позволяет эффективно строить остроугольные множества.

Самая известная верхняя граница для $f(d)$ равна $f(d) \leq 2^d - 1$ и следует из основного результата из [1]. Данцер и Грюнбаум доказали, что если множество точек S в $\mathbb{R}^d$ определяет только острые и прямые углы, то $|S| \leq 2^d$. Более того, если $|S| = 2^d$, то S должен быть аффинным образом d-мерного куба.

Доказательство теоремы 1. Скалярное произведение векторов u и v мы обозначим через $\langle u, v\rangle$. Выберем наибольшее остроугольное множество $X \subset \mathbb{R}^q$, $|X| = f(d)$. Положим

$$s := \min\{\langle y-x, z-x\rangle \colon x, y, z \in X, x \neq y,\ x \neq z\}.$$

Поскольку множество X остроугольное, $s > 0$, и можно выбрать положительное число r, для которого that $4r^2 < s$.

Для каждой точки $x \in X$ на окружности радиуса r с центром в начале координат выберем точку $\varphi(x)$, так что все точки $\pm\varphi(x)$ различны. Рассмотрим множество $Y \subset \mathbb{R}^{d+2}$

$$Y = \{(x, \pm\varphi(x)),\ x \in X\}.$$

Очевидно, $|Y| = 2|X| = 2f(d)$. Мы хотим показать, что Y — остроугольное множество. Выберем три различные точки $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in Y$, где

$$\tilde{x} = \big(x, a\varphi(x)\big), \quad \tilde{y} = \big(y, b\varphi(y)\big), \quad \tilde{z} = \big(z, c\varphi(z)\big), \quad a, b.c \in \big\{\pm 1\big\}.$$

Пусть $x \neq y$ и $x \neq z$. Тогда

$$\langle \tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x} \rangle = \langle y - x, z - x \rangle + \langle b\varphi(y) - a\varphi(x), c\varphi(z) - a\varphi(x) \rangle. \tag{1}$$

Первое скалярное произведение в правой части формулы по крайней мере s по определению этого числа как минимального скалярного произведения, в то время как второе скалярное произведение не превосходит $4r^2$. По выбору r, сумма этих скалярных произведений положительна, откуда следует остроугольность треугольника $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$.

Предположим теперь, что $x = y$ (случай $x = z$ разбирается аналогично). Имеем $a + b = 0$, так что

$$\langle \tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x} \rangle = \langle b\varphi(y) - a\varphi(x), c\varphi(z) - a\varphi(x) \rangle = \langle 2a\varphi(x), a\varphi(x) - c\varphi(z) \rangle = 2\big(||\varphi(x)||^2 \pm \langle \varphi(x), \varphi(z) \rangle\big) > 0,$$

поскольку $\varphi(x) \neq \pm\varphi(x)$. Таким образом и в этом случае треугольник $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ остроугольный.

Мы заключаем, что каждый угол в Y является острым. Теорема доказана. $\square$

Благодарности: Мы хотели бы поблагодарить Андрея Купавского за обсуждения, которые помогли улучшить основной результат, а также за помощь в подготовке этой заметки. Мы также хотели бы поблагодарить профессора Райгородского за то, что он познакомил нас с этой проблемой и за его постоянную поддержку.

Литература

[1] L. Danzer, B. Grünbaum, Uber zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Ërdös und von V.L. Klee, *Math. Zeitschrift 79 (1962), 95–99.*

[2] P. Erdös, Z. Füredi, The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space, *Ann. Discrete Math. 17 (1983), 275–283.*

[3] V. Harangi, Acute sets in Euclidean spaces, *SIAM J. Discrete Math. 25 (2011), no. 3, 1212–1229.*2

Остроугольные множества II

Дмитрий Захаров

Множество точек в $\mathbb{R}^d$ называется *остроугольным*, если любая тройка точек из него образует остроугольный треугольник. Здесь мы приводим ясную конструкцию остроугольного множества в $\mathbb{R}^d$, размер которого не меньше $1{,}618^d$. Также мы представляем простую конструкцию, дающую остроугольное множество размером не менее $2^{\frac{d}{2}}$.

Введение

Множество точек в $\mathbb{R}^d$ называется *остроугольным*, если любая тройка точек из него образует остроугольный треугольник. В 1962 году Данцер и Грюнбаум [1] задали следующий вопрос: каков максимальный размер $f(d)$ остроугольного множества в $\mathbb{R}^d$? Они доказали линейную нижнюю оценку $f(d) > 2d-1$ и предположили, что эта оценка плотная. Однако в 1983 г. Эрдёш и Фёреди [2] опровергли эту гипотезу в больших измерениях. Они дали экспоненциальную нижнюю границу

$$f(d) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^d > 0{,}5 \cdot 1{,}154^d. \tag{1}$$

Их доказательство — очень элегантное применение вероятностного метода. Один из недостатков их метода заключается в том, что доказано только наличие остроугольного множества такого размера, и нет возможности превратить его в явную конструкцию.

В 2011 году Харанги [4] усовершенствовал подход Эрдёша и Фюреди и улучшил их оценку до

$$f(d) \geq c\left(\sqrt[10]{\frac{144}{23}}\right)^d > c \cdot 1{,}2^d.$$

В этой заметке мы докажем следующее рекуррентное неравенство:

Теорема 1. $f(d+2) \geq 2f(d)$. Из этой теоремы легко получается, что

$$f(d) \leq 2^{\frac{d}{2}}.$$

Пусть F_d будет d-м числом Фибоначчи, т. е. $F_0 = F_1 = 1$ и $F_{d+2} = F_{d+1} + F_d$. Также мы докажем следующее неравенство:

Теорема 2. $f(d) \geq F_{d+1}$ при $d \geq 0$.

Используя явную формулу для чисел Фибоначчи, мы можем написать асимптотическое неравенство для $f(d)$:

$$f(d) \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + o(1)\right)^d = (1{,}618\dots + o(1))^d.$$

Доказательства теорем 1 и 2 конструктивны и позволяют эффективно строить остроугольные множества.

Самая известная верхняя граница для $f(d)$ равна $f(d) \leq 2^d - 1$ и следует из основного результата из [1]. Данцер и Грюнбаум доказали, что если множество точек S в $\mathbb{R}^d$ определяет только острые и прямые углы, то $|S| \leq 2^d$. Более того, если $|S| = 2^d$, то S должен быть аффинным образом d-мерного куба.

Доказательство теоремы 1

Доказательства обеих теорем основаны на двух простых утверждениях:

Предложение 1. *Для любых трёх точек a, b, c, образующих остроугольный треугольник, найдётся $\epsilon > 0$, так что для всех $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$, удовлетворяющих условию $\|a - \tilde{a}\|, \|b - \tilde{b}\|, \|c - \tilde{c}\| < \epsilon$, точки $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$ тоже образуют остроугольные треугольники.*

Предложение 2.*(Ключевой факт) Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ — остроугольное множество, $r > 0$ — достаточно маленькое число. Для каждого $x \in X$ мы выбираем точку $\varphi(x)$ на окружности радиуса r с центром в начале координат так, что все точки $\pm\varphi(x)$ различны. Тогда множество $Y = \{(x, \pm\varphi(x)) |\ x \in X\} \subset \mathbb{R}^{d+2}$ и является остроугольным.*

Чтобы доказать теорему 1 мы применяем предложение 2 к максимальному остроугольному множеству X в $\mathbb{R}^d$, $|X| = f(d)$. Мы строим остроугольное множество $Y \subset \mathbb{R}^{d+2}$ размера $|Y| = 2|X|$, что даёт нам утверждение теоремы.

Доказательство предложения 2. Скалярное произведение векторов u и v обозначим как $\langle u, v\rangle$. Положим

$$s := \min\big\{\langle y - x, z - x\rangle \colon x, y, z \in X, x \neq y, x \neq z\big\}.$$

Поскольку множество X остроугольное, $s > 0$ и мы можем выбрать положительное число r, для которого $4r^2 < s$.

Наша цель доказать остроугольность множества Y. Возьмём произвольные три точки

$$\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} \in Y,$$

где

$$\tilde{x} = \big(x, a\varphi(x)\big), \quad \tilde{y} = \big(y, b\varphi(y)\big), \quad \tilde{z} = \big(z, c\varphi(z)\big), \quad a, b, c \in \{\pm 1\}.$$

Предположим, что $x \neq y$ и $x \neq z$. Тогда

$$\langle \tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x}\rangle = \langle y - x, z - x\rangle + \langle b\varphi(y) - a\varphi(x), c\varphi(z) - a\varphi(x)\rangle. \tag{2}$$

По выбору s первое скалярное произведение в правой части не меньше s, в то время как второе слагаемое не превосходит $4r^2$. По выбору числа r, сумма этих произведений положительна, откуда следует острота угла $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$.

Пусть $x = y$ (случай $x = z$ рассматривается так же). Имеем $a + b = 0$, так что

$$\begin{aligned}\langle \tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{z} - \tilde{x}\rangle = \big\langle b\varphi(y) - a\varphi(x), c\varphi(z) - a\varphi(x)\big\rangle = \Big\langle 2a\varphi(x), a\varphi(x) - c\,\varphi(z)\Big\rangle = \\ = 2\Big(\|\varphi(x)\|^2 \pm \langle\varphi(x), \varphi(z)\rangle\Big) > 0,\end{aligned}$$

так как $\varphi(x) \neq \pm\varphi(z)$. Итак, угол $(\tilde{y}, \tilde{x}, \tilde{z})$ острый и в этом случае. Заключаем, что каждый угол в Y острый.

Доказательство теоремы 2

Мы индуктивно выведем утверждение теоремы из следующей леммы:

Лемма. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ — остроугольное множество и h — такая гиперплоскость, что X лежит по одну сторону от h. Тогда найдётся такое остроугольное множество $X' \subset \mathbb{R}^{d+1}$ и такая гиперплоскость $H \subset \mathbb{R}^{d+1}$, что $|X'| = |x| + |X \cap h|$, $|X' \cap H| = |X|$ и X' лежит по одну сторону H.*

Доказательство теоремы 2. Для доказательства индуктивной базы, возьмём $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^1$ и гиперплоскость $h = \{x \in \mathbb{R}^1 |\ x = 0\}$. Ясно, что $|X| = F_2$, $|X \cap h| = F_1$ и пара (X, h) удовлетворяет условие леммы.

Допустим, мы построили остроугольное множество $X \subset \mathbb{R}^d$ и такую гиперплоскость h, что $|X| = F_{d+1}$, $|X \cap h| = F_d$ и X лежит по одну сторону h. Тогда, в силу леммы, существует остроугольное множество $X' \subset \mathbb{R}^{d+1}$ и такая гиперплоскость H, что

$$|X'| = |X| + |X \cap h| = F_{d+1} + F_d = F_{d+2}, \qquad |X' \cap H| = |X| = F_{d+1}$$

и X' лежит по одну сторону от H. Так что индуктивный шаг сделан. □

Доказательство леммы опирается на предложения 1 и 2.

Доказательство леммы 1. Мы можем предполагать, что

$$h = \{(x_1, \dots, x_{d-1}, 0, 0|\ x_i \in \mathbb{R}\}, \quad X \subset P = \{(x_1, \dots, x_d, 0|\ x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $A = X \cap h$, $B = X \setminus A$.

Рассмотрим такую $(d-1)$-мерную плоскость $h_2 \subset P$, параллельную h, что X лежит между h и h_2. Пусть

$$h_3 = h + (0, dots, r) \subset \mathbb{R}^{d+1},$$

где $r > 0$ — достаточно малое положительное число. Пусть $H \subset \mathbb{R}^{d+1}$ — гиперплоскость, проходящая через h и h_2. Рассмотрим множества: $A_+ = A + (0, \dots, 0, 0, r)$, $A_- = A - (0, \dots, 0, 0, r)$, и пусть B_H — проекция множества B на H.

Предложение 3. *Для достаточно малого r и произвольных $x, y, z \in A_+ \cup A_- \cup B_H$, удовлетворяющих условию $\{x, y, z\} \not\subset A_+ \cup A_-$, треугольник $\{x, y, z\}$ будет остроугольным.*

Доказательство предложения 3. Расстояние между $x \in X$ и любой соответствующей точкой $\tilde{x} \in \in A_+ \cup A_- \cup B_H$ не больше r, поэтому для всех достаточно малых r тупой угол может иметь место только в треугольниках $\{x, y, z\} = \{a_+, a_-, b\}$, где $a_+ = (a, 0, r)$, $a_- = (a, 0, -r)$ и $(a, 0, 0) \in A$, $b \in B_H$. Поскольку расстояние между a_+ и a_- равно $2r$, расстояния от каждого из них до b ограничены снизу числом, не зависящим от r, поэтому угол b является острым для малых r. По выбору H точка b лежит между гиперплоскостями $P + (0, ..., 0, r)$, поэтому углы $(a, 0, r)$ и $(a, 0, -r)$ треугольника $\{a_+, a_-, б\}$ тоже острые. □

Для каждой $x \in A$ обозначим через $C(v) \subset \mathbb{R}^{d+1}$ окружность радиуса r с центром в точке v и ортогональную h.

Предложение 4. *Для любого $\epsilon > 0$ найдётся гиперплоскость H_2, такая что*

1. *Расстояние от произвольной точки $v \in B_H$ до H меньше ϵ.*
2. *Для каждой точки $(v, 0, 0) \in A$ найдётся такая точка $\bar{v} = (v, \varphi(v)) \in H_2 \cap C(v)$, что $\|(v, 0, r) - \bar{v}\} < \epsilon$, и все точки $\pm\varphi(v)$ различны.*

Доказательство предложения 4. Пусть $u \in \mathbb{R}^{d+1}$: $H = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}|\ \langle x, v\rangle = 1\}$. Рассмотрим вектор $\alpha \in \mathbb{R}^{d+1}$ с условием $\|\alpha\| < \delta$ при достаточно малом δ, причём α не ортогонален всем векторам $v_1 - v_2$, где $v_1, v_2 \in A$. Берём $H_2 = \{x \in \mathbb{R}^{d+1}|\ \langle x, u + \alpha\rangle = 1\}$.

1. Для $v \in B_H$

$$\rho(v, H_2) = \frac{|\langle v, u + \alpha\rangle - 1|}{\|u + \alpha\|} \le \frac{|\langle v, \alpha\rangle|}{\|u\| - \delta} \le \delta \frac{\|c\|}{\|u\| - \delta} < \epsilon,$$

так как δ достаточно мало.

2. Рассмотрим пересечения l и l_2 гиперплоскостей H и H_2 с 2-плоскостью $\{(v, x_d, x_{d+1})|\ x_i \in \mathbb{R}\}$, где $(v, 0, 0) \in A$. Ясно, что l пересекает $C(v)$ в двух точки (одна из них $(v, 0, r)$), и поэтому для малых δ прямая $l2$ пересекает $C(x)$ и в двух точках, а также одна из этих точек стремится к $(v, 0, r)$, при $\delta \to 0$. Эту точку обозначим через $(v, \varphi(v))$. Достаточно показать, что все точки $\pm\varphi(v)$ различны для $(v, 0, 0) \in A$.

Так как $\|\varphi(v) - (0,r)\| < r$ для всех $\delta < r$, то $\varphi(v_1) \neq -\varphi(v_2)$. Выберем $\bar{v}_1(v_1, 0, 0)$, $\bar{v}_2 = (v_2, 0, 0) \in A$. Если $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$, то

$$\big(v_1, \varphi(v_1)\big) - \big(v_1, 0, 0\big) = \big(v_2, \varphi(v_2)\big) - \big(v_2, 0, 0\big),$$

т. е.

$$(v_1, \varphi(v_1)) - (v_2, \varphi(v_2)) = \bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{w},$$

но $(v_1, \varphi(v_1))$ и $(v_2, \varphi(v_2))$ лежат на H_2, следовательно, $\bar{w}$ ортогонален вектору $u + \alpha$, но это как раз то, что мы запретили при определении α. Полученное противоречие доказывает различность точек $\pm\varphi(v)$. □

Теперь возьмём достаточно малое ϵ, соответствующую ей гиперплоскость H_2 и отображение φ. Пусть $\tilde{B}$ — проекция B_H на H_2, кроме того, пусть

$$\tilde{A}_+ = \{x, \varphi(x) |\ (x, 0, 0) \in A\}, \quad \tilde{A}_- = \{x, -\varphi(x) |\ (x, 0, 0) \in A\}.$$

Объединяя предложения 1 и 4, можно сказать, что предложение 3 всё ещё верно для соответствующих множеств с тильдой. Надо проверить, что множество $Y = \tilde{A}_+ \cup \tilde{A}_-$ является остроугольным. Но это сразу следует из предложения 2. Мы заключаем, что множество $X' = \tilde{A}_+ \cup \tilde{A}_- \cup \tilde{B}$ является остроугольным. Мы имеем

$$|X'| = |\tilde{A}_+| + |\tilde{A}_-| + |\tilde{B}| = |X| + |X \cap h|,$$

также

$$\tilde{A}_+ \cup +\tilde{B} \subset H_2$$

и X' лежит на одной стороне H_2. Таким образом, пара (X', H_2) удовлетворяет условиям леммы. □

Благодарности: Мы хотели бы поблагодарить Андрея Купавского и Александра Полянского за обсуждения, которые помогли улучшить основной результат, а также за помощь в подготовке этой заметки. Мы также хотели бы поблагодарить профессора Райгородского за то, что он познакомил нас с этой проблемой, и за его постоянную поддержку

Литература

[1] L. Danzer, B. Grünbaum, Uber zwei Probleme bezüglich konvexer Körper von P. Ërdös und von V.L. Klee, *Math. Zeitschrift 79 (1962), 95–99.*

[2] P. Erdös, Z. Füredi, The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space, *Ann. Discrete Math. 17 (1983), 275–283.*

[3] E. Ackerman, O. Ben-Zwi, On sets of points that determine only acute angles, *European J. Combin. 30 (2009) no. 4, 908910.*

[4] V. Harangi, Acute sets in Euclidean spaces, *SIAM J. Discrete Math. 25 (2011), no. 3, 1212–1229.*2

Интервью с Н.Н. Константиновым

Интервью первоначально напечатано в журнале “Квант”, № 1, 2010 г.

Николай Николаевич Константинов — выдающийся организатор математического образования, один из создателей системы математических классов в Москве. Бессменный руководитель единственного в своем роде международного математического соревнования — Турнира городов, в котором принимают участие школьники со всего мира. Действительный член Московского общества испытателей природы, Московского математического общества. Представляет в Европе Всемирную федерацию национальных математических соревнований. Преподает в московской 179 школе. Награжден международной математической медалью имени Пола Эрдеша. Недавно получил премию Правительства РФ в области образования за создание Турнира Ломоносова.

Мы попросили его рассказать о себе, о своей работе и о взглядах на математическое образование. Николай Николаевич охотно откликнулся на нашу просьбу.

— *В школе вы увлекались скорее биологией...*

— Увлечение биологией у меня было еще до школы. Семи лет от роду я впервые посадил землянику и пытался сделать из нее клубнику. Мне это не удалось. Я себя убедил, что ягоды стали чуть крупнее, когда я их много поливал. Я попросил в библиотеке, уже в эвакуации, т.е. в 1941 году, — я был в третьем классе, — книжку о путешествиях, и мне дали Дарвина, «Путешествие натуралиста вокруг света на корабле “Бигль”». В предисловии профессора С.Л. Соболя было написано, что приобретенные признаки не передаются по наследству. Я и сейчас говорю: одно дело что-то выучить по книжке, и совсем другое — пережить эмоционально. Я-то это пережил в очень восприимчивом возрасте. Мне просто смешно, когда люди начинают обсуждать то, где они ничего не прочувствовали, и приходят к заранее намеченным выводам.

Потом я занимался в станции юных натуралистов в Сокольниках, в Ботаническом саду МГУ. Там был ботаник доцент Потапов, который мной руководил. А в девятом классе я ходил в самый хороший кружок, самый сильный, нас водили по кафедрам биофака. Но это был 1947/48 учебный год, а летом 1948 года разразилась катастрофа с биологией, появился Лысенко и так далее. После этого на биофак было бесполезно идти. Не давали книги: запрещено было выдавать учебники. К тому же я увлекся математикой, и для меня это уже не было потерей. Так что увлечение математикой у меня как бы вторичное, и я вижу в этом некоторый плюс. Я всё время ощущаю, что потеря математики для меня не есть потеря всего.

— *А что есть потеря всего?*

— Ну если бы еще и биология, и физика, и всё остальное умерло для меня, вот тогда это была бы потеря всего.

— *Т. е. математика — одна из нескольких важных вещей.*

— Да, одна из. Допустим, в математике ничего не получается. Ну что делать, это не повод для самоубийства.

— *А почему вы поступили на физфак МГУ?*

— Конечно, я увлекся физикой — именно в 10, выпускном классе. Наверное, потому, что математика казалась мне тогда несерьезной наукой. На кружках там какие-нибудь зайчики прыгают, красные, зеленые и белые, да еще доказать надо, что красных четное число. Все эти задачи мне казались чем-то игрушечным. Странно этим заниматься. Потом-то я понял, что это, конечно, упражнения. Но думаю, что люди, которые злоупотребляют такими детскими сюжетами, не вполне понимают психологию. Детям нравится, когда их занятия выглядят взрослыми.

— *А в олимпиадах приходилось участвовать?*

— В седьмом классе учитель математики — очень популярный у нас был учитель, когда его сменили, весь класс бастовал, — он порекомендовал мне пойти на олимпиаду, но рекомендация так выглядела, что я не пошел. Он сказал, что проводится такая контрольная работа, лучшие ученики собираются и соревнуются, кто лучше напишет эту контрольную работу. Я подумал: «Вот идиоты, мало им контрольных работ...» А пошел я туда через год потому, что мой сосед по парте сходил на лекцию в университет. Это была воскресная лекция на тему о четырехмерном пространстве. Он вернулся с нее совершенно сумасшедшим, глаза у него были где-то далеко, и он всё время рассказывал мне что-то, чего я понять не мог. На следующую лекцию мы пошли вместе. Это была лекция Исаака Моисеевича Яглома об индукции в геометрии. Она произвела на меня потрясающее впечатление, потому что там было много неожиданного. Яглом разговаривает с теми школьниками, которые сидят непосредственно перед ним, и спрашивает: а вот есть такая-то теорема? — надо же, думаю, профессор университета — и не знает, какие есть теоремы. Куда я попал?.. Школьники, которые перед ним сидели, не дали ему вразумительного ответа. — «Ну ладно, — говорит Яглом, — какая разница. Докажем ее». Это меня совершенно потрясло. Он не знает, какие есть теоремы, и ему этого и не надо знать. Совершенно неожиданная вещь для школьника, который привык: выполнил задание — получил пятерку, и при этом ничего не узнал.

— И после физфака хватило наглости преподавать у математиков?

— Не только после физфака — на пятом курсе физфака я на мехмате объявил семинар по теории функций действительного переменного. Наглости у меня хватало всегда, и сейчас хватает.

Занятия в университете тогда начинались в 10 часов. Естественно: не было метро. Добираться до Ленинских гор было труднее. Автобусы, длинные очереди... А так как нужно было еще аудиторию найти, мы назначили занятия на 8 утра. Занимались человек 15 студентов первого курса, которые всегда приходили к восьми. Некоторые из них стали впоследствии очень сильными математиками. Среди них были Коля Розов; Женя Голод, самый сильный; Саша Вентцель; Ира Виноградова; Леня Бокуть. Были еще люди, которых я по фамилии забыл. Семинар был достаточно сильный, он длился один семестр и кончился тем, что я дошел до предела своих знаний. Дальше мне самому надо было что-то раскапывать.

Позже я собрался поступать в аспирантуру к Алексею Андреевичу Ляпунову, потому что он занимался кибернетикой, а я в это время был просто потрясен статьей Л.В. Крушинского про экстраполяционные рефлексы. Я к тому времени уже пять лет проработал на физфаке преподавателем математики, но когда я прочитал Крушинского, я был просто ошеломлен. Настолько это было для меня фантастически интересно. Хотя я не понимал, чем я там могу быть полезен. Но я бросил преподавание на физфаке и пошел в аспирантуру. Я преподавал вроде бы успешно, но когда почувствовал, что двойки стал ставить равнодушно, понял, что с этой работы надо уходить. Думаю, многие люди не замечают этой грани.

— Работы Крушинского потрясли вас тем, что он пытался понять, как устроен мозг?

— Ну, что-то совершенно новое. Я понимал, что бывают, скажем, условные рефлексы, но это что-то совершенно другое. Дело в том, что условные рефлексы — ну, например, у осьминогов — они уже появляются, но в зачаточном состоянии, очень слабенькие. У многих рыб даже вообще не обнаруживается ничего подобного. А пространственная ориентация есть раньше. Т.е. это, может быть, более фундаментальная вещь.

— А как возник мультфильм, в котором ходила как живая компьютерная кошечка?

— Это было в 1968-м году. В это время появилось АЦПУ. До этого была только узкая-узкая ленточка с цифрами, даже букв не было. Она шла с бешеной скоростью, и потом было целое искусство всё это читать. Появилось АЦПУ-128, а 128 потому, что 128 символов в строчке — длинная строчка. И сразу появилась мода делать картины: ну, например, портрет Ленина, выбитый буквами. Понятно, что здесь компьютер ни при чем. Но раз появилась возможность делать рисунки, значит, появилась возможность делать мультфильмы.

Толчком было вот что. Мой бывший студент, Валера Иванов, который кончил кафедру биофизики, делал такой кукольный фильм. Из пластмассовых шариков сделал модель молекулы ДНК и стал показывать, как она может деформироваться. Делал он это, как делают кукольные фильмы. В одном состоянии сфотографировал, потом чуть-чуть повернул, снова сфотографировал, и так далее, а потом показывает фильм. А я ему и говорю, что это нужно делать на компьютере, потому что когда ты поворачиваешь руками, у тебя точность потрясающе плохая, и даже если и можно сделать фильм для показа, для научной работы его использовать совершенно невозможно. Давай сделаем фильм компьютерный. А для этого надо было подумать, как информацию организовать. Первоначально в обсуждении участвовало несколько человек, потом реально работало трое. Кроме меня, еще Владимир Пономаренко и Виктор Минахин.

Удивительно, что сделано это в 1968 году, сорок лет тому назад, и на всё это время все как бы забыли про эту вещь, потом вдруг вспомнили[1].

— А почему у вас возникла идея заниматься со школьниками?

— Сначала, когда я еще учился на физфаке, я со школьниками не работал. Но у меня были грамоты на олимпиаде, и со мной стали носиться немножко, включили в научно-студенческое общество, и так далее... Короче, на втором курсе я был зампредом городской физической олимпиады. Как-то было естественно, что я в этой области. Ну и мы с Игорем Иванчиком, это мой однокурсник, решили вести физический кружок в большой аудитории для всех желающих, каждый раз могут приходить новые люди, сто человек присутствуют... Нам предоставили возможность готовить демонстрационные эксперименты, весь кабинет физических демонстраций был в нашем распоряжении. Мы могли делать любые эксперименты для себя, а потом выбирали, что мы показываем. И там были два великих человека, Сергей Иванович Усагин и второй — Валентин Семенович, забыл фамилию. Это были такие русские умельцы без всякого образования, у которых всё всегда работает. Отец Сергея Ивановича был такой же, он изобрел трансформатор. Нечаянно. Это было для меня очень полезно, и, наверное, школьникам было интересно. В общем, мы довольно долго с Игорем вели такой кружок. Когда я уже окончил физфак и стал ассистентом на втором курсе, то моими студентами были мои бывшие школьники. Так оно само собой и получилось, что я стал вести кружки. Но это были физические кружки, а математические я не вел сначала, их вели мои друзья-мехматяне. Вот кто-то из них уезжает на каникулы и просит два занятия провести вместо него.

Так я понемножку втянулся в математические кружки, а к пятому курсу до того обнаглел, что для студентов первого курса мехмата организовал семинар. И я понял тогда удивительную вещь, абсолютно новую для меня. Уровень взаимопонимания между преподавателем и студентом становится совершенно иным, когда преподаватель принимает задачи. Эта систематическая работа, когда я пытаюсь понять твою мысль, а ты пытаешься понять мою мысль, — это совершенно иной уровень взаимопонимания, чем тот, что бывает, когда лектор читает лекцию. А особенно сейчас — дистанционно... человек, сидя дома, может слушать лекцию в университете... там не будет этого уровня. Неизбежно получается поверхностно. Он и вопрос не может задать. Я не против дистанционного обучения, только надо понимать, что оно не всегда может что-то дать. Если не требуется глубокое взаимопроникновение, например — лекция на тему «Есть ли жизнь на Марсе», то вполне можно. Вот я пью кофе, одновременно слушаю лекцию «Есть ли жизнь на Марсе», это нормально, это не плохо. Однако в математике практически нет случаев, чтобы математик не имел руководителя. И руководитель должен быть достаточно толковым. Есть замечательное высказывание Леонардо да Винчи: «Плох тот ученик, который не превосходит своего учителя». Владимир Игоревич Арнольд тоже всегда подчеркивает это: что молодежь лучше решает задачи, чем мы, которые их учим. Иначе прогресса бы не было.

— Толчком к тому, чтобы вести кружок, была именно вот эта мысль: что именно общение преподавателя с учеником, когда решаются задачи, обсуждаются — очень важно?

— Да. Кружок или класс.

Я просто из любопытства приходил в кружок Андрея Лемана и Андрея Леонтовича. Очень

[1]Подробно обо всем этом можно прочитать в статьях «Прибытие кошечки» и «Знает ли кошка, что она не настоящая» (журнал «Компьютерра», номер 7 за 2006 год). А сам мультфильм теперь можно найти в интернете.

http://www.etudes.ru/mov/kittie/index.php сильный был кружок, но, правда, и с некоторым элементом халтуры. Ну, например: «Как, — говорит Леман, — вы не знаете аналитической геометрии? Ну я вам сейчас расскажу. Вот уравнение прямой, вот уравнение эллипса. Всё понятно?» Т.е. годовой курс — или полугодовой — за несколько минут.

— Это был знаменитый кружок «Альфа»?

— Нет, это был кружок Лемана и Леонтовича.

В это время появилось много школьников — это были люди, родившиеся после войны. И появилась мода читать для них лекции по современным разделам математики. А я подумал, что, собственно, начинающим не современная же математика нужна. Что они там поймут в современной математике, когда они не знают ничего. И вот когда ребята меня спросили, — ребята из кружка Лемана и Леонтовича, — советую ли я им пойти на какие-то лекции, то я сказал: давайте лучше я вам сам дам задачи, и вы попробуете. И я стал давать им задачи, и так возник первый вариант программы матшколы. Вот это и был кружок «Альфа». Там работало всего четыре-пять школьников.

Кружок «Бета» был задуман гораздо сильнее. Мы решили со Славой Цуцковым — это был такой очень сильный школьник, который учился в кружке у студента Арнольда, потом поступил на физфак.

— У Владимира Игоревича?

— Да. Слава потом погиб, это трагическая история. Он провел кружок для школьников по квантовой механике. Но он не мог никакого математического аппарата им рассказать, потому что ничего они не знают. И вот тогда мы решили сделать такой кружок, чтобы дать им тот математический аппарат, с помощью которого они смогут написать и понимать все уравнения электродинамики и квантовой механики. Это был кружок «Бета». А ребята из кружка «Альфа» были помощниками. Так как там была твердая цель, чтобы они нечто усвоили, нам пришлось ввести фашистский режим. Дисциплина была как в гестапо. Человек, который не выполнил хотя бы одно задание, исключается из кружка. Но может прийти, если задание выполнит. Семьдесят человек дошло до конца. Но по дороге погиб Цуцков. И я дальше не мог продолжать — у меня не было в голове таких знаний, чтобы провести кружок по квантовой механике. Но до электродинамики я их довел. Так вот, из всех учеников один человек продолжил ту работу, ради которой этот кружок начался. Это Александр Комеч. Кстати, из кружка «Альфа» вышел Григорий Маргулис — у него медаль Филдса.

— Это очень сильный математик.

— Да. Ну, он, конечно, в основном не у меня учился, а у своего отца. У меня тоже, но я не имею морального права считать его своим учеником.

— А как возникла идея матшкол?

— Эта идея возникла у А. С. Кронрода. Я понимал, что мне придется кружковскую деятельность свернуть.

— А он стал уговаривать — давай, мол, наберем маткласс?

— Да. Если, — говорит, — ты не согласишься, то я тогда свою договоренность сверну, прочту там какие-то лекции...

— И так возник первый класс.

— Да. Но еще раньше, чем первый класс, была просто группа. Никакого нового класса, а просто в старом классе группа, в которой велись специально какие-то дополнительные занятия.

— Тогда же появилась система листков, о которой все говорят: вот, Константинов придумал систему листков?

— Ну, систему листков я придумал, когда у меня был кружок «Альфа». Потому что надо было, чтобы все занятия сохранялись. Если человек пропустил, чтобы он ничего не потерял. Идея очень простая и понятная.

Листки — чисто практическая вещь. У меня к этому времени — я же пять лет работал на физфаке — был реальный опыт преподавания, и я уже понял, что система преподавания, которая существует в МГУ, — лекции и семинары, — находится на пределе своих возможностей. Из нее нельзя больше ничего извлечь. У одного человека 25 студентов. Если я задал какое-то домашнее задание, то максимум, что я могу — пройти по рядам и увидеть: у людей что-то написано. Или тщательно посмотреть, как один человек работал, например. Я даже коллоквиум устраивал, чтобы проверить, что они знают. Приглашал своих друзей. Но это не было предусмотрено программой.

А в кружке «Альфа» требовалось все задачи сдать — неправильно же, когда каждую десятую задачу проверил, а на остальное наплевать, — ну как на экзаменах: из 30 вопросов ты один знаешь — и слава богу, вот тебе пятерка. Смешно? А почему-то другим не смешно.

— Т.е. важная идея системы листков — что человек должен решить сам много задач, а не просто прочитать что-то в учебнике.

— Да, он должен прорешать, а я должен принять.

Понятно, что это не единственный способ преподавания.

Почему в анализе этот способ идет хорошо? Потому что в анализе очень мало теоретического материала и очень много упражнений. Фактически, если ты знаешь определение предела, то дальше море задач, и уже нечего читать, кроме как рассказывать решения этих задач. Далеко не все предметы так устроены. Бывает нужно построить архитектуру какую-то, только после этого задачи появляются. А в анализе почти нет этой архитектуры, фактически самая начальная часть анализа состоит из единственного определения. Все конструкции почти одинаковы. Нужно этим овладеть. Когда я начал преподавать на физфаке, я был потрясен тем, что никто мне не объяснял, как надо преподавать. Полная свобода. Делай что хочешь. Да, я понимал, что им придется сдать зачеты, уже какая-то программа появлялась.

— Значит, одна из причин того, что был выбран анализ — то, что он подходит...

— Нет, не в том, что он подходит. Я смотрю — написано в программе: определение предела — 6 часов. Я думаю: что за бред. Чтобы сформулировать определение, 6 часов не надо. А чтобы им овладеть — этого мало.

Вот так листки и появились. Меня сейчас спрашивают некоторые иностранцы: вот вы начали в 1980 году Турнир городов. Но ведь тогда не было электронной почты! Как же вы работали? — Ну как — обычной почтой работали. Не было электронной, а обычная была. Надо было заранее задачи послать, вот и все. — А как же система листков, у вас же не было принтеров в 1961–1962 году? — Ну да, принтеров не было. Я 17 экземпляров папиросной бумаги закладывал в пишущую машинку.

— Давайте про Турнир городов поговорим. Это ведь особая олимпиада. Например, в турнире зачет происходит по трем задачам из пяти-семи. Это отличает его сразу от всех олимпиад. Мы не стремимся к тому, чтобы человек пытался все решить, мы хотим, чтобы он выбрал то, что ему нравится.

— Совершенно верно. Вот, например, недостаток Международной олимпиады в том, что там нужно быть универсалом обязательно, в то время как, чтобы быть ученым, вовсе не обязательно быть универсалом. А международник должен быть всеяден. Но это скорее подготовка менеджеров фирм, чем математиков.

— Еще Турнир городов — олимпиада самого высокого уровня, но принимать участие может любой.

— Совершенно верно.

— Еще мы стараемся давать нестандартные задачи.

— Да, конечно, идея такая, что мы стараемся давать людям что-то новое, к чему они заведомо не могли специально готовиться. Вот Павел Кожевников подозревает, что американцы как раз целенаправленно готовятся к тем задачам, которые обычно бывают на международных олимпиадах. Он говорит, что если посмотреть, через какие олимпиады наши ребята пробиваются и через какие — американцы, то американцы попадают туда значительно проще.

— Давайте вспомним несколько примеров ярких задач из Турнира городов.

— Думаю, что яркой была задача Максима Концевича про размножение фишек, ее много раз обсуждали:

> На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (в шахматной нотации это клетки a1, b1, c1, a2, b2, a3). На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки обе свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток. Можно ли достигнуть этой цели, если в исходной позиции
>
> а) имеются всего 6 фишек, и они стоят на отмеченных клетках;
>
> б) имеется всего одна фишка, и она стоит в левой нижней отмеченной клетке (a1).

Было много ярких задач Агниса Анджанса.
— *А задача Сережи Маркелова про параллелепипед:*

> Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол? (Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.)

— Это здорово, да. У Маркелова несколько таких задач. Вот еще красивая его задача:

> На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

Она по форме своего изложения кажется задачей на комбинаторику, а на самом деле — задача по геометрии.
— *Отличная задача была про карточные фокусы.*
— Да, безусловно:

> а) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причем одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные — картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту. Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
>
> б) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?

Эта задача замечательна тем, что она была в ослабленной форме (пункт а) опубликована у Мартина Гарднера, а Гриша Гальперин придумал усиление, очень естественное (пункт б).

Конечно, весь смысл в том, чтобы задачи были яркие.

— *Красивые. Или чтобы они были неожиданные. Или вот как мы обсуждали — очень здорово при обучении давать школьникам задачи, в которых напрашивается очевидный ответ, но он неверный.*

— Очевидный, но неверный, да. Вот задача про параллелепипед такая. Или задача про сумасшедшую старушку (это уже не из Турнира), сейчас мои кружковцы очень увлеклись:

Каждый из N пассажиров купил по билету на N-местный самолет. Первой зашла сумасшедшая старушка и села на случайное место. Далее, каждый вновь вошедший занимает свое место, если оно свободно; иначе занимает случайное. Какова вероятность того, что последний пассажир займет свое место?

— Да, там неожиданный ответ. Пусть наши читатели порешают эти задачи.

— Задача про альпинистов — ее уже один американец из тех, что к нам приезжали, в свою книжку поместил как задачу классическую, с неизвестным автором. Я сказал, что вроде я автор...

Среди ровной степи стоит гора. На вершину ведут две тропы (считаем их графиками непрерывных функций), не опускающиеся ниже уровня степи. Два альпиниста одновременно начали подъем (по разным тропам), соблюдая условие: в каждый момент времени быть на одинаковой высоте. Смогут ли они альпинисты достичь вершины, двигаясь непрерывно, если а) тропы состоят из конечного числа подъемов и спусков; б) в общем случае?

— А она возникла просто из анализа?

— Нет, она из моих занятий топологией возникла. Она во многом заменяет теорему Жордана. Я это понимал для многоугольника. С моими ребятами мы довели ее до теоремы про непрерывный образ окружности.

— Что он делит плоскость на две части?

— Ровно на две, не на три и не больше. Что делит — это как раз легче, а вот что ровно на две — это труднее. В общем, получилась теорема Жордана. Ну, я так и думал, что она должна получиться, потому что вроде бы альпинисты — это более сильная вещь.

— И эта знаменитая ваша задача о возах тоже возникла из анализа:

Из города A в город B ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей 2l, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

— Это задачи про одно и то же. Задачу о возах обычно новички не могут оценить, потому что они очень быстро придумывают неверное решение и успокаиваются. А Арнольду понравилось... Почему задача о возах стала всемирно известной? Благодаря книжке Арнольда.

— Да, она есть в его учебнике по дифференциальным уравнениям.

— Она не просто есть там, она там первая. С нее начинается. И с моей фамилией. Но он ее решает там с помощью теоремы Жордана. А у меня-то была мысль, что она как раз вместо теоремы Жордана хорошо работает. Она пробивает там, где теорема Жордана не тянет.

— Как к Турниру городов относятся за рубежом наши друзья, почему они в нем участвуют?

— В основном они ценят задачи.

— Еще отдельная тема — турнир Ломоносова, за который в этом году вы получили премию. Это же совершенно уникальное мероприятие. Одновременно проводятся соревнования по многим предметам, в разных аудиториях: там — математика, там — физика, там — литература.

— Оно отличается от Интеллектуального марафона тем, что участие во всех соревнованиях не обязательно. В марафоне есть такая идея по умолчанию, что нам нужны универсальные люди. А в турнире Ломоносова нет этой идеи. Почему, собственно, нам нужны универсальные люди? Нам нужны люди, которые в чем-то могут сделать что-то фантастически интересное. Мечта такая, что вот есть люди, мы их привлекаем, они чем-то заинтересовались, начали учиться. Идея в том, чтобы подтолкнуть людей к серьезному самообразованию — с помощью кружков или как-нибудь еще. А почему нам нужно, чтобы человек был универсальным, вовсе не обязательно, если он увлекся, скажем, физикой — ну и слава богу. Идея, что якобы нужно как-то отдельно выделять и награждать людей, которые как-то по многим предметам показали себя, — я не вижу в этом смысла.

— Человек, когда растет, развивается, и просто сильный и способный человек может разбираться во всем, пока он маленький, пока не слишком сложные задачи. Но человек должен как-то себя найти.

— То, что к нему прилипает, и есть его собственное, то, в чем он отличается от других. Вот что сказал Эйнштейн: специальную теорию относительности придумали бы и без меня, не один, так другой. А вот что касается общей теории относительности, — тут у меня есть подозрения, что бог специально меня послал на Землю, чтобы я придумал именно ее.

Может быть, никто другой бы не придумал. Это было его родное, то, что было ему свойственно.

Так что мне кажется, нужно одобрять, если человек интересуется и тем, и другим, и третьим, но культивировать это совершенно не обязательно.

— На турнире Ломоносова человек, который в школе не заинтересовался каким-либо предметом, может увидеть, что этот предмет может быть интересным.

— А для этого нужно, чтобы аудитории были рядом.

— Конкурсы небольшие, можно часок посидеть здесь, потом пойти туда...

— Поэтому очень важно, чтобы оргкомитет состоял из единомышленников, чтобы не было такого, что каждый тянет на себя.

— Как вы относитесь к ЕГЭ?

— Я думаю, что ЕГЭ — это очень вредная идея, уже видно, что люди не собираются ни о чем думать, а только знают, как готовиться к тому, чтобы ответить правильно на вопросы. В пользу ЕГЭ говорит какое-то высшее упрямство. Здесь у меня такой полуоптимизм. В 1943 году Сталин придумал разделить мальчиков и девочек в школах. Это длилось десять лет. В 1953 году, как только Сталин умер, это сразу отменили.

— Т. е. это не что-то естественное, это блажь каких-то людей, и возможно, она пройдет.

— Блажь. Может быть, она связана с деньгами — кто-то там что-то зарабатывает, но по крайней мере это блажь.

— Я хотел спросить про математику и физику. Иногда их противопоставляют, кто-то говорит — нет, математика — это часть физики, кто-то — что это только инструмент для физики. Как человек, который знает и математику, и физику, что вы могли бы сказать по этому поводу?

— Во-первых, физику я не знаю. Математику тоже не знаю. Ну, конечно, прикоснулся немножко к тому и другому.

Конечно, они разные. Например, есть принцип Гюйгенса—Френеля, — это как рассчитывать интерференционную картинку. То, что там два имени, и одно из них — Гюйгенс, говорит о том, что он появился в XVII веке. Он до сих пор не доказан, но это никого не волнует. Вот если собака определяет истину с помощью носа, человек — больше с помощью глаза, то математики и физики — они разными органами воспринимают. Математики считают, что всё должно быть доказано. Физики считают, что нужно найти объяснение явления. У них явление, которое наблюдается, — это исходная позиция. Надо ему найти объяснение. Например, явление сверхтекучести гелия математически описал Ландау. Это считается его крупным достижением. Но это приближенное вычисление, и оценка ошибки не существует. Тем не менее физики считают, что они теперь понимают, почему это происходит.

— Но, с другой стороны, математики тоже хотят разобраться в каких-то явлениях, в каких-то теоремах, ситуациях. Они же не просто жонглируют формулами.

— Конечно. Но частично это есть. Ну, например, очень многие следствия аксиомы выбора — я знаю физиков, которые говорят, что это математические фантомы.

Это, конечно, логическое следствие аксиом, которые они приняли, но это не имеет отношения к реальной действительности. Математические фантомы, следствия неудачно придуманных аксиом. А сейчас у математиков развивается мысль, что нужно ограничиться счетной аксиомой выбора, и тогда многие фантомы пропадают. Например, неизмеримые множества исчезают.

Ну, кто его знает. Павел Сергеевич Александров говорил, что это — математическая реальность. Реально то, что из этих аксиом такие следствия получаются. Это математическая реальность, но не факт, что за ней есть какая-то физическая реальность.

Физика как работает? Она создает математическую модель. Еще бывает, что вербальная модель существует сначала, то есть некоторые словесные разговоры о том, как происходит явление. Но это еще не математическая модель. Потом уже создается математическая модель, в нее входят многие вещи из математики. Например, кинематика. Там же предполагается, что каждая точка имеет координату. Расстояние всегда можно разделить пополам. А в реальной физике, чем меньше расстояние, тем его труднее разделить пополам, и это становится совершенно нереальным, когда у нас нет способа измерить такое маленькое расстояние. Но, конечно, с помощью моделей все-таки происходит понимание.

Это всё загадка, тут никто не понимает, как на самом деле что происходит, а мне чисто эмоционально нравится высказывание Спинозы. Он говорит: «Свобода достигается знанием, а знание достигается духовным единением с природой». Но слово «природа» он отождествлял со словом «бог». В духовном единении с богом. Я думаю, что эта истина достаточно правильная и глубокая. Вот, например, Фарадей. Почему он знал, что существует переход из магнитного поля в электрическое? Никто же не наблюдал. А почему он знал, что существует? Я вот это понимаю как результат духовного единения с природой.

— Как бы слышать музыку ангелов?

— Ну что-то в этом роде. Он уже сделал несколько крупных открытий, у него была хорошо отработанная интуиция, и поэтому он мог, как бог, видеть истину прямо, не с помощью хитроумных рассуждений, а прямо.

— Мы как-то обсуждали, что прямое видение истины важнее умения доказывать теоремы.

— Ну да, конечно.

— Это, кстати, тоже интересный вопрос. Насколько важна, скажем, математическая строгость в школе, при обучении. Если всё доказывать очень строго, это же можно…

— Думаю, здесь вот какой компромисс существует. Если я в каком-то месте сослался на очевидность, даже, может быть, не сослался, а умолчал, — умолчал, понимая, что ученики воспримут это как нечто естественное и не вызывающее возражений, — то это может быть честным, а может быть нечестным. Честное — в том случае, если я могу, не разрушая этой структуры, добавить точное рассмотрение, а нечестное — если нужно разрушить эту структуру, чтобы сделать ее точной.

Вот, например, я хочу доказать, что множество точек отрезка несчетно. Допустим, что оно счетное. Берем отрезок длиной единица, перенумеруем эти точки, и точки покрываем интервалами — первую точку интервалом длиной одна десятая, вторую — одна сотая и так далее. Получается, что мы все точки отрезка длины единица покрыли интервалами, сумма длин которых заведомо не больше одной девятой. Это очень понятное рассуждение. Для начинающих оно потрясающе убедительное, хотя оно и нестрогое. Надо доказать еще, что сумма длин этих интервалов, покрывающих отрезок, должна быть больше, чем длина самого отрезка. Но эта неточность честная, потому что это можно доказать. Можно отдельно, на одном занятии доказать эту теорему, и всё получается нормально.

Нечестная игра — если ты ссылаешься на очевидность, но заменить это точным рассуждением не удается.

Поэтому учебник Киселева удачный. Там, например, существование перпендикуляра доказывается перегибанием листа бумаги.

— Наглядно, понятно, всем очевидно.

— Да. И всё равно там потом правильное доказательство есть.

— В этом смысле меня удивляет очень, например, в школьном учебнике Погорелова по геометрии — нет такой аксиомы, что сумма двух сторон треугольника больше третьей. Это доказывается из некоторых других аксиом, хотя для меня это более понятная и более простая аксиома — что отрезок — это самое короткое расстояние.

— И подход с аксиомой о кратчайшем расстоянии удачен педагогически, потому что все как бы заранее знают, что это так.

Вопросы задавал Сергей Дориченко.

Авторская математическая педагогика Николая Н. Константинова для людей с крыльями

Евгений Матусов

Первая половина большой статьи “Nikolai N. Konstantinov’s Authorial Math Pedagogy for People with Wings”, Journal of Russian and Est European Psychology, Vol. 54, No 1. 2017 в переводе на русский язык. Печатается с незначительными сокращениями. Цитаты из различных источников имеют текстовое выделение.

Этот специальный выпуск посвящён инновационной педагогике советско-российского педагога-математика Николая Николаевича Константинова. В его основу легли разные и временами противоречивые интервью с Константиновым, учителями математики, занимающимися его педагогикой, и бывшими учениками, имеющиеся источники на русском и английском языках, и мои собственные воспоминания, как бывшего ученика Константинова. Я пытался реконструировать, определить, проанализировать и оценить его инновационную педагогику. Сам Константинов определил свою инновационную педагогику как продвижение «людей с крыльями» — поощрение инициативы, творчества, причастности, критического мышления и самореализации учащихся как в спорте, так и в других областях. В математике Константинов предоставляет ученикам выбор математических задач, тщательно изучает математические решения учащихся и даёт им подсказки в качестве прямого ответа на вопросы и затруднения, с которыми ученики сталкиваются в своих конкретных математических задачах. Я показываю, что его педагогический подход — комплексный, а не ограничен только математикой. Обсуждаются возникающие противоречия между учебными планами учащихся и навязыванием учителей, образовательной элитарностью и социальным равенством, а также авторитарным положением учителя и поддержкой Константинова.

Введение

С 2011 года я преподаю своим студентам — студентам, будущим преподавателям и выпускникам, будущим исследователям образования, — используя режим обучения «Открытый учебный план», включающий в себя длинный список возможных учебных тем курса, который я разрабатываю, основываясь на моих собственных профессиональных знаниях предмета и моих собственных парадигматических наклонностях и вкусе. Я также просматриваю интернет-программы моих коллег по всему миру, преподающих аналогичный предмет, и стараюсь добавить их темы в мой список, который я называю «Учебная карта». Студенты могут также вносить изменения в карту учебных планов, добавляя новые темы. В учебной карте я сопровождаю каждую тему «тизером», коротким параграфом, вызывающим интерес студентов к теме. Я приглашаю своих студентов добавлять свои собственные темы (и тизеры) на учебную карту через наш веб-класс. В конце каждого урока мои студенты голосуют в два прохода по следующей теме класса. Первый раз они голосуют индивидуально, называя столько тем, сколько захотят. Второй раз они голосуют только по одной из нескольких тем, которые получили наибольшее количество голосов за первый проход. До второго голосования студенты пытаются убедить сверстников проголосовать по своему выбору. Иногда класс выбирает две или даже три темы для изучения. Когда-то они предпочитают оставаться на одной теме и в следующий урок. Время от времени класс разделяется на более мелкие группы с лидерами, предпочитающими изучить собственную тему.

По моим наблюдениям, открытый учебный план продвигает учебную активность студентов и их собственное образование (Матусов, 2015b; Матусов и Марьянович-Шейн, 2017).

Как учитель, я вижу себя в качестве проводника в чужой стране для моих студентов, которые развивают свои собственные интересы и склонности.

Мы свободно могли выбирать порядок решения задач и, таким образом, строить свою собственную индивидуальную учебную программу.

Мы самостоятельно направляли исследования различных неизведанных математических глубин как с помощью, так и без помощи наших учителей.

Мои аспиранты-математики задавали мне много вопросов о математической инновационной педагогической практике, с которой я столкнулся в СССР, но я не мог дать полного ответа. Я знал, что автором этой математической педагогики был Николай Николаевич Константинов, но это было в основном все, что я знал. Конечно, у меня были свои воспоминания и размышления о моём опыте, но они были частичными, и я не был уверен, что правильными. Тогда я подумал: «Евгений, ты педагог-исследователь. Почему бы вам не взять интервью у Николая Николаевича и других участников и исследовать литературу на русском языке о нём и его педагогике?! Интерес к его инновационной педагогике есть!»

Моя первая попытка, осенью 2015 года, связаться с Констаниновым не удалась. Я связался с администрацией математической школы и Независимого московского университета, которые основал Николай Константинов, и где он работал, но ответа не получил. Осенью 2016 года мои докторанты по математике начали спрашивать меня о Константинове. На этот раз мне повезло. Я нашел интервью с Николаем Николаевичем на русском языке в интернете и связался с несколькими журналистами, которые брали интервью у Константинова. Кроме того, я нашел сайт, посвященный празднованию его восьмидесятилетия в 2012 году, и написал его организаторам. Наконец, я получил электронное письмо от будущего российского аспиранта, который хотел поступить в мой университет в качестве преподавателя математики. Он не знал Константинова, но нашел людей, которые были с ним знакомы. Через несколько дней я получил номер домашнего телефона Константинова и его архив.

Методология

Я решил взять интервью у Николая Николаевича. Он не мог пользоваться Skype'ом или электронной почтой, и мы согласились сделать это по телефону. Я использовал телефон Skype для записи нашего разговора. Он хотел, чтобы я начал наше интервью немедленно. В его голосе чувствовалось некоторое напряжение, поскольку, как я думал, у него не было уверенности, что мне можно доверять. Он сказал мне, что услышал мое имя недавно, когда я искал его контакт. Однако тот факт, что я был выпускником московской математической школы № 91, успокаивал его. Он спросил меня, что меня интересует. Когда я прочитал мои подготовленные вопросы, Николай Николаевич был явно ошеломлен. Затем я импровизировал другой подход. Я сказал ему: «Почему бы мне не рассказать свои воспоминания, наблюдения, опыт и размышления о моём математическом кружке и моей математической школе, и вы проверите, точны ли они или нет?» Ему понравилась идея, и наш разговор начался. Таким образом, я перешёл от жанра интервью, когда я задаю вопросы, а он отвечает, к жанру разговора. И он, и я были активными участниками его инновационной педагогической практики. Я поделился своими воспоминаниями, наблюдениями, размышлениями, попросил его уточнения и проверки, и спросил о его опыте и педагогических идеях.

Николай Николаевич также задавал мне вопросы и делился своим опытом и идеями. В конце, через час я почувствовал, что Николай Николаевич в возрасте 84 лет устал, хотя выглядел он попрежнему очень взволнованным и оживлённым. Я предложил отложить наш разговор до следующей недели, и спросил его, найдётся ли у него больше времени для разговоров, и он ответил: «У меня нет абсолютно никакого времени. Я нахожу разговоры с вами очень интересными, но было бы неверно говорить, что у меня много времени». У нас было еще два телефона-интервью, которые составили в общей сложности около 4,5 часов разговора.

Также я взял интервью у моего бывшего учителя по математике из моей школы, Вени Дардыка. К сожалению, его партнёр по преподаванию, мой другой учитель математического анализа, Андрей Печковский недавно умер от рака лёгких. Я взял интервью у девяти из моих бывших одноклассников: Иры (Герцевой) Казаковой, Алексея Рябинина, Олега Казакова, Александра Шляпентоха, Юлия (Юлика) Барышникова, Сергея Попова, Леонида (Лиона) Розенбаума, Алексея (Леши) Саверченко и Евгения (Жени) Емелина относительно их опыта как учеников математических кружков

Константинова и математического класса Константинова в школе № 91. Двое из моих учеников — Алексей Рябинин и Олег Азаков — были учителями математического анализа для учащихся 1979–1982 гг. в школе № 91. Я также взял интервью у Александра Шеня, преподавателя математического анализа в 1980–1983 гг. в математической школе № 91, а затем в математической школе № 57.

Я решил организовать свой текст, разделив его на четыре части. Во-первых, я включаю подробное описание инновационных математических практик Константинова. Основываясь на своем первом собеседовании, я описал свой собственный опыт в математическом кружке Константинова и математической школе№ 91. Я перемешал свой рассказ с разнообразными интервью Константинова (других людей и моим) и моими интервью с моим бывшим учителем и одноклассниками.

Во-вторых, я размышляю над образовательной философией Константинова, основываясь главным образом на разнообразных интервью с ним. Третья часть включает в себя мои обсуждения возражений и проблем инновационной авторской математической педагогики Константинова, которые я набрал из различных интервью. Наконец, четвертая часть посвящена истории педагогической практики Константинова.

Я столкнулся со следующими шестью основными проблемами в этом проекте. Во-первых, из того обширного материала, который у меня был, я был вынужден выбрать некоторые материалы и истории и пропустить другие из-за недостатка места. Во-вторых, мне нужно было предоставить достаточно исторических и культурных контекстов для международной нерусской аудитории. В-третьих, его и мои воспоминания туманились. Я пытался проверить их из максимально возможного количества разных источников. В-четвертых, чтобы избежать романтизации моих воспоминаний о моем математическом кружке и моей математической школе, я старался непредвзято рассматривать «тёмные стороны», проблемы и возражения против практики математического образования.

В-пятых, я знаю, что здесь я представляю лишь небольшую часть практики, которая продолжалась более 50 лет и которая была разнообразна по своей природе с многочисленными участниками. Я пытался включить разногласия и противоречия, которые наблюдал, и честно их разрешать. Наконец, в-шестых, мне также известно, что я пристрастен и руководствуюсь своими особыми парадигматическими взглядами в педагогике, которые я бы охарактеризовал как диалогические, мультикультурные и социокультурные.

Я подозреваю, что авторская математическая педагогика Константинова может сильно отличаться от другой парадигматической перспективы, и приветствую другие точки зрения.

Николай Николаевич Константинов: краткая биография

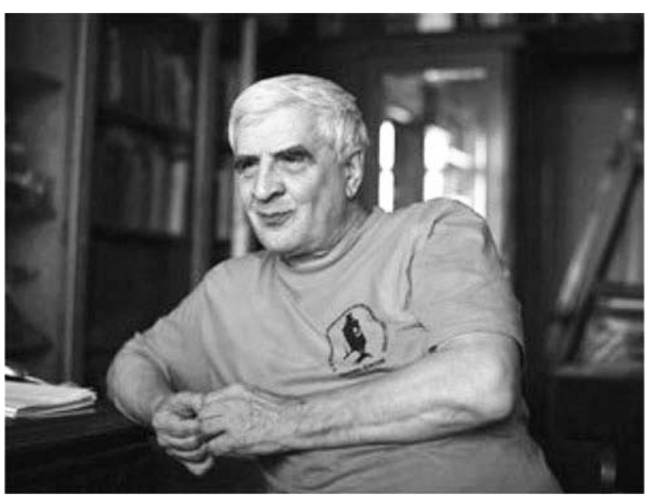


Рис. 1. Николай Н. Константинов

Николай Николаевич Константинов (рис. 1) родился 2 января 1932 года в Москве. Его отец был потомственным заслуженным гражданином России, а мать — грузинской дворянкой.

Окончил физический факультет МГУ в 1954 году, а затем получил степень Ph.D по физике[1].

В 1950-х годах он основал математический кружок в МГУ, а с 1960-х годов в ряде московских вузов. Он продолжал работать со школами, разрабатывая специальные классы с математическим направлением и индивидуальным подходом к обучению. Его ученики часто выигрывали соревнования по математике на всех уровнях, и десятки из них стали известными математиками.

В 1978 году Константинов организовал Ломоносовский турнир, многопрофильный научный конкурс. С тех пор этот тот турнир проходит каждый год. В 1980 году он начал проводить международный Турнир Городов, который в настоящее время проводится более чем в 150 городах в 25 странах.

В 1990 году Константинов был одним из основателей Независимого московского университета, одного из ведущих вузов России по математике.

Даже сейчас, в середине 80-х, Константинов продолжает работать в московской средней школе № 179 и является редактором популярного российского научного издания «Квант»[2].

Часть I: Педагогическая практика Константинова через опыт, наблюдения и размышления ученика: 1972–1979 гг.

Факультатив по математике в моей местной школе. Однажды в 6-м классе (1972 г.) в моей местной общеобразовательной школе № 145 моя учительница математики Галина Антоновна Бондаренко пригласила нас, её учеников, присоединиться к «факультативу по математике» (т. е. во внешкольный математический клуб после школы).

Я любил математику и присоединился к факультативу. Галина Антоновна пообещала нам «занимательные математические задачи». Я не понял, что она имела в виду. До факультатива по математики она организовывала школьные математические сборники и приглашала моих одноклассников и меня на местные районные соревнования по математике. Математические задачи во время этих математических заданий были более сложными, чем обычные математические задачи, которые я решал на уроках математики. Однако они не были весёлыми. Обычно я мог решить их в течение 10–20 минут, максимум. Я думал, что я хорош в математике, потому что я мог решать математические задачи быстрее, чем многие из моих одноклассников, и я часто получал пятёрки на тестах по математике. Я думаю, мне нравилось хорошо разбираться в математике. Большинство моих одноклассников ненавидели этот предмет.

В моём факультативе по математики 6-го класса я столкнулся с совершенно другой математикой. Многие задачи нашего факультатива по математики были весёлыми. Часто эти задачки не требовали больших знаний, технических навыков или каких-либо теорем, изучаемых нами в школе. Скорее, они требовали от нас найти некоторые интересные, творческие и необычные приёмы или повороты, которые всегда лежали «на поверхности», но каким-то образом ускользали от моего первоначального внимания. Кроме того, самые интересные и забавные математические задачки было нелегко решить. Они требовали много времени, усилий и борьбы с разочарованием, с неспособностью решить их. Некоторые задачи я не мог решить полностью, и это меня удивило. Я знал, что у меня достаточно знаний для их решения — я доверял своей учительнице Галине Антоновне, которая отдала их нам, 6 и 7 классам, но я просто не мог их решить. У меня было двойственное чувство по этому поводу. Это чувство длительного разочарования в моих неудачных усилиях было новым для меня. Я ненавидел и, одновременно, любил это. Ненависть легко объяснить — большинству людей не нравится, когда их длительные усилия терпят неудачу. Кроме того, для нас было достаточно привычно сдаться, сохранить лицо и наше эмоциональное благополучие, а также прервать бесполезные и безнадёжные

[1] На самом деле, степень кандидата физ.-мат. наук. — *Примеч. пер.*

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Nikolay_Konstantinov

усилия по решению невозможных задач. Это не было бы так, как если бы вы бросили его, если бы не могли решить это за 20 минут. Мы столкнулись с задачами, на решение которых ушло много времени, если вы вообще смогли их решить. В 12 лет мне это нравилось. Это был такой приятный момент, когда неожиданно появилась какая-то интересная идея. Даже если эта идея не сработала, она была интересной и новой. И если это была хорошая идея, это было бы еще лучше, конечно.

На самом деле, я любил это длительное разочарование. Чем дольше и жёстче были предыдущие усилия и разочарование, тем выше было мое удовлетворение, когда я мог найти решение. Кроме того, часто (но не всегда), чем больше времени и усилий мне приходилось тратить на решение проблемы, тем более эстетичным было решение. Упорство в решении интересных математических задач дало мне новые математические фантазии, которые я никогда раньше не испытывал. В этом возрасте у меня были фантазии о воображаемом средневековом королевства. У меня и моих друзей были научные фантазии о том, чтобы изобрести машину времени, чтобы отправиться в царское время в начале XX-го века, чтобы спастись на корабле к острову Чатем, к югу от Австралии. Мы фантазировали, что являемся первопроходцами-геологами, открывающими новые земли в нашем округе. У нас были военные фантазии. У нас были необычные и романтические фантазии. Однако, у меня и моих друзей никогда не было математических фантазий о решении математических задач. Теперь они у меня были. Мир стал для меня математикой. Я не помню конкретных примеров[3] но вот как Константинов описал подобную математизацию мира в детстве:

> в рассказе Тургенева[4] «Бежин луг» я помню только первое предложение: «Это был прекрасный июльский день, один из тех дней, которые наступают только после долгого периода устойчивой погоды». Это предложение заставило меня задуматься: если был длительный период устойчивой погоды, значит ли это, что завтра будет точно таким же днем? Если это так, то снова будет один из нескольких дней после долгого периода устойчивой погоды, но затем следующий день также будет таким же! Сколько таких дней будет? Это превращается в бесконечную строку. Другими словами, уже в то время я почувствовал математический факт, математическую индукцию. Все остальное из рассказа я забыл. Хотя я перечитал его недавно — там много интересного.

Я думал о своих интересных, занимательных, но очень сложных математических задачах во время выполнения скучных обязанностей: мытья посуды, выноса мусора, покупки хлеба, уборки в моей комнате, ожидания в очереди и так далее. Я думал о своих интересных, забавных, но очень сложных математических задачах, прежде чем уснуть или выйти куда-то. Я мог мечтать решать свои математические задачи во время скучных школьных уроков или когда мне больше нечего было делать. Я мог забыть о драках или трудных и неприятных днях, убегая в мир своих занимательных математических задач. Наконец, пытаясь решить интересные, забавные и сложные задачи в течение нескольких часов, дней, недель и даже месяцев, я почувствовал себя важным и взрослым.

Иногда я просил родителей и моего брата о помощи, а когда они не могли мне помочь, связывались с нашими родственниками, знакомыми с математикой. Я был особенно горд тем, что смог решить сложные задачи, которые не смогли решить мои родители и родственники — профессиональные физики, теоретики (мой двоюродный брат) и экспериментаторы (мой второй дядя). Я помню как минимум две такие задачи.

Задача 1. Тушение пожара Есть горящая деревенская хижина. Пожарная машина должна прибыть от пожарной части к реке, чтобы набрать воду и отправится к хижину, чтобы погасить ее.

[3] Александр Поддьяков, выпускник математической школы № 91, вспоминает, что он также математизировал окружающий его мир. «Например, ожидая в парикмахерской, я убивал время, изучая отражение вертикального электрического шнура в декоративном зеркальном цилиндре. Я думал о формуле функции, которая могла бы описать отраженный шнур. Будет ли легче найти эту формулу, если я перенесу свою проективную перспективу в цилиндр? Я бы не сказал, что я постоянно думаю о математике, но периодически возникающая математическая проблема становится вихрем, который меня затягивает. . . »

[4] Иван Тургенев — известный русский писатель XIX века (https://en.wikipedia.org/wiki/Ivan_Turgenev).

Найдите кратчайший путь от пожарной части к хижине через реку, если хижина и пожарное депо расположены на одной стороне реки (см. рис. 2).

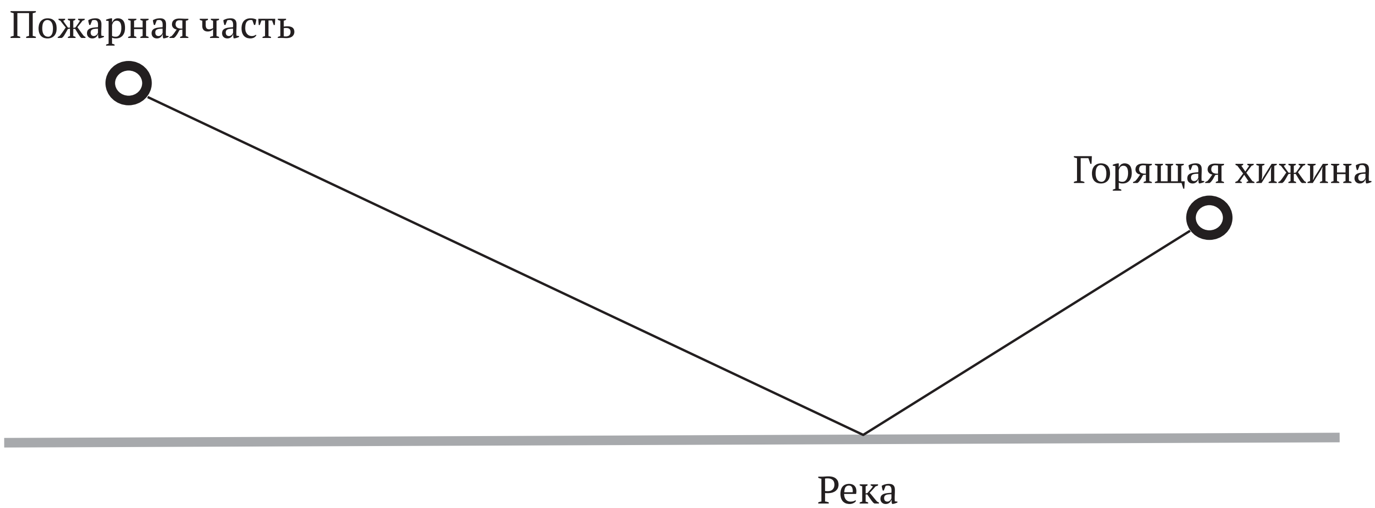


Рис. 2. Найдите кратчайший путь от пожарной станции к хижине с остановкой у реки

Я провел много времени, точнее, много дней, думая об этой задаче, и, наконец, я решил её, используя реку в качестве линии симметрии. Прямая линия между пожарной станцией (точка A) и симметричным изображением пожарной хижины указывает направление для кратчайшего пути (см. рис. 3):

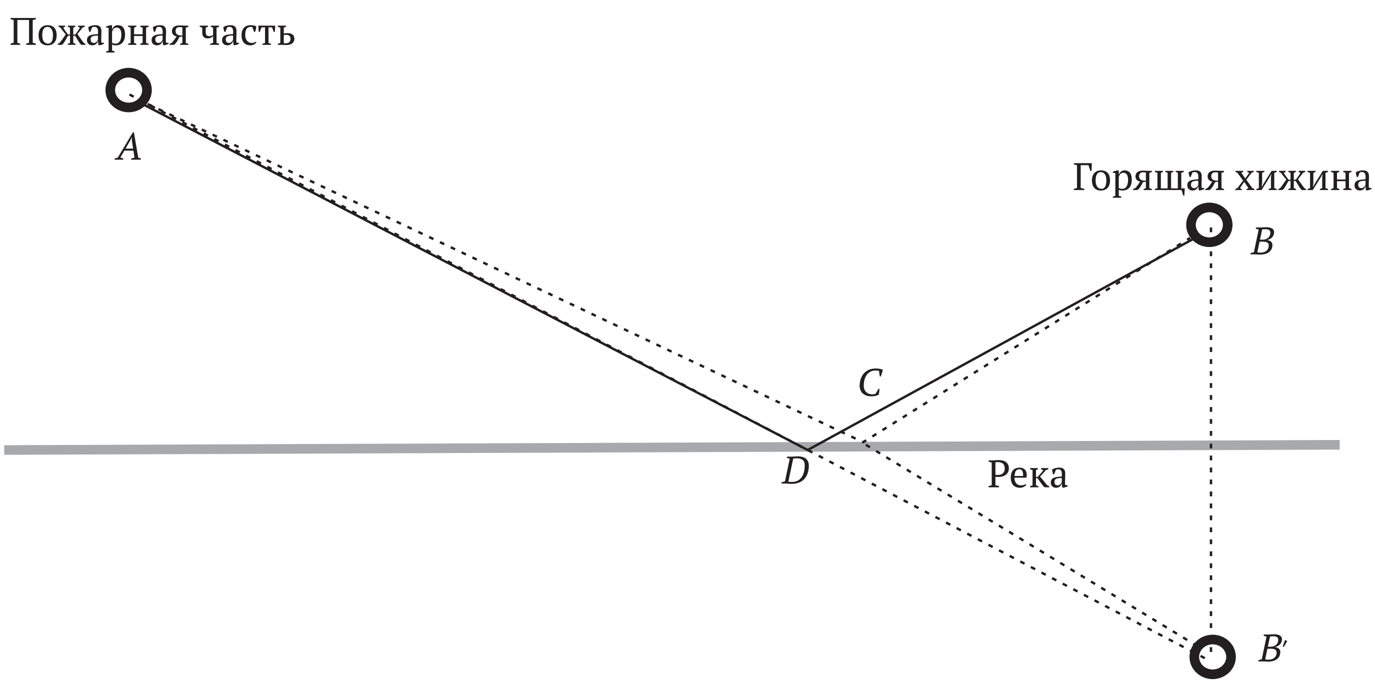


Рис. 3. Кратчайший путь (сплошная линия) определяется осевой симметрией горящей хижины (точка B') с использованием реки в качестве оси симметрии

Длина любого пути от пожарной станции (A) до горящей хижины (B) равна длине от пожарной станции (A) до перевернутой пожарной хижины (B'), потому что $CB = CB'$, или $AC + CB =$

$AC + CB'$. Длина ADB' самая короткая; это прямая линия, а прямая линия — это всегда самое короткое расстояние на плоской поверхности.

Я был очень горд, показав свое решение на факультативе по математике. Я помню, что объяснение этого решения заняло у меня некоторое время, прежде чем некоторые из одноклассников поняли это. Я был очень взволнован красотой геометрического решения и горд, что смог прийти к нему сам. Прелесть этого в том, что после применения симметрии решение становится самоочевидным. Однако что-то беспокоило меня в этом решении. Мне потребовалось несколько недель, чтобы сформулировать новую задачу. Реки никогда не бывают прямыми. Они изогнуты. Когда река искривлена, решение с применением осевой симметрии, которое я придумал, по-видимому, перестало работать (см. рис 4):

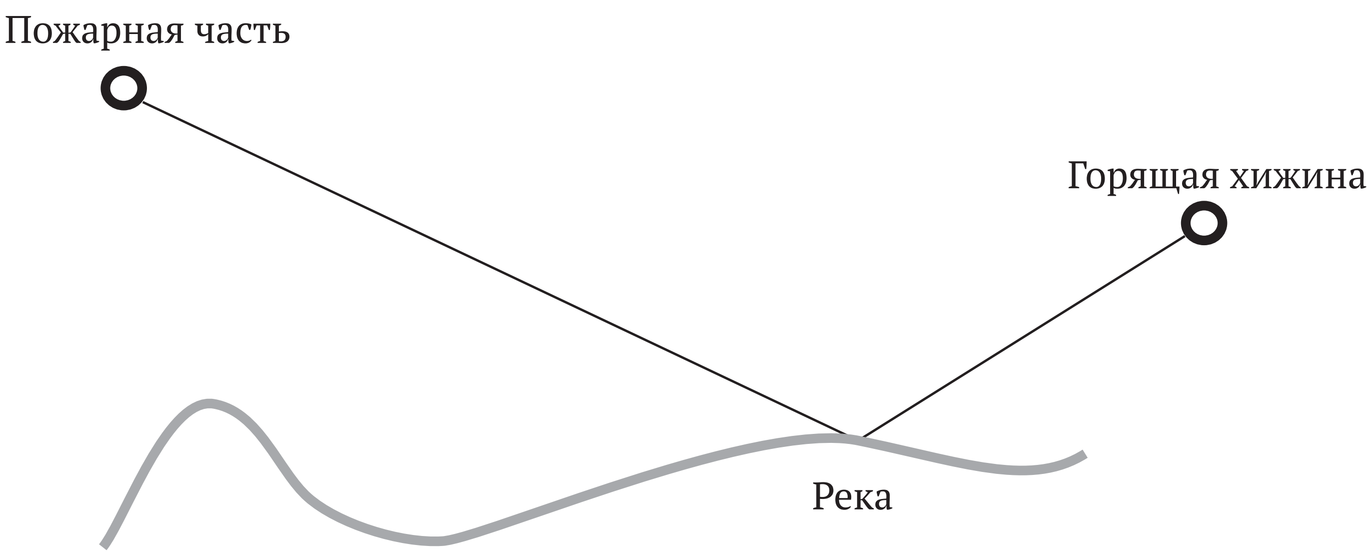


Рис. 4. Найдите кратчайший путь от пожарной станции к горящей хижине через изогнутую реку

Я потратил много времени, пытаясь решить эту задачу, но не смог. Я попросил помощи у моих родителей и родственников, но они не смогли помочь. Я показал эту новую задачу моей учительнице математики Галине Антоновне на нашем факультативе. Она похвалила меня за изобретение этой новой очень интересной задачи, но сказала, что не знает, как её решить. Она сказала, что это серьёзная задача, вероятно, достойная профессиональных математиков. Она также порекомендовала мне попытаться решить ее с помощью простой кривой, например, круга: река — это дуга круга. Я попытался решить задачу в формулировке моего учителя, но всё ещё не получалось. Тем не менее, я был очень горд собой и благодарен своему учителю, который осознал серьёзность и важность моей новой математической задачи. В своём интервью 2010 года с Дориченко Константинов указал на распространенную ошибку, которую делают многие учителя математики, пытаясь сделать математические задачи несерьёзными и чрезмерно игривыми:

> ...В то время математика не казалась мне серьёзной наукой. В математических задачах прыгали зайцы, красные, зелёные и белые, и вы должны были доказать, что красных было четное количество. Все эти задачи в некотором роде показались мне детской игрой. Было странно тратить на это время. Только позже я понял, что это, конечно, упражнения. Но я думаю, что люди, которые чрезмерно используют такие сюжеты задач для детей, не до конца понимают психологию. Детям нравится, когда их деятельность выглядит взрослой.

Это было определённо верно для меня. Как уже упоминалось ранее, будучи ребёнком на факультативе по математики, я хотел чувствовать, что вовлечён в очень серьёзную деятельность для взрослых. Галина Антоновна ставила нам серьёзные математические задачи, а не занимательные инфантильные задачи о «разноцветных кроликах».

Задача 2. Удвоение числа Есть целое число. Когда первую его цифру слева перемещают в последний разряд вправо, то новое число становится в два раза меньше исходного. Найдите исходное число.

Я позвонил по телефону своему двоюродному брату, физиком-теоретику, прося помощи. Он попытался решить задачу, представляя исходные и преобразованные числа в виде суммы их цифр, умноженных на 10 в соответствующей степени (например $9371 = 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$). Он представлял исходное и преобразованное числа следующим образом:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 =$$
$$= 2\Big(a_{n-1} \cdot 10^n + a_{n-2} \cdot 10^{n-1} + a_{n-3} \cdot 10n - 2 \cdots + a_1 \cdot 10^2 + a_0 \cdot 10^1 + a_n \cdot 10^0\Big).$$

Мне потребовалось некоторое время, чтобы понять эту концепцию по телефону, но с помощью моего отца я понял её и очень обрадовался. Однако через несколько дней я понял, что это тупик, хотя и не полностью.

Подход моего двоюродного брата помог мне представить целые числа неизвестной длины, чего я раньше никогда не делал. Я выписал исходное число $A_1 = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$ и преобразованное как $A_2 = a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 a_n$. В качестве альтернативы я представЬл проблему как

$$\begin{array}{r} a_{n-1}a_{n-2}\ \ldots\ \ a_1\,a_0 a_n \\ \times \qquad\qquad\qquad\quad 2 \\ \hline a_n\ \ a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1\,a_0 \end{array} \quad = \quad \begin{array}{r} \ldots 36842 \\ \times \qquad\ 2 \\ \hline \ldots 73684 \end{array}$$

Моё решение стало очевидным, когда я начал рассматривать тип цифры a_n. Поскольку A_1 в два раза больше, чем A_2, то A_1 чётное и, следовательно, a_n чётное, потому что чётные числа всегда заканчиваются чётной цифрой. Однако a_n не может равняться 0, так как натуральные числа не могут начинаться с нулевой цифры. Следовательно, a_n может быть между 1 и 9. Выбрав $a_n = 2$, я смог сделать обратное восстановление исходного числа A_1. Например, если $a_n = 2$, то $a_0 = 2 \cdot a_n = 4$; если $a_0 = 4$, то $a_1 = 8$; и т. д.. Однако есть осложнение, когда результат удвоения становится больше 9; к следующей цифре нужно добавить 1. Например, $a_2 = 6$, но $a_3 = 3$. Наконец, когда цифра становится равной 2 без переноса в следующий разряд (т. е. не 12), это означает, что эта цифра a_n — цифра, с которой мы начали. Следовательно, если $a_n = 2$, то исходное число равно 210526315789473684 и $n = 17$. Если a_n равно 1, то исходное число равно 105263157894736842, но его следует отклонить, поскольку после перемещения первой цифры назад новое число начинается с 0: 052631578947368421. Если a_n равно 3, то исходное число $n = 315789473684210526$ и $n = 17$. Если a_n равно 4, то исходное число равно 421052631578947368 и $n = 17$. Если a_n равно 5, то исходное число 526315789473684210 и $n = 17$. Если a_n равно 6, то исходное число становится бесконечным (636842) 1578947368421052, и, следовательно, должно быть отклонено как возможное решение. Если a_n равно 7, то исходное число равно 736842105263157894 и $n = 17$. Если a_n равно 8, то исходное число равно 842105263157894736 и $n = 17$. Наконец, когда a_n равно 9, тогда исходное число равно 473684210526315789, и $n = 17$. Есть и другие возможные ответы (конечно, каждое число может быть «удвоено», «утроено», например, 210526315789473684210526315789473684 — т. е., но я был не заинтересован в этом). Кроме того, заметил, что цифры создают вращающийся шаблон из тех же цифр в том же порядке, за исключением $a_n = 6$.

Я снова представил это элегантное решение на факультативе по математике. Это вызвало много интересных дискуссий, в том числе задач с новыми вещами, почему числа вращались и почему исключение $a_n = 6$. К сожалению, я не помню, решили ли мы эти новые задачи или нет.

Кроме того, к сожалению, я не помню других интересных и занимательных задач или красивых решений, разработанных другими моими одноклассниками для задач, которые я не решал, но я уверен, что так оно и было. Я два года учился на факультативе по математике Галины Антоновны. К сожалению, я не знаю, знакома ли Галина Антоновна с Константиновым и его педагогической практикой, но её факультативная математика была подозрительно похожа на педагогику Константинова.

Я часто думаю о том, как серия счастливых встреч с нужными людьми в нужное время в нужном месте повлияла на моё образование. Эта удача сформировала не только моё образование, но и мои склонности, интересы, страсти и, возможно, фобии (в последнем случае, вероятно, мне не повезло, что я встретил не тех людей). Константинов описал это явление следующим образом:

> …Если человек анализирует, к чему тянет человека, он может многое понять. Ведь люди разные… Если у человека много разных навыков, выбор может быть сделан наугад. Например, школьник занимает первое место в шахматном турнире. Это производит на него сильное впечатление. Он начинает ходить в шахматный кружок, развивает эти навыки в себе, в то время как другие навыки не развиваются. Первое впечатление очень важно здесь: это может изменить направление развития. Важно, к чему человек склонен в первую очередь.

Математические кружки Константинова

Я думаю, что математические кружки Константинова были сердцем его инновационной педагогики, потому что она была абсолютно добровольной, что является одновременно и благословением, и проклятием, о чем я расскажу позже в своём анализе.

В конце 6-го класса Галина Антоновна пригласила меня принять участие в Московской городской олимпиаде по математике в МГУ. На математическом конкурсе МГУ математические задачи были интересными, но гораздо менее весёлыми для меня по нескольким причинам. Одной из причин было то, что время для решения задач было очень ограничено. Мне не понравилось давление времени. Это сделало процесс решения менее интересным для меня. Мне это больше напоминало школу. Во-вторых, соревнование по математике уменьшило чувство общности и сотрудничества. Мы соревновались друг с другом. Решение математической задачи означало превосходство над моими математическими коллегами, которые не решили ее. Напротив, в моем факультативе по математике мы учились друг у друга и наслаждались красотой решений друг друга. Конечно, мне нравилось побеждать, и мне нравилось быть первым, но в то же время это заставляло меня жалеть всех тех, кто был «ниже» или «позади» меня. В глубине души я чувствовал, что это несправедливо и не соответствует действительности. Мои успехи на городских олимпиадах по математике были не такими впечатляющими, как на уровне моей школы или округа, но к тому времени я понял, что это не очень важно для меня. Самое главное, я встретил некоторых интересных детей, которые также интересовались математикой. Я встретил свое сообщество. Но даже более того, я получил приглашение в математические кружки Константинова с очень привлекательным и необычным объявлением, что-то вроде этого:

> «Приглашение распространяется на учеников 8-х классов, а также на самых смелых учеников 7-х классов». В таком свободном стиле. «Кружок будет невероятно интересным». Школьникам очень понравилось объявление, и они начали его дорабатывать. Например, в нём говорилось «самые смелые 7-классники», и они добавляли: «но не забудьте застраховать свою жизнь». Объявление было обогащено идеями разных людей, и в результате все с интересом прочитали его.

Я записался на них на городской олимпиаде. Мои родители испытывали двойственное чувство из-за моего участия в математическом кружке. Им понравилась моя преданность, но они были обеспокоены тем, что до кружка мне нужно было добираться более часа на другую сторону Москвы; я возвращался домой поздним вечером (было очень темно, особенно зимой). Интересно, что в моём интервью с Николаем Н. Константиновым он вспоминает, что его родители тоже волновались за него, когда он был подростком и путешествовал в одиночку в кружок МГУ. Его родители почувствовали себя лучше, когда соседская девочка также отправилась в тот же кружок, и она и их сын могли путешествовать вместе. Ирония в том, что путешествие подростка с молодой девушкой скорее может оказаться опасным, чем безопасным.

Как и в моём местном факультативе по математике, в математических кружках Константинова было много интересных и занимательных математических задач, которые мы пытались решить там и дома. Математический кружок, который я посещал, был многовозрастным, так как я видел там детей младшего и старшего возраста. Мы встречались в зоологическом музее, проходя мимо экспонатов с костями многих интересных животных, в том числе скелета мамонта. Мы сидели большими рядами, организованными в виде дуг амфитеатра с центром на длинной доске. Это была старая университетская аудитория, что мне казалось очень взрослым. Мы решали разные задачи.

Первоначально я не мог вспомнить математические задачи, решаемые нами на кружке, но после интервью с моим одноклассником из школы № 91 Алексеем Рябининым, который также посещал математический кружок Константинова в те годы (но не со мной), моя память начала возвращаться. Было много разных математических задач о козе, привязанной к одному или нескольким колышкам — нам нужно было определить площадь травы, которую объела бы коза. Я помню, как боролся с изменённой задачей, которую я придумал для себя, чтобы выяснить, как заставить козу съесть область треугольника. Еще одна задача, которую я помню, касалась орехов: все орехи имеют одинаковый вес, кроме одного, который был пустым и, следовательно, легче — какое минимальное количество взвешиваний нужно сделать, чтобы найти пустой орех, используя чашечные весы без гирь. Общее количество орехов варьировалось (например, 7, 9, 13), но наиболее интересной задачей для нас было решить проблему в в общем случае, где число орехов — N. Наши учителя были студентами, которые выглядели ОЧЕНЬ старыми и взрослыми для меня. В классе было около 30–40 детей и 5–7 студентов, наших преподавателей; большинство, если не все, были мужчинами. Мы поднимали руку, чтобы призвать учителя, когда думали, что решили задачу. Студент подходил к нам, чтобы «принять» решение. В процессе «принятия» нашего решения наши учителя внимательно слушали нас, хвалили самые «красивые» и многообещающие места в решении и находили в нём возможные дыры. Если наше решение не выдерживало критики и проваливалось, учитель призывал нас продолжать свои усилия. Иногда мы пытались решать задачи вместе, но я не помню каких-либо длительных дружеских отношений из моего математического кружка.

Иногда наши учителя читали нам лекции о некоторых интересных математических вопросах. Я не могу вспомнить темы, но снова мой одноклассник Алексей Рябинин рассказал одну тему, которую он мог вспомнить. Речь шла о доказательстве известного немецкого математика Георга Кантора о том, что точки на части прямой не могут быть подсчитаны (т. е. действительные числа несчётны[5]).

Я думаю, что видел Николая Николаевича Константинова тогда; он был спортивным симпатичным мужчиной средних лет в джинсах, который был старше, чем мои учителя в математическом кружке. Он говорил с детьми и слушал их очень внимательно и с большим интересом. Я сразу заметил, что во время общения с детьми у него не было покровительственного отношения, присущего многим взрослым. Он искренне интересовался детьми и математикой. Кроме того, он, по-видимому, довольно уважительно относился к студентам, которые также проявляли к нему своё уважение. Я помню, что иногда он прерывал их лекцию вопросом или интересным комментарием.

Занятие на кружке длилось около 1,5–2 часа. У нас были задачи, которые нужно решить дома, но от нас не ожидали, что решим их все. Это не было похоже на школьную домашнюю работу, поскольку она не казалась утомительной. Мы встречались раз в неделю, но иногда могли пропустить встречу. Математические кружки были добровольными.

Для меня это была очень новая и интересная концепция — добровольное образование! Я учился, потому что мне это нравилось, а не потому, что меня заставляли учиться. Мне казалось, что я живу

[5]См. https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument

в другой стране, отличной от страны, где жили многие мои одноклассники. Я почувствовал свободу самореализации. Это был оазис свободы и вдохновения в скучной, предписанной и контролируемой жизни молодого советского подростка в Москве, в посттоталитарном застойном СССР. Вот как мой одноклассник по школе № 91 Юлик Барышников описывает свои чувства свободы:

> ... Математический кружок (в гуманитарном корпусе МГУ) был ярким пятном в довольно скучной жизни. Люди вели себя свободно, тексты читались как самиздат[6] («Ведьма Аня летит на метле со скоростью 100 км в час...»). И сама идея, что кто-то может описать и определить все и прийти к непредсказуемому выводу, казалась освобождающей. Я думаю, что это был гений Н.Н. Константинова — те, кого родители или собственная склонность не приобщили к науке с самого раннего детства, в кружках были увлечены именно этим. Так случилось и со мной.

Константиновская математическая школа № 91

В 7-м классе на одном из занятий моего кружка в МГУ было объявлено об открытом поступлении в московские математические школы № 91 и 57. Я помню, как спрашивал одного из моих учителей математики в кружке, что это была за математическая школа, и он ответил: «Это школа, где уроки математики преподаются как в нашем кружке математики». Вау! Мне это понравилось! Я очень хотел этого! Мои родители были гораздо менее восторженными, так как они не хотели, чтобы я ездил в московские школы № 91 или 57, поскольку школы находились в 45–55 минутах езды от моего дома. Как они сообщили мне позже, они втайне надеялись, что я не пройду вступительные испытания. Некоторые родители толкали своих детей в математические школы, но некоторые родители очень сопротивлялись им, как сообщил Константинов мне в интервью.

Вступительные испытания в Константиновскую математическую школу

У нас были изнурительные вступительные тесты по математике: 5–6 еженедельных раундов длились около полутора месяцев. Каждый раунд включал встречу в математической школе (я думаю, что это была московская школа № 57), и мы работали над 5–6 математическими задачами в течение двух или трех часов. У нас также оставалось 5–6 задач, которые нужно решить дома. Во время теста мы должны были решить задачи и защитить свои решения этих и домашних задач перед учителями и студентами. Обычно одна или две задачи были ОЧЕНЬ лёгкими, а затем уровень сложности повышался. Последние одна или две задачи обычно были очень сложными. Константинов подтвердил это в своем интервью мне: «Конечно, это было так. Поначалу очень важно, чтобы у человека было что-то, над чем он мог бы поработать, иначе он просто впал бы в ступор». Дома мы могли бы посоветоваться с кем угодно — я показал свои домашние задачи на факультативе по математике, а также своим родителям и родственникам, но это редко помогало. К концу раундов — это было, я думаю, в конце апреля 1974 года — я был уверен, что меня не примут. Я помню, что я решил около 60–70% задач, полностью или частично. Я чувствовал, что далёк от успеха.

Мои родители пытались подготовить меня к худшему (для меня, а не для них). Недалеко от того места, где мы жили, они нашли местную школу, где учитель математики предложил расширенное обучение математике. Однако я не хотел улучшать математические инструкции. В моём смутном смысле я хотел, чтобы у меня была математическая свобода, математическая самореализация, математическое сообщество и студенты. Я хотел добровольного образования. Я хотел свободы выбора учебного плана. Я не мог объяснить всё это своим родителям тогда, но я чувствовал это глубоко. Когда наступал момент истины, я становился всё более и более несчастным и отчаявшимся в ожидании письма с решением.

[6] Незаконное самодеятельное производство запрещенной литературы в Советском Союзе https://en.wikipedia.org/wiki/Samizdat).

К моему большому удивлению и облегчению, меня приняли! Я подозревал, что все, кто не отказался от участия в последнем пятом или шестом туре отбора, были приняты, и позже Константинов подтвердил моё подозрение в интервью со мной:

> ЕМ: Мне показалось, что они выбирали людей не на основе количества решенных задач, а на основе упорства, с которым человек просто продолжал работать. Это правда или нет? Если это правда, то это очень необычно, потому что обычно выбор основан на количестве набранных очков, тогда как здесь это зависит от интереса и настойчивости.
>
> НК: Я могу сказать, почему это было так[7]. Потому что все плохо справлялись с задачами. Если бы задачи были лёгкими, то это могло быть основано на сумме, но этого не было (разговор между ЕМ и НК, часть 1, 30 октября 2016 г.).

У меня был выбор пойти в школу № 57 или 91 для моих 8, 9 и 10-х классов[8]. Меня не заботил выбор одной из этих школ. Я был счастлив пойти в любую математическую школу Константинова. Мои родители изучили эти два варианта и выбрали московскую школу № 91, потому что она была в нескольких минутах ходьбы от места проживания моей бабушки и её сестры. Мои родители решили, что я должен жить там и посещать их по выходным. Первоначально мне не нравилось это соглашение, потому что это означало, что я не мог видеть своих местных друзей в течение недели, но я сдался, потому что это был мой вклад в компромисс с их проблемами. Прошло время, и мне понравился этот вариант.

Описание математических занятий в московской математической школе № 91

В нашем математическом классе было около 30 учеников, в основном мальчики (см. рис. 5). В классе был ученики разных национальностей: русские, евреи, белорусы, татары. Некоторые из студентов были детьми из рабочей среды, а некоторые из интеллигенции[9].

[7] Александр Шень, который проводил вступительные экзаменыдля математических школ № 91 и 57 в 1977 году, а затем преподавал в математических школах № 91 и 57, не согласен: «По крайней мере, в большинстве классов ‘системы Константинова’, которые я видел, производительность учитывалась прежде всего, конечно. Потому что в целом могло так оказаться, что участников, которые даже достигли конца процесса, могло быть несколько (в разы) больше чем было мест» (11/30/2016). Мне кажется, что когда в последнем туре прошло слишком много кандидатов, был выбор по количеству (и, вероятно, качеству/сложности) решенных задач. Как результат, в этом случае отбор кандидатов проводился в два этапа: 1) школьники, проявившие настойчивый интерес и 2) их достижения на экзаменах. Кроме того, некоторые из людей, проводящих вступительные экзамены в математические школы, могут не разделять образовательной философии. Интересно, лотерея или комбинация супер высокого достижения и лотерея может быть использована в случае, если слишком много кандидатов проходят через экзамены. В то же время, ниже приводится описание более недавнего набора в летнюю школу в Дубне «Современная математика», вдохновленную педагогической деятельностью Константинова. «Большинство студентов являются действующими или бывшими призёрами олимпиад, но некоторые места зарезервированы для студентов без таких отличий, которые обращаются в школу через интернет. Они принимаются, если организаторы ценят, как они заполнили довольно необычные формы заявки, в которой они просят описать, в краткой форме эссе, их интерес к математике, ответ на такие вопросы, как: Какая последняя математическая книга, которую вы прочитали и как вам она понравилась? или: Какие математические доказательства являются вашими любимыми (представлены два)? или далее: что в математических конструкциях больше всего вас впечатлило? Рекомендации учителей, особенно учителей ведущих школ, также учитываются» Здесь опять кажется, что основное внимание уделяется глубокому интересу учащихся к математике, а не к способностям.

[8] В то время в советской общеобразовательной школе было от 1 до 10 классов (от 7 до 17 лет), после чего некоторые ученики могли поступать в институты (т. е. в специализированные колледжи) и университеты, или поступать в профессиональные училища, или напрямую работать. Начальная, средняя и старшая школы находились в одном здании с учителями-предметниками. Не было свободного посещения занятий. Все уроки были обязательными. Занятия были организованы классами (коллективами учеников одного возраста), переходившими для разных уроков из кабинета в кабинет. Классы часто были стабильны; поэтому в некоторых советских школах дети оставались вместе с 1 по 10 класс.

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Intelligentsia

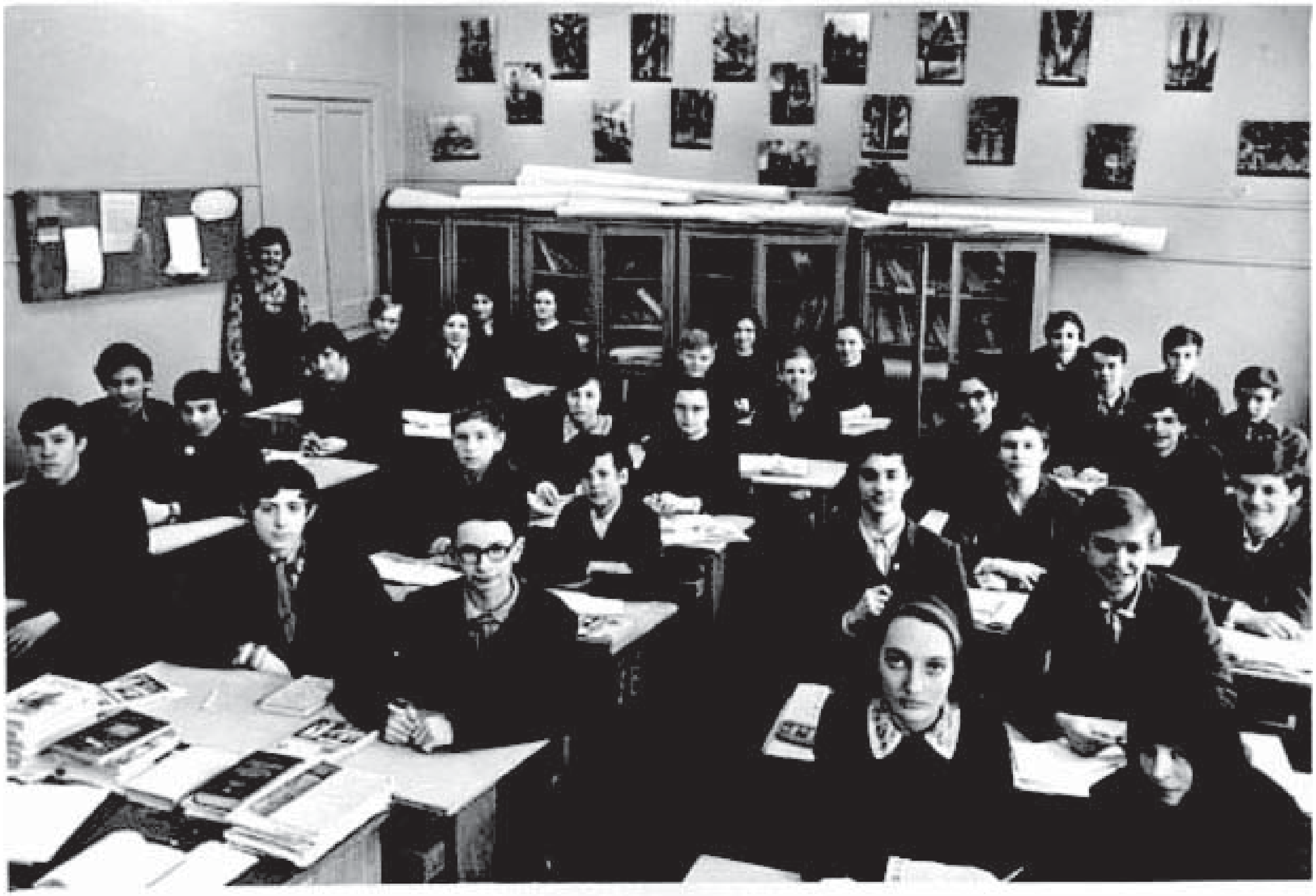


Рис. 5. 8-й класс нашего урока математики с учительницей отечественной истории Зарой Моисеевной Любавиной, 1975 г., урок истории

У нас было два курса математики, организованных очень по-разному, каждый из которых имел четыре 45-минутных урока в неделю. Первый курс математики — общую математику — преподавала Нина Юрьевна Вайсман. Я не уверен, но тогда я (и некоторые из моих одноклассников) думали, что она работала в МГУ. Позже, при подготовке этого текста, я обнаружил, что она работала в Московской математической школе № 2 учителем математики и заместителем директора с 1966 по 1973 год, а затем с 1973 по 2003 год во ВЗМШ (сначала Всесоюзная заочная математическая школа, в настоящее время — Всероссийской заочная многопредметная школа). Она пришла специально для нашего класса и не преподавала другим классам в нашей школе. Я спросил о ней Константинова и Веню Дардыка, моего другого учителя математики, о котором я собираюсь рассказать в следующем разделе. Я думаю, что Владимир Миронович Сапожников, ещё один учитель математики в школе № 91, привёл к нам Нину Юрьевну. Оказалось, что по некоторым причинам, Владимир Миронович не смог преподавать нашему классу и пригласил Нину Юрьевну Вайсман заменить его.

Интересно, что Владимир Миронович Сапожников преподавал во всех остальных математических классах школы № 91, до и после нашего класса до самой его смерти в 2004 г. Он также преподавал во всех не математических классах нашей школы. Насколько я помню, Нина Юрьевна преподавала нам алгебру, линейную алгебру, тригонометрию и стереометрию (т.е. геометрию пространственных тел). Ее обучение было традиционным: лекции, сочетавшиеся с практическими занятиями. Однако программа была очень продвинутой по сравнению с традиционной программой по математике. Я не припоминаю, чтобы меня сильно впечатляли ее уроки, но мой одноклассник Юлик Барышников оценивал их высоко: «Нина Юрьевна, которая преподавала нам математику по программе, знала, как, по моему мнению, организовывать свои уроки гораздо более драматически, чем уроки матанализа, несмотря на скучный в целом характер своего предмета».

Другой математический предмет, «математический анализ», включал в себя несколько разных математических дисциплин: теорию чисел, геометрию, анализ и программирование. Уроки были организованы нетрадиционно. Занятие, два урока подряд, проводили студенты вузов. У нас было два постоянных студента: Андрей Печковский и Веня Дардык. Как и нашим штатным учителям, школа платила им примерно 20 рублей (около 30 долларов) в месяц, школьная администрация вставляла их занятия в расписание уроков. Были также 5-7 других студентов, друзей Андрея и Вени (в отличие от других учителей, мы называли их просто по имени), которые нерегулярно приходили к нам на уроки матанализа. Я помню по именам только некоторых из них: Сашу Романова (он был старше), Рому Деминштейна и Леву Фридлендера. Не помню, чтобы девушки-студентки приходили помогать Вене и Андрею. На каждом уроке матанализа в качестве учителей было от 2 до 5 студентов. В то время и Веня, и Андрей учились в Московском автодорожном институте (МАДИ), в который я также поступил после окончания школы. Веня был выпускником Математической школы № 7, а Андрей – нашей Математической школы № 91. Время от времени Николай Николаевич Константинов заходил на наши уроки математического анализа, чтобы побеседовать с учителями и с нами и посмотреть, как идут дела. Как во всякой советской школе, у нас была классно-урочная система, т.е. одноклассники все время были вместе.

Я спрашивал Константинова, как он подбирал преподавателей математического анализа для математических кружков и особенно для математических школ. Он отвечал, что сначала это были его коллеги из Московского Государственного Университета, а потом это были уже выпускники математических кружков и математических школ. Главным критерием было не столько знание математики, сколько умение взаимодействовать с детьми:

> Конечно, главным для меня было взаимодействие с учениками. И я наблюдал, как мои кандидаты умели взаимодействовать, как они умели разговаривать. Критерий был такой: если я видел, что кандидат может быть интересен ученикам, а ученики – ему, тогда я мог попробовать его пригласить. Таким образом пришли Печковский и Дардык – это был отличный выбор в этом отношении. Было очевидно, что они умеют взаимодействовать, что детям будет интересно общаться с ними, и им будет интересно общаться с детьми. И для начального этапа у них была достаточная математическая квалификация. Они не путали прямую теорему с обратной, короче говоря, они понимали, что делают (Разговор между ЕМ и НК, 30 октября 2016 г.).

Константинов пришел к следующему выводу:

> Отношения между штатными учителями и учениками напоминают отношения между родителями и детьми. Отношения между выпускниками и учениками похожи на отношения между старшими и младшими братьями (сестрами). Но это разные вещи. В результате выпускники – руководители математических кружков, организаторы Олимпиад и преподаватели математических классов – имеют возможность такого взаимопонимания со своими учениками, которое недоступно более старшим учителям.

Наш курс математического анализа проходил так же, как математический кружок Константинова. Мы получали знаменитые «листки» с краткими определениями основных математических понятий и многочисленными задачами. Это была как бы «единица» достаточно обширного курса, который мы изучали. Предполагалось, что мы будем решать эти задачи в классе и дома. Для решения можно было выбирать любую задачу из листка. Мы могли решать их в одиночку или вместе с товарищами. Между домашними и классными занятиями не было особенной границы. Не знаю как другие мои одноклассники, но я воспринимал математические задачи скорее как волнующую возможность изобретений и догадок, а не как утомительные задания, нависающие надо мной дома. Не требовалось решить все задачи. Когда кто-то из нас, в одиночку или совместно, считали, что решили задачу, мы подзывали одного из учителей, чтобы он принял или опроверг наше решение. Иногда некоторые из моих одноклассников, включая и меня (см. Рис. 6) решали очень мало задач или вообще какое-то время не включались в решение, предпочитая заниматься другими, не математическими делами.

При проверке наших решений наши преподаватели математического анализа фокусировались по крайней мере на трех пунктах: а) пробелы в наших решениях, б) правильность шагов нашего решения и в) красота нашего решения (т.е. математическая эстетика и изобретательность). Когда решение бывало принято учителем, он отмечал это в специальной ведомости. Иногда наши учителя

Рис. 6. Андрей Печковский (слева) оценивает наше решение математической задачи (Игорь Царьков, в середине, и я, справа). Перед нами Александра Шляпентох работает над своей задачей. 1975, 9-й класс, урок математического анализа.

помогали подсказками, но чаще они не прерывали нас и не навязывали нам свои подходы и решения. Когда многие из нас застревали на каких-либо трудностях, нам предлагались мини-лекции. Во время этих мини-лекций

каждый вопрос обсуждается столько, сколько требуется. Спешки нет. Нет того, что мы

> должны окончить какую-либо тему к определенной дате и для этого начинать двигаться быстрее, причем некоторые ученики будут получать «два» (неудовлетворительная оценка), некоторые «три» (слабая оценка), в то время как мы будем спешить. Ничего такого не было. Каждый вопрос рассматривался тщательно, столько времени, сколько необходимо. И это в точности тот стиль, который нужен в науке.

Иногда наши учителя математического анализа вызывали одного из нас, чтобы рассказать свое решение всему классу. Иногда они читали мини-лекции по конкретным темам. Я помню их лекцию по математической индукции. Однако от нас не требовалось обязательно посещать эти лекции, и мы могли во время лекций заниматься своими делами.

Насколько я помню, в классе часто, если не всегда, было шумно. Когда я интервьюировал Веню Дардыка, он не припомнил, чтобы из-за этого были какие-то проблемы с школьной администрацией; очевидно, администрация была готова ктому, чтобы уроки математического анализа были шумными. Иногда на уроках матанализа мы не решали задачи, а играли в разные игры, например, в неограниченные крестики-нолики «5 в ряд», в гонки на клетчатой бумаги, в футбол 5-копеечной монетой, в самодельную «Монополию», а также в такие карточные игры, как преферанс, бридж, очко и т.п. Некоторые из этих игр приводили нас к новым интересным математическим задачам (например, найти выигрышную стратегии в игре «неограниченные крестики-нолики 5 в ряд» или в игре «гонки»). По моему мнению, эта неформальная игровая культура была очень важна для формирования и поддержки математической культуры, а также общей творческой интеллектуальной и образовательной культуры нашего класса. Однако, как вспоминает в своем интервью мой одноклассник Леня Розенбаум, он большую часть времени на уроках матанализа тратил на решение задач, поскольку для него это было основным смыслом поступления в математическую школу. То же я помню про себя. Думаю, что серьезная культура решения интересных математических задач и игровая культура находились в полезном симбиозе.

Леня Розенбаум вспоминает, что для наших учителей матанализа начало курса не было гладким. Сначала Веня требовал в классе порядка, который мы поддерживать не хотели. В какой-то момент Веня объявил об окончании их «педагогического либерализма» и установлении «хунты» со строгим порядком и притеснением. Это пришлось примерно на годовщину переворота 1972 года в Чили, совершенного военной хунтой. В ответ небольшая группа моих одноклассников стала публиковать самодельный журнал «Голос хунты», высмеивающий новый порядок (несколько выпусков были подготовлены коллективно). Вскоре Веня и Андрей расслабились. Никаких репрессий не последовало, они не пытались обратиться к школьной администрации или нашим родителям, или наказать нас плохими оценками. Мне кажется, что Вена и Андрей начали ценить творческий беспорядок и шум в нашем классе и научились управлять им путем общения с нами и аргументации. Думаю, что они пересмотрели свои педагогические ожидания и сфокусировались на здоровой «экологии» класса, а не на полном эффективном порядке.

Постепенно наши учителя матанализа стали очень терпимы к шуму, к нашей вовлеченности в другие математические или не математические занятия во время урока, а также к тому, что не слушают их мини-лекции или объяснения других студентов. Единственным требованием учителей осталось не мешать работать другим одноклассникам над своими задачами, сдавать решения или обсуждать их с учителями, а также слушать мини-лекции учителей или ровесников. Если такие помехи случались, Веня и Андрей уважительно и строго просили мешающих прекратить, объясняя отрицательное воздействие на других одноклассников и, насколько я помню, мешающие ученики часто, если не всегда, извинялись и прекращали или уменьшали свои помехи, к удовлетворению Вени и Андрея. Наш класс очень уважал учителей матанализа, мы не хотели их расстраивать и в общем считали их требования справедливыми. Кроме того, матанализ часто был последним уроком дня, поэтому те, кто не хотели заниматься математикой или выполнять требования учителей, могли свободно уйти из школы. Наконец, я помню, что иногда мы сами поддерживали порядок, одергивая себя или других, которые мешали уроку. Я не помню ни одного серьезного конфликта с нашими учителями матанализа, ни по поводу порядка в классе, ни по другому поводу.

Не все ученики решали задачи в течение всего занятия, но я не помню, чтобы учителя когда-либо нас к этому принуждали. Помню, что они несколько саботировали проставление итоговых оценок, а именно, большинство из нас получали «5» независимо от того, сколько задач было решено. Иногда, когда матанализ был последним уроком, некоторые, включая меня, выходили из класса наружу или даже уходили домой.

Никто нас за это не наказывал. Атмосфера на уроках матанализа была свободной. Я всегда знал, что если я решаю задачи, то это в основном потому, что я хотел это делать и потому, что они мне были интересны. Единственным внешним давлением, которое я чувствовал, было нежелание расстраивать моих учителей, Веню и Андрея, поэтому иногда я чувствовал, что не надо сильно отставать от моих одноклассников в решении задач. В среднем, я проводил много часов в неделю, думая над математическими задачами по своему выбору. Многие мои бывшие одноклассники утверждали, что наша учебная мотивация была основана не на поощрениях и наказаниях, а скорее на нашем подлинном интересе к математике и другим предметам, на богатой неформальной интеллектуальной культуре, и, вероятно, немного на честолюбии (по крайней мере для некоторых из нас в некоторые периоды).

На Рис. 5, на первой парте в среднем ряду, между двумя учениками видна книга. Это не учебник истории, а математическая книга известного американского популяризатора математики Мартина Гарднера. Я не помню, кто рекомендовал нам эту и другие математические и научные книги, но такие книги циркулировали в нашем классе. Я помню, что читал много книг Мартина Гарднера, книгу Льюиса Кэрролла «Запутанная сказка», книгу Якова Перельмана «Занимательная математика», книгу Ричарда Фейнмана «Фейнмановские лекции по физике» и т.п. Позднее в нашем классе начали циркулировать запрещенные самиздатовские политические и литературные книги.

Мои одноклассники образовывали очень важную для меня «окружающую среду», одновременно поддерживающую и конкурентную. Как я упоминал раньше, я не любил соревнования, потому что, даже если я побеждал, то чувствовал себя виноватым перед теми, кто проиграл. Мне больше нравилось, когда мы коллективно поддерживали математические усилия друг друга, а не соревновались. Мы устраивали много интеллектуальных и познавательных дискуссий по математике, физике, литературе, искусству, поэзии, музыке, политике и другим сферам жизни. Например, в 8-м классе мой друг Юлик Барышникоа и я создали новую науку, изучающую, как и почему люди устают – мы назвали ее «устологией». На одном из уроков физики мы узнали механическое определение работы как произведения силы на перемещение. Для нас это определение противоречило нашему повседневному опыту: человек, который держит тяжелую сумку, очевидно, работает, но согласно данному определению механическая работа равна нулю, поскольку тяжелая сумка не движется. Наш тогдашний учитель физики отправил нас к учителю биологии, сказав нам, что биологическая работа отличается от механического понятия работы: человеческие мускулы работают при напряжении, даже если ничего не движется. Тот факт, что физическое определение работы неприменимо к биологии, являлся для нас бессмысленным, и мы решили исследовать это, создав новую науку «устологию».

Другое противоречие, которое мы заметили в физике, было механическое определение движения. В классической механике Ньютона движение всегда относительно: оно происходит относительно наблюдателя. Однако утверждают, что Земля вращается вокруг Солнца, а не вокруг чего-то другого. Нам стало очевидно, что это утверждение противоречит ньютоновской механике. Мы полагали, что, возможно, проще описать траектории движения планет, наблюдая с Солнца, чем с Земли, но это не значит, что Земля вращается вокруг Солнца, а не вокруг чего-то другого (этот вопрос обсуждается и Константиновым). И другие вопросы, и жизнь в целом были предметом обсуждения в наших дискуссиях с ровесниками. Мне ОЧЕНЬ нравилось в то время что наше (по крайней мере, мое) восприятие мира менялось. До математической школы я чувствовал, что моя роль как «хорошего потомка» заключалась в том, чтобы глубоко усваивать знания, добытые предыдущими поколениями, моя роль была в том, чтобы приобщаться к *их* Знанию и *их* Правде. Мои собственные мнения и размышления были несостоятельны и не важны. В нашей математической школе, вместе с моими ровесниками и некоторыми учителями, я усвоил, что моя роль как «хорошего потомка» была в том, чтобы в открытых дискуссиях с ровесниками и учителями критически осмысливать все, что я видел и изучал. Все и всегда подлежало проверке совместно с моими сверстниками и в более широком кругу. Любое готовое «решение», выработанное официальной культурой прошлого, должно проходить проверку таким же образом, как наши учителя матанализа проверяли наши решения.

Ниже я собираюсь дать «грубое» персональное описание педагогических математических практик нашей школы, которые мне наиболее запомнились и, вероятно, оказали наибольшее влияние на меня (а, возможно, и на других учеников).

В своем интервью 2010 г. Сергею Дориченко для журнала «Квант» Константинов подчеркивал, что интеллектуальные идеи должны быть скорее «глубоко прочувствованы», чем поняты умственно. Я встретился с таким подходам на моих уроках по матанализу. Наиболее запомнившееся событие на наших уроках матанализа связано с Юрой Дардыком и определении непрерывной функции, основанном на понятии предела, на одном из уроков. Учитель дал нам листок с определением непрерывной функции и список интересных задач, как легких, так и очень трудных. Я не мог продвинуться дальше определения. Вот его примерное воспроизведение:

> Функция f называется непрерывной в точке c, если выполнено следующее: для любого числа $\varepsilon > 0$, как угодно малого, существует некоторое такое число $\delta > 0$, что для всх x из области определения f с $c - \delta < x < c + \delta$ значение $f(x)$ удовлетворяет условию $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$.

Я помню, что понимал математический смысл утверждений, но я не мог понять их вывода. Я прочитал определение много раз, но это не помогало. Почему математики придумали такое громоздкое и неестественное определение? Можно было придумать гораздо более простое, например, «функция непрерывна, если ее график можно провести карандашом без прыжков»! Я объяснил мое затруднение моему учителю матанализа Вене, Веня выслушал меня очень внимательно и ответил: «Женя, я не понимаю твоего неприятия, но думаю, что это очень важно. Предлагаю тебе некоторое время подумать об этом. Не бросайся решать задачи из листка о непрерывных функциях. Иди и еще подумай о своем неприятии» (это не точная цитата, а запись по памяти). Несколько дней я думал об этом, пока неожиданно не пришел к выводу, что это основанное на пределе определение придумано для слепых людей, которые не могут воспринимать карандаш без прыжков, рисующий график функции. Применяемое для незрячих, такое определение приобрело для меня достаточный смысл. После этого понимания мне уже не надо было перечитывать определение, чтобы его воспроизвести, достаточно было думать о слепых людях. Я был воодушевлен и бросился к Вене со своим открытием. Веня опять выслушал меня очень внимательно и сказал: «Хорошо. Я не уверен, что понимаю то, что ты говоришь, но не сомневаюсь, что ты открыл что-то очень важное.» Я начал решать задачи из листка о непрерывных и разрывных функциях. Я высоко оценил серьезный и ободряющий ответ Вени по поводу моего неприятия.

Константинов подчеркивал, что математику надо глубоко чувствовать и понимать концептуально, но это часто редуцируется до алгоритмических манипуляций с математическими символами на традиционных уроках математики:

> … отец моей матери, мой дед был учителем математики. Он имел огромную нагрузку и в довершение его маленькая дочь мучила его глупыми вопросами. В младших классах она познакомилась с задачами типа $5 + 7 = 12$. Тут все ясно. Понятно, что спрашиваюи и какой ответ. Но потом началась алгебра, появилось $A + B$. Что такое $A + B$? Ответа нет. Кажется, что это что-то бессмысленное. Что это значит? Моя бабушка, ее мама, говорила ему: «Ну объясни ей это, почему бедная девочка не понимает?». Он пытался объяснить, но ему было некогда, и она так и не понимала. Что это за странная задача, $A + B$? Что надо

> делать? Но потом она все поняла и стала любить математику. Но начальное непонимание было очевидным... Многие не могут понять [алгебраические формулы]... единственное о чем они могут думать – это о заучивании наизусть ответов к экзаменационным вопросам (разговор между ЕМ и НК, часть 2, ноябрь 2016 г.).

На наших уроках математического анализа мы тратили время на «изобретение велосипеда», стараясь сами решить математические задачи, которые в истории уже были решены. Как написала мне одноклассница Александра Шляпникова: «Ты спрашиваешь меня о воспоминаниях того времени. Единственное, что я отчетливо помню, это что все занимало много времени. Кажется, мы передоказывали сами все стандартные теоремы математического анализа. Помню одну задачу: показать эквивалентность эпсилон-дельта определения непрерывности и определения через последовательности. Я очень гордилась тем, что сумела это доказать. :-)» Наши учителя оказывали нам уважение, тратя время на столь глубокое авторское обучение.

Мое мышление всегда было основательным, приземленным, материальным. Я не мог понять вещей, если не знал их происхождения, почему человек практически нуждался в том, чтобы они появились. «Кого это волнует и зачем это нужно» - было и сейчас остается моим обычным вопросом, когда я сталкивался и сталкиваюсь с задачами, вопросами и просто информацией/знанием. Известный американский философ образования John Dewey называл это «психологизацией» готового знания (Dewey, 1956). Можно также назвать это «онтологизацией готового знания и решенных проблем». Приведу еще один пример этого процесса, связанный с моим одноклассником Юликом Барышниковым.

В 10-м классе я и многие мои одноклассники из школы № 91 участвовали в математических олимпиадах, организованных несколькими московскими институтами, включая Московский государственный университет. Среди прочих, мы пошли на математическую олимпиаду в Московский институт стали и сплавов (МИСИС). Одна задача оказалась для меня трудной: «Для каждой грани произвольной призмы построен вектор, перпендикулярный этой грани, длина которого равна площади этой грани. Доказать, что сумма всех этих векторов равна нулю». Я потратил много времени, пытаясь проектировать эти векторы на три взаимно перпендикулярные плоскости, но ничего не получилось, так как я не смог разобраться в полученных формулах. Недавно я узнал от профессора математики Юлия Барышникова, что эта задача – вариант теоремы Стокса. А в то время мой одноклассник Юлик Барышников решил эту задачу просто и красиво, поняв что это следствие первого закона Ньютона. Закон можно сформулировать так: «Если тело неподвижно, то сумма всех приложенных к нему сил равна нулю». Действительно, представьте себе неподвижную призму с твердыми гранями без воздействия гравитации. Внутри призмы находится газ. Давление газа в призме всюду одинаково (иначе газ бы двигался внутри призмы, но он также неподвижен). Газ давит на грани призмы. Сила давления на грань равна давлению, умноженному на площадь грани, и перпендикулярна соответствующей грани. Поскольку призма неподвижна, по первому закону Ньютона сумма всех векторов силы равна нулю. Такое доказательство теоремы Стокса дал Юлик на математической олимпиаде в МИСИС. Я не помню, было ли это решение зачтено организаторами олимпиады, но мне оно понравилось. Оно понравилось мне, потому что: а) Юлик привязал изощренную математическую задачу (а также теорему Стокса) к физической реальности; б) применил физику для решения математической задачи; в) решение было эстетически красивым, оно напоминает мне о моменте озарения, когда неожиданно видишь новую реальность, новый образ. Парадоксально, но сейчас профессору факультета Электрического и компьютерного машиностроения Иллинойского университета Юлию Барышникову не нравится его физическое решение математической задачи олимпиады МИСИС. Он написал мне: «Вероятно, я где-то прочитал это "доказательство". Но это несколько абсурдно – ссылаться на экспериментальный факт там, где требуется обоснование. Но и предлагать детям теорему Стокса в качестве задачи тоже неправильно – много шансов за то, что кто-то из них просто прочитает решение в книге.» По-моему, профессор Юлий Барышников слишком строг к себе, хотя, конечно, существует важное плодотворное расхождение между понятием доказательства в математике и физике.

Мой следующий блок воспоминаний относится к компьютерному программированию без компьютера. В то время, в нашем 9-м классе, Веня интересовался так называемыми нормальными алгоритмами, и он познакомил нас с заменами/подстановками Маркова, которые являются специфическим языком программирования, разработанным русским математиком Андреем Марковым-младшим (это нечто, похожее на машину Тьюринга, https://en.wikipedia.org/wiki/Markov_algorithm). Алгоритмы Маркова представляют собой преобразования слов в некотором алфавите символов с использованием формул подстановки, таких как $a \to b$ – эта подстановка заменяет все буквы «a» в данном слове на букву «b». Например, слово «appla» превратится в «bpplb». Есть также специальные символы, которые не являются частью никакого слова. Некоторые символы используются для управления алгоритмом (например, точка означает окончание алгоритма), а некоторые – просто специальные символы, используемые для программирования (например, греческие буквы). Прочитав оригинальные тексты о марковских алгоритмах, я понял, что Веня мог изменить некоторые правила. Веня сделал для нас листки по марковским алгоритмам, которые включали определение марковских алгоритмов и краткое описание правил. Веня также придумал много интересных задач по марковскому программированию, например, вырезать из данного слова все буквы, кроме первой; вырезать последнюю букву данного слова; удвоить вторую букву «a» в слове; сделать зеркальное отражение данного слова и т.п. Это были очень стимулирующие и занимательные задачи программирования. Помню, что иногда мы играли, изображая из себя компьютер для выполнения сложных алгоритмов, предложенных товарищами, которые (алгоритмы) могли работать с любым предложенным словом. Мы также получили разработанные Веней и Андреем листки по изучению языка программирования АЛГОЛ, у нас была летняя практика в Московском вычислительном центре, где мы могли практиковаться в программировании на огромной ЭВМ «НАИРИ», использовавшей перфокарты. Помню, что в одной из задач требовалось определить род русского существительного. Весь блок задач по программированию был разработан Веней и Андреем без участия Константинова. Поскольку была идея, что наши преподаватели матанализа – студенты – будут разрабатывать собственные блоки и и соответствующие листки с определениями и задачами в дополнение к листкам, рпазработанным Константиновым. Я полагаю, что фактически я научился компьютерному программированию от Вени и Андрея в нашей математической школе № 91. Они заложили достаточный фундамент для моего последующего самостоятельного изучения различных языков программирования, которые я изучил позже, таких как Фортран, PL, PHP, Moodle, JavaScript, FrontPage, HTML, MySQL и многие другие.

Наконец, я помню, что участвовал в разработке новых математических задач, постоянно модифицируя и видоизменяя те математические (а также не математические, как описано ранее) задачи, с которыми я встречался в школе. Например, когда Веня и Андрей дали нам листки с аксиомами арифметики в 8 классе, некоторые мои одноклассники и я пытались разработать альтернативную систему аксиом, чтобы увидеть, какого типа математика могла бы из них следовать. Помню, что я особенно сосредоточился на вопросе, где такая альтернативная математика могла бы существовать и использоваться. В моих интервью/беседах некоторые одноклассники также вспоминают, что придумывали новые математические задачи, а некоторые – нет. Мне осталось не ясным, они об этом просто не помнят, или не участвовали в придумывании новых задач. Ни Константинов, ни другие учителя матанализа, которых я опрашивал, не помнят, чтобы ученики придумывали новые задачи, кроме Александра Поддьякова. Кроме того, они не побуждали учеников этим заниматься. Очевидно, Константинов и другие учителя математического анализа не осознавали важности такой деятельности, несмотря на то, что сами они активно участвовали в разработке новых математических задач.

Школа № 91: не только математика

Наше образование в московской школе № 91 не ограничивалось только математикой, думаю что это было частью педагогического плана Константинова. У нас было очень много послеурочных внешкольных занятий. С нашими учителями матанализа мы ходили в воскресные туристические походы по лесам вокруг Москвы, также с ними мы участвовали в КСП (клуб самодеятельной песни), вместе посещали кинотеатры, а также полулегальные концерты, устраивали вечеринки и т.п. Мой одноклассник Алексей Саверченко вспоминает:

> Я участвовал в туристических походах и встречах КСП в лесу. Несомненно, это углубляло мою жизнь, обогащая ее (без этого достаточно рутинную) разнообразным опытом и способствовало моему образованию. В этих походах мы приобретали навыки общения, отличные от тех, которые имели место в школе, учились независимости и устойчивости к возникавшим экстремальным ситуациям. Этот опыт отличался от приобретенного в самой математической школе. В отличие от олимпиад, где каждый был один против остальных, в походах мы учились сотрудничать, поддерживать и помогать друг другу, преодолевать трудности и решать совместно проблемы, которые невозможно решить поодиночке. (Сообщение по электронной почте 28 февраля 2017 г.)

Летом 1975 и 1976 гг., между 8-м и 9-м, и между 9-м и 10-м классом, для нас и наших учителей математики Константиновым и его коллегами были организованы математические лагеря в Эстонии. Это были экономически самоокупаемые лагеря, где все участники – дети и взрослые – работали в местном колхозе, чтобы заработать на питание и проживание. По вечерам там были лекции по математике, песни у костра, а также разговоры о математике, философии, искусстве, политике и просто о жизни. По некоторым причинам было запрещено играть в шахматы. Я туда не ездил, но мои одноклассники Ирина Казакова (в девичестве Герцева), Алексей Саверченко, Евгений Емелин и Алексей Рябинин очень трепетно отзывались о своем пребывании «на краю света», где были лекции по математике, а взрослые математики, студенты и старшеклассники общались и работали вместе.

Наши учителя математики приобщали нас к культуре и занятиям студентов вузов. Некоторые из этих занятий были политически незаконны. Так, я помню, что один из не постоянных учителей матанализа, Лева Фридлендер, поделился с нами, что он изучает иврит, иудаизм и еврейскую культуру, что было официально по закону запрещено в СССР. Советский государственный антисемитизм меня озадачивал, я ощущал в нем нечто нечестное.

В нашей школе было также несколько не математических факультативов (неформальных послеурочных занятий). Я посещал литературный клуб, который вел учитель не из нашей школы, он был другом наших учителей физики. Его звали Лев Иосифович Соболев. Мы собирались в кабинете физики, чтобы обсуждать известных русских и советских писателей, таких как Гоголь (рассказ «Нос»), Тынянов (роман «Смерть Вазир Мухтара» и короткие рассказы), эмигрантские стихотворения Бунина, а также Михаила Булгакова («Мастер и Маргарита»). Выбор литературных произведений был необычный и полулегальный. Факультатив по литературе посещали также студенты, специализировавшиеся на изучении литературы. Для меня уровень дискуссий был запредельным. Упор делался не на изучении официальных готовых истин о литературных произведениях, а на выработке своих собственных уникальных, персональных, обоснованных и отстоянных в дискуссиях эстетических вкусов, мнений, взглядов и суждений (что восходит к понятию «внутренне мотивированного дискурса» Бахтина). Мой одноклассник Олег Казаков вспоминает, что он посетил всего одно занятие, но оно оставило впечатление на всю жизнь. На этом занятии Лев Иосифович выразительно и страстно читал отрывок из романа Булгакова «Мастер и Маргарита». Затем он спрашивал учащихся, есть ли слова и фразы, которых они не знают или не понимают. Когда мы отвечали или спрашивали (например, что значит «Римские центурионы»), учитель рассказывал нам об этом, создавая содержательный нарративный «кокон» вокруг оригинального текста Булгакова и вовлекая нас в глубокие дискуссии. Хотя я часто оказывался на периферии этих дискуссий, поскольку не имел своего мнения по данному вопросу, при обсуждении этих волнующих тем я развивал свое ориентирование и свои мнения. Я был загипнотизирован новым рядом образов, который он открывал нам. Например, я помню, как он вслух читал рассказ Тынянова о декабристах – проигравших российских заговорщиков против царя и монархии в 19 веке – и особенно про их лидера Павла Пестеля. Наш учитель несколько раз перечитал описание Пестеля Тыняновым: Пестель часто писал свое имя на французском языке и его начертание буквы t напоминало острый нож гильотины. На нашем литературном факультативе мы обсуждали этот мощный образ, очевидно отражающий собственные размышления Тынянова о гипотетической победе декабрьского восстания Пестеля и последовавшим бы за ней терроре, как при Французской революции. Некоторые из нас подозревали, что Тынянов подразумевал не только восстание декабристов 1825 г. и Французскую революцию, но также Октябрьскую социалистическую революцию 1917 г. и последовавший за ней террор. Меня всегда удивляло, как как наш учитель литературы всегда умел извлечь что-то интересное из каждого выступления студентов или моих одноклассников.

Другим известным факультативом был известный в Москве кинематографический факультатив («кинофак»), который проводил учитель физики Роман Яковлевич Гузман. Это был уникальный феномен в жизни Москвы. Каждый четверг во время учебного года мы смотрели и обсуждали лучшие советские и иностранные фильмы, а также искусство кино. Мы посмотрели много выдающихся фильмов, которые невозможно было увидеть в советских кинотеатрах. Было непонятно, как Роману Яковлевичу удавалось получить эти фильмы и обойти советскую цензуру. Иногда зрители кинофака в Доме культуры «Красный текстильщик» собирали буквально сотни юных любителей кино с их родителями и друзьями. После таких просмотров мы не устраивали дискуссий о политике и искусстве. Помню, что в начале 8-го класса я характеризовал моим родителям некоторые идеи моих одноклассников (например, Коли Уханова), выраженные на обсуждениях кинофака, как антисоветские. К концу 8-го класса я перестал использовать этот термин, поскольку начали развиваться мои собственные критические политические взгляды и я перестал повторять как попугай взгляды моих родителей и официальной советской коммунистической пропаганды. Позже, когда я стал учителем физики в одной из московских школ, я также организовал в моей школе кинофак, ассоциированный с кинофаком Гузмана. Во время перестройки летом 1988 г. мы как-то уговорили целый кинотеатр показывать иностранные фильмы с Московского международного кинофестиваля. Старшеклассники (в основном из школы № 91) приходили в кинотеатр, мы организовали детское жюри и встречи детей с признанными во всем мире режиссерами (например, Феллини, Форман).

В начале 9-го класса нам назначили нового учителя физики Алексея Юрьевича Коростелева. Он имел склонность к диалогам особого типа, я бы сказал, к сократовским диалогам. Он всегда ставил под сомнение любое утверждение, которое мы делали, некоторых из нас это очень обескураживало и обижало. Я помню, что он обучал физике, предлагая нам интересные задачи-провокации, мы должны были обсуждать подходы к их решению. Его уроки физики были очень интересные и стимулирующие. Я помню, что в одной задаче рассматривался вопрос, почему в местах, где много солнца, у людей кожа темная, а в местах с недостатком солнца – светлая. Непосредственно с физической точки зрения должно было бы быть наоборот, потому что светлая поверхность лучше отражает солнечное излучение, а темная, наоборот, его поглощает. С этой непосредственно физической точки зрения темнокожие люди должны были бы жить в местах с недостатком солнечного света, а светлокожие – в местах, где света много. Европейцы должны были бы быть темнокожими, а африканцы – светлокожими. Задача была в том, чтобы понять, почему это не так. Учитель имел специфический стиль дискуссии, он разрушал практически любую позицию, которую ему предъявляли. Это расстраивало многих учеников, которые из-за этого его не любили, хотя, очевидно, уважали. Леня Розенбаум вспоминает, что они с одноклассником Сашей Кирилюком громко играли в карты на уроке физики, мешая другим ученикам. Алексей Юрьевич попросил их выйти из класса и не возвращаться. Они это сделали с радостью, так как скучали на уроках. Они думали, что Алексей Юрьевич пожалуется школьной администрации и родителям, но этого не произошло. В итоге Лене и Саше это надоело, они стали скучать по урокам физики, на которых им иногда было интересно.

В конце концов, они вернулись и извинились перед Алексеем Юрьевичем, который разрешил им посещать уроки, если они пообещают снова не мешать классу. Он им сказал, на что тратить свое время и внимание, - это их собственное дело, но они не должны мешать тем, кто выбирает учебу.

Иногда он меня тоже расстраивал, хотя и очень нравился. Он меня озадачивал, и я был им заинтригован. Однажды я изложил ему его собственный подход, вероятно, чтобы сделать ему приятное или просто в знак согласия. Я ожидал, что он одобрит этот подход, поскольку он был его собственный, он сам его выработал. К моему огромному удивлению, он его также разрушил. Возможно, у него была не очень хорошая память, и он уже забыл те пункты, с которых в прошлом разбивал мою собственную позицию. После этого я намеренно предлагал ему его собственные аргументы, чтобы посмотреть, как он их будет разбивать. Я многому научился у него, особенно из его диалогов. Я научился не цепляться за мои взлелеянные позиции и постоянно искать границы своих собственных идей.

В какой-то момент моя одноклассница Ира Герцева и я решили, что наш учитель физики был политическим диссидентом, как декабристы, которых мы изучали на литературном факультативе. Ира вспоминает, что Алексей Юрьевич выглядел одновременно благородно и иронично и был настроен критически по отношению к советской политической действительности. Кроме того, его речь была таинственной и туманной, полной многих намеков. Его суждения были сильными и убедительными. Мы чувствовали, что он знает какую-то очень важную тайну, и оба желали к ней приобщиться, несмотря на наши страхи. С трепетом мы пришли к нему после уроков в физическую лабораторию и спросили, не является ли он членом какой-нибудь тайной политической организации. Он засмеялся, но не высказал ни отрицания, ни подтверждения. Он сказал, что не будет говорить с нами о политике, потому что хочет, чтобы мы сами критически осмысляли политику, без постороннего влияния. Тем не менее, он стал нам давать запрещенную литературу по искусству (включая научную фантастику), политике, а также религии (напечатанную либо много лет назад, либо самиздатом). Он велел нам быть осторожными «в нашей солнечной стране» и не делиться этой литературой с людьми, которым мы не доверяем, включая родителей. Вскоре я убедился в справедливости этого предупреждения. Мои родители обнаружили книгу, которую он дал почитать, роман «Мастер и Маргарита» Михаила Булгакова, которая считалась полулегальной. Они были напуганы, и мой отец угрожал, что пожалуется в школу на учителя. Я усвоил урок и после этого более тщательно прятал такие книги от родителей. Мы трое – Ира, Алексей Юрьевич и я – обсуждали эти книги после уроков в физической лаборатории. Эти обсуждения были очень критическими, Алексей Юрьевич ставил под сомнение любое утверждение, которое делали я и Ира. Однако, как бы мы ни расстраивались, когда он опровергал наши идеи и мнения, мы высоко ценили наш маленький подпольный кружок, любили и уважали нашего учителя физики. Мои отношения с Алексеем Юрьевичем сохранялись долго после окончания мною школы.

Мой одноклассник Алексей Саверченко, в настоящее время российский дипломат, имел аналогичный опыт с Николаем Николаевичем Константиновым:

> Стоит упомянуть Константинова не только в связи с математическими кружками, но и в других отношениях. У нас было много разговоров с Николаем Николаевичем на, я бы сказал, около политические темы, такие, как инфляция рубля, эмиграция из СССР и т.п., во время наших внешкольных туристических походов и встреч КСП (клуб самодеятельной песни) в лесу. Эти беседы были исключительного качества, они сильно повлияли на мою дальнейшую жизнь. Они показали мне, что существуют другие, отличные от официальных, но тем не менее приемлемые и разумные мнения. Это был глоток свободы в идеологическом окружении, которое не принимало альтернативных мнений. Эти альтернативные мнения, разделяемые Константиновым, порождали зародыши сомнений в моей незрелой душе подростка. В моей последующей жизни эти зародыши сомнений развили во мне твердое убеждение, что надо не принимать никакую данную информацию как без-

условную, но сверять ее с альтернативными источниками, анализировать аргументы в ее пользу, делать выводы и заключения самостоятельно. Все это оказалось очень полезно в моей как профессиональной, так и частной жизни, не менее чем те знания и умения, которые я получил в своей математической школе (сообщение по электронной почте, 28 февраля 2017 г.).

Мы очень интересовались интеллектуальными запросами ровесников, культурой ровесников, все это не считая математики. В своих нескольких интервью Константинов высоко оценил среду, образующуюся в математических классах. В следующих разделах я проанализирую среду нашего класса, ее светлые и темные стороны.

Гендерные проблемы в математической школе № 91

В московской математической школе № 91 среди выпускников нашего маткласса было 7 девочек (24%) и 22 мальчика (76%). По моим воспоминаниям, за три года существования нашего класса со специализацией по математике из примерно десятка студентов, которые преподавали у нас либо на краткосрочной, либо на долгосрочной основе, ни разу не вела занятия девушка. Мы обсуждали этот вопрос с Константиновым, и он объяснил это явление естественными особенностями гендерных судеб.

Е.М.: Николай Николаевич, я помню, что среди старшекурсников, которые вели занятия у нас в школе, были одни парни. Я не помню ни одной девушки-преподавателя.

Н.К.: Конечно, девушек было не так много, но было несколько в разные годы.

Е.М.: Но почему не так много девушек?

Н.К.: В математических кружках всегда было несколько девушек. За весь период наших математических кружков, начиная с 1980 года, всего было лишь три особенно талантливых девочки, которые были такими же сильными, как и мальчики.

Е.М.: И почему, как вам кажется, все складывалось именно так?

Н.К.: Ну, я полагаю, что... У меня была одна сильная студентка, Ира Жетвина, но она у меня занималась только на первом курсе. А потом, когда она уже училась на старших курсах, мы иногда ходили с ней в консерваторию: она любила музыку и хорошо ее понимала. Мы встречались довольно часто. После окончания университета она поступила в аспирантуру по кафедре общей физики энергетического института (МИЭМ). Там у нее был хороший научник, настоящий ученый, и все шло хорошо, но позже мы снова встретились в консерватории, и она сообщила мне, что бросила аспирантуру и больше не будет там учиться.

Е.М.: Почему?

Н.К.: Она сказала, что поняла, что теоретическая физика – не женское дело. Например, на той же кафедре один аспирант, тоже физик-теоретик, работая над какой-то проблемой, никогда не знал, сможет ли он ее решить. А если человек работает в какой-то области, например, проводит исследование, учась в аспирантуре некоего химического факультета, он вполне уверен в том, что точно сможет справиться с заданной темой. Но здесь, на кафедре теоретической физики, сказала она, никогда не известно, получится ли когда-либо решить поставленную задачу или нет. Это, по ее словам, это не женское занятие.

Е.М.: Странно.

Н.К.: Ну, нам, мужчинам, это кажется странным. Но у женщин совсем другая судьба. Нужно понимать, что им свыше дано иное предназначение. (Разговор между Е.М. и Н.К., часть 3, 3 ноября 2016 г.)

На мой взгляд, это – печальное проявление сексистских позиций Константинова, его определенной ограниченности.

Я взял интервью у моей одноклассницы Александры Шляпентох, которая пришла в нашу школу только в начале 9-го класса. Я задал ей вопрос о том, как она ощущала себя в нашем матклассе, будучи девочкой – своего рода представительницей гендерного меньшинства в классе, где, в основном, были одни мальчики. Она, смеясь, ответила, что ощущала себя в классе нормально, представляя гендерное меньшинство, потому что мальчишки уделяли ей много внимания. Говоря серьезно, она подтвердила, что ей было очень комфортно учиться в таком классе. Она ощущала на себе проявления сексизма только за пределами школы – в кругу бывших одноклассников и со стороны своих родителей, которые настаивали на том, что математик – не женская профессия.

Родители Александры не поддержали ее мечты стать математиком. Они не возражали против ее поступления в математическую школу в 9-м классе, потому что, по словам Александры, полагали, что престижная школа позволит ей в будущем освоить одну из почетных технических профессий, например, стать программистом (важно отметить, что в то время в СССР считалось, что в области компьютерного программирования могут работать и мужчины, и женщины). После того, как в конце 1970-х годов Александра вместе с родителями эмигрировала в Соединенные Штаты, они настояли на том, чтобы она специализировалась в области информатики, а не математики, учась в университете, а затем в аспирантуре. Позже она смогла вернуться к математике, однако этот шаг дался ей очень непросто: Александре пришлось приложить немало усилий, чтобы одержать победу в борьбе с родителями (и, вероятно, с неуверенностью в себе), теряя драгоценные годы на эту борьбу и на достижение поставленной цели.

Что касается одноклассников Александры, то до того, как она поступила в математическую школу № 91, они часто относились к ней как «какой-то странной», недостаточно похожей на девочку. Некоторые подруги говорили, что у нее может опухнуть мозг от занятий. Александре было очень трудно общаться со сверстниками до поступления в матшколу. Она рассказывала, как в прежней школе ребята в классе играли в популярную интеллектуальную игру, в которой команда девочек выступала против мальчиков, и мальчики отказывались играть, если Александра была в команде. Казалось, они думали, что в таком случае игра была несправедливой, потому что девочки получали незаслуженное преимущество в виде слишком умного игрока. В результате, чтобы устранить конфликт, учителю приходилось назначить Александру на роль судьи в игре.

Александра сказала, что сексизма в нашем матклассе не ощущала совсем. Ни со стороны одноклассников, ни со стороны наших преподавателей-студентов математического факультета (или других учителей в школе) она не чувствовала снисходительного отношения лишь на основе гендерных различий. Никто не смотрел на нее свысока потому, что она была девочкой, а не мальчиком. Никто не пытался критиковать ее желание изучать математику, потому что изучение математики – «не девчачье дело». Никто в нашем классе не удивлялся потрясающим успехам в математике девочки-одноклассницы. Никто не ожидал, что девочке математика (или любая другая дисциплина) будет даваться труднее, чем мальчику. Ни в одном межличностном конфликте, которые иногда возникали среди одноклассников, уровень способностей к математике не ставился в зависимость от гендерной принадлежности и не использовался в качестве оружия. Александра говорила о том, что в нашем классе установилась «интеллектуальная меритократия»: сверстники распределялись по уровням и оценивали друг друга в соответствии с достижениями и творчеством в области математики и других сфер жизни, среди которых были физика, литература, музыка, поэзия, диссидентское движение и пр. Иногда среди одноклассников случались довольно жесткие и даже, возможно, враждебные столкновения, но гендерная принадлежность никак в них не фигурировала. При этом можно сказать, что эта конкуренция, враждебность и бравада могли по-своему иметь гендерный характер. Она вспомнила, что однажды Нина Юрьевна Вайсман, наша учительница по математике, дала нам задачу, в которой она явно допустила опечатку, что значительно усложнило задачу по сравнению с предполагаемым уровнем трудности. Когда Александра заметила опечатку, ее первоначальный импульс состоял в том, чтобы отказаться от попыток решить ее и сообщить об опечатке учителю. Но потом она подумала, что, вероятно, наш одноклассник Юлик Барышников все равно решит задачу, чтобы доказать, что он лучший в классе. Эта мысль заставила Александру вернуться к решению задачи. И действительно, из всего класса только они с Юликом и смогли ее решить. В общем, Александра высоко отзывалась о той жесткой, но справедливой конкуренции, которую она ощущала в нашем матклассе, поскольку, по ее мнению, именно это позволило ей хорошо подготовиться к испытаниям во взрослой жизни. Короче говоря, она пришла к выводу о том, что два года, проведенные в матклассе, были одними из лучших лет ее жизни, потому что там у нее была возможность быть собой и следовать выбранному пути.

Точно так же, когда я брал интервью у моей бывшей одноклассницы Иры Казаковой (в девичестве Герцевой), она сказала, что не помнит ни единого случая сексизма в нашем матклассе. Испытывая к математике меньший интерес по сравнению, как ей самой казалось, с некоторыми одноклассниками, Ира чувствовала себя очень комфортно в классе, как в отношении ребят, так и в отношении наших учителей. По ее словам, она была неформальным лидером среди девочек в классе. Единственный неприятный инцидент, связанный с гендерной принадлежностью, который ей удалось вспомнить, произошел в 9-м классе, когда в конце весны (или в первые дни лета) группа девочек и мальчиков, а также несколько наших учителей по матанализу – студентов-старшекурсников (но не основных наших преподавателей) отправились в поход по лесам Подмосковья (я сам не ходил в походы и не ездил на школьные экскурсии). День был жаркий, и они решили искупаться в ручье. Когда они переоделись в купальные костюмы, один из студентов-преподавателей сделал грубый комментарий относительно тела Иры. Она обиделась, но не только на этого студента, но и на наших одноклассников, которые не остановили его, а, наоборот, со смехом присоединились к его нападкам на Иру. Девочки приняли сторону Иры. Конфликт разгорался, и девочки решили самостоятельно вернуться в Москву. Когда пришло время очередного похода, девочки отказались идти вместе с нашими парнями. Позже все мальчики и студенты, которые принимали участие в издевательских шутках, извинились перед Ирой и остальными девочками. Хорошие отношения были восстановлены, и проблема гендерного противостояния более не возникала. По словам Иры Казаковой, и Веня, и Андрей – наши главные преподаватели по матанализу, будучи всего на четыре года старше нас, всегда вели себя профессионально и уважали наших одноклассниц.

В дополнение к гендерным проблемам хочу сказать, что не могу вспомнить какой-либо напряженности в нашем матклассе, связанной с этнической принадлежностью или с социально-экономическим классом учащихся. Мои одноклассники, у которых я брал интервью, также не сообщали о подобных проблемах. Кроме того, многие из моих бывших одноклассников хорошо помнят, насколько велик был контраст между их предыдущими школами, для которых характерным был серьезный уровень физического насилия и травли, и атмосферой в нашем матклассе, где физического насилия и буллинга не существовало. По моим воспоминаниям, так все и было.

Темные стороны: недоброжелательная конкуренция, отчуждение, вербальная травля и розыгрыши учителей

В жизни нашего маткласса была и темная сторона. Некоторые из нас ощущали на себе и были вовлечены в недоброжелательную конкуренцию, отчуждение, вербальный буллинг и розыгрыши учителей.

Недоброжелательная конкуренция означала, что личностные достоинства одноклассников оценивались в соответствии с их «математическими способностями», «математической одаренностью», «математическим гением». Показателями этого рейтинга могли быть успехи учащихся на престижных олимпиадах по математике, решение особенно сложных математических задач, оригинальные и красивые решения, превосходство в области математики, победы в математических играх, которые проводились в классе, и пр. Сама по себе конкуренция в области математики не обязательно является чем-то плохим или вредным: некоторым ученикам это нравится, другим – нет. На мой взгляд, можно и нужно уважать одноклассников, обладающих талантами в области математики, восхищаться и гордиться ими. Вот как Константинов определял плохую и хорошую конкуренцию:

> Н.К.: Здесь есть один фундаментальный момент: у нас нет первого места, и рейтинг в целом отсутствует. В сертификате участника просто фиксируется, какие предметы вы сдали. Там не указывается, каков ваш рейтинг.
>
> Л.Б.: Когда вы получаете сертификат участника, это уже означает, что ты добился успеха, что ты – победитель. В Турнире Ломоносова есть победители междисциплинарного конкурса, и этим можно гордиться... Кроме того, насколько я знаю, детям это очень нравится. Особенно младшим школьникам, потому что, получая свои сертификаты, они хотят признания, и их самооценка возрастает.
>
> Н.К.: ... Мы следуем следующему принципу: есть школьники, которые не получают дипломов или грамот, но они обязательно должны получить хоть что-то и не уйти с пустыми руками. Поэтому мы всем предоставляем отчет о прошлогодних турнирах Ломоносова. Ни один ребенок не уходит с турнира с пустыми руками. Что касается главных призов, то по этому поводу есть сложившаяся позиция. Они изучали мнения детей, которые получали первые призы на различных олимпиадах, и, как правило, когда они вырастали, то говорили, что в них не было необходимости.
>
> Л.Б.: Почему?
>
> Н.К.: Я приведу пример. Ученица 8-го класса получила первый приз на Московской математической олимпиаде. В 9-м классе она изо всех сил стремилась также получить первый приз и очень боялась, что ее постигнет неудача. Но она стала победителем олимпиады. В 10-м классе она превратилась в настоящий комок нервов, стала участником международной олимпиады, но заняла только второе место. И восприняла это второе место как несмываемый позор на всю оставшуюся жизнь.
>
> Л.Б.: Второе место на международной олимпиаде? Позор?
>
> Н.К.: Да, только второе, в то время как она привыкла быть первой! Важно понимать, с какой психикой мы имеем дело. С очень уязвимой психикой
>
> Журналист: Да, я знаю, что это один из ваших принципов: вы стараетесь не травмировать детей.
>
> Н.К.: Нет, это даже не... слово «травмировать» здесь не подходит. Мы не хотим делать акцент на соревновательном факторе. Один из наших активистов фактически объявил на заседании жюри: олимпиада по математике – это соревнование не между людьми, а соревнование людей с вечностью.
>
> Н.К.: В целом, детям свойственна соревновательность. Так, четырехлетний мальчик может сказать незнакомой девочке: давай посмотрим, кто первым добежит до столба. Они с удовольствием участвуют в таких соревнованиях. Эта естественная тенденция ребенка к состязательности используется в нашей олимпиаде. Дети могут даже не знать, что им нравится математика, но им интересно соревноваться. И мы оглянуться не успеем, а они уже познакомились с математикой, и она им понравилась. Но нужно помнить, что математика – это не соревнование.

Сергей Маркелов – один из наших активистов – удивительный человек, который умеет придумывать совершенно невероятные задачи, - однажды заявил на заседании жюри: олимпиада по математике – это праздник, поэтому здесь не должно быть синусоид! (синусоида как символ школьной рутины). А олимпиада по математике – это не состязание людей друг с другом, а состязание с вечностью. Мы можем соревноваться с Архимедом: он предложил задачу, и мы ее решаем. Здесь мы все вместе находимся на одной стороне, а на другой стороне не хватает каких-то знаний. Знания конкурируют с их отсутствием и захватывают все новые территории. Но тот факт, что люди также соревнуются и друг с другом, вторичен. Если аспект состязательности начинает выходить на первый план, а математика становится фоном, то, по моему мнению, происходит искажение целей. Несравненно проще провести олимпиаду, чем год за годом систематически работать с людьми и чему-то их учить. Но на наших глазах происходит серьезное смещение ценностей (Губайловский и Костинский, 2004).

Вот почему, на мой взгляд, довольно проблематичным является отношение к сверстникам как к более или менее достойным исходя из конкурентоспособности в области математики. Еще хуже – пренебрежительное отношение, злобные, унизительные высказывания об учениках как о «бездарях», «бесталанных» и пр. в области математики. Нельзя сказать, что недоброжелательная конкуренция была постоянным явлением в нашем классе, но она была характерной для небольшой группы ребят. Это уравновешивал тот факт, что, помимо одаренности в области математики, мои одноклассники обладали и другими талантами, поэтому математическая конкуренция была довольно ограниченной и сдержанной. Некоторые из них серьезно занимались музыкой (например, Ася Белага), другие писали стихи (например, Олег Глушко), кто-то писал триллеры (например, Алексей Желяев), другие одноклассники участвовали в диссидентском движении (например, Володя Музыковский и Николай Уханов), у некоторых был талант к спорту (например, у Паши Шабурова), а у кого-то – дар доброты (например, у Иры Сегаль, Иры Герцевой и Нади Касьяновой) и пр.

Противотоки эгалитаризма и взаимного уважения также были достаточно сильны. Так, мой одноклассник Алексей Рябинин в интервью признал, что, по сравнению с его предыдущим опытом в одной английской спецшколе Москвы, в нашем матклассе люди очень уважительно относились друг к другу, вражды не было совсем. По его словам, на уроках английского языка в предыдущей школе обычным явлением были физическая и вербальная агрессия со стороны одноклассников, сплетни, издевательства, и он сожалел, что принимал в этом участие. В нашем классе он ощутил, что освободился от этого. К сожалению, я мог лишь частично согласиться с ним. В моей прошлой школе также было немало неприятных явлений: дети дрались, обзывались, «дружили против» кого-то, даже были случаи травли на сексуальной почве со стороны сверстников, жестокого обращения и запугивания, а в нашем матклассе такого просто не происходило. Тем не менее, у нас обычным делом была недоброжелательная конкуренция. Насколько я помню, наши учителя никак не поддерживали это явление. В ходе интервью Ира Казакова (в девичестве Герцева) высказала интересную гипотезу о том, что источником такой конкуренции могла быть жизненная философия родителей некоторых наших одноклассников.

В выпускном 10-м классе несколько наших одноклассников (Ира Герцева, Олег Казаков и Алексей Рябинин) провели опрос общественного мнения о том, что мы думаем о нашем классе и каковы наши будущие устремления. К моему удивлению, один из одноклассников сообщил об отчуждении и ощущении, что никто в классе не хотел с ним общаться. У нас в классе сформировалась более или менее стабильная группа ребят, которые вместе ходили на разные мероприятия, приглашали друг друга на вечеринки, на которых они употребляли алкоголь и случалось многое другое. Я был на периферии этой группы, изредка посещал некоторые мероприятия и вечеринки. Другие одноклассники существовали вне этой группы, у них были друзья вне школы. Некоторые ученики в нашем классе были, судя по всему, одиночками. Я не знаю, насколько велико было отчуждение у нас в матклассе и насколько конкуренция в области математики (и, в частности, недоброжелательная конкуренция) в принципе способствовала такому отчуждению.

В нашем матклассе была девушка, над которой постоянно издевались несколько моих одноклассников. Они часто говорили гадости прямо ей в лицо или за ее спиной. Я не мог понять, почему это происходило. Мой одноклассник Олег Казаков предположил, что источником агрессии были двое наших одноклассников, которые учились с ней в одном классе в предыдущей школе: они принесли эту вражду из прошлого. Однако было непонятно, почему мы не прекратили эти процессы у нас в классе. В одном из моих интервью я спросил другого одноклассника, почему некоторые наши одноклассники так ужасно вели себя по отношению к ней. Он ответил: «Она постоянно задавала странные вопросы. Например, мы собираемся куда-нибудь вместе, и она могла спросить: «Посмотрите на этот автобус. Представьте, что там полно детей, и автобус несется на полной скорости вниз по склону, а за рулем нет водителя. Как прыгнуть под автобус, чтобы он остановился?». Это было типично для нее – говорить такие вещи. Я думаю, что человек с таким жертвенным отношением просит назначить его жертвой (смеется)». Мне всегда было жаль ее, и я не знал, как ей помочь, кроме как предложить свою дружбу. Некоторое время мы были друзьями, но долго наша дружба не продлилась, вероятно, потому, что жалость редко является хорошей основой для настоящей дружбы. Хотелось бы, чтобы я с большим принятием отнесся к тому, что она была не такой, как все. Мне бы хотелось, чтобы мои одноклассники были более открыты по отношению к людям, которые отличаются от остальных и иногда задают «странные вопросы». Алексей Саверченко также рассказывал, как издевались над одним из наших одноклассников: его постоянно обзывали «прыщом». Я этого не помню.

Мне кажется, что частью непреднамеренной, неявной учебной программы во всех советских школах было обучение учащихся враждебности, по крайней мере, по отношению к некоторым из учителей в качестве сопротивления агрессивным проявлениям власти со стороны учителей. Я заметил, что на встречах выпускников советских школ наиболее популярные темы – коллективное сопротивление, травля или даже неприкрытые попытки унизить ненавистных и нелюбимых учителей. Обычно причинами коллективных нападок учеников на учителей бывали воспринимаемые или ощущаемые детьми тупость, недалекость, несправедливость, дурной характер, бесчувственность, слабые характеристики учителя как педагога, скука на уроках, злоба, предвзятость и т. п. По моим личным воспоминаниям, чаще всего нашим коллективным атакам подвергались двое из моих школьных учителей. Первым был учитель начальной военной подготовки (НВП). Несмотря на то, что он был майором и носил внушительную форму военного офицера, он был довольно безобидным и казался нам недалеким, скучным, педагогически немощным. Он читал довольно примитивные лекции об «американских империалистах и милитаристах» и постоянно пугал нас ядерным холокостом. Мы учились в спецшколе и отлично разбирались в математике и естественных науках, поэтому нередко развлекались, задавая ему технические и научные вопросы, на которые он не знал ответов, но не хотел этого признавать и скармливал нам идеологические клише, которые вызывали у нас только смех. Но иногда наши шутки над ним бывали не столь безобидными. Однажды мой одноклассник принес будильник и спрятал его под учительским столом. В начале очередного скучного урока мы сообщили учителю, что американские империалисты заложили бомбу в нашем классе. Конечно, он нам не поверил. В какой-то момент урока мы начали считать с десяти до нуля, объявив, что сейчас произойдет взрыв. Но ничего не произошло (кроме того, что весь класс хохотал до упаду). Через десять минут мы повторили представление, и на этот раз сработал будильник. Учитель не ожидал резкого звука и изрядно испугался. В другой раз мои одноклассники запустили самодельную реактивную ракету у него на уроке. Ракета не взлетела, но вертелась на полу в яростном танце, испуская огромный поток черного дыма. Учитель НВП попытался прекратить это и решил наступить на ракету, но это была непростая задача из-за непредсказуемости ее движений. Наконец, ему удалось прижать ракету ногой, но потом он ее отпустил, и ракета стала метаться с удвоенной силой, потому что черный порох выделял кислород при горении, и его нельзя было затушить, когда был перекрыт доступ к воздуху извне. Мы все знали об этом факте, и беспомощность учителя, интерпретируемая нами как глупость, в тот день нас очень развлекла. Мы смеялись до слез, хотя некоторые девочки в нашем классе сочли, что это было слишком унизительно по отношению к учителю, им было жаль его. При этом их сострадание улетучилось, когда он отправился жаловаться в администрацию школы.

Конечно, администрация школы часто наказывала нас за издевательские шутки по отношению к учителям. Однако у нас было неписаное правило трех «Н»: никогда не доносить на одноклассников, которые подготовили розыгрыш; никогда не раскрывать их имена на допросах и несмотря на угрозы со стороны администрации школы; никогда не обвинять того, кто возглавил розыгрыш, в том, что наказание, даже самое суровое, понесли все в классе. Информирование руководства было мощным социальным табу, которое, вероятно, было глубоко укоренено в исторической памяти советского человека о сталинских чистках.

Влияние математического образования Константинова на выпускников математической школы Константинова

После окончания математической школы № 91 мы с одноклассниками пытались поступить на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова (мехмат). Некоторые из них были евреями по национальности, как я, другие – русскими. Евреи знали, что из-за государственного антисемитизма у них не было возможности поступить в МГУ: абитуриентам-евреям не давали возможность успешно сдать вступительные экзамены в МГУ, независимо от их знаний. Мои родители пытались отговорить меня от поступления на мехмат, но, как и некоторые мои одноклассники-евреи, я решил убедиться в том, что у меня действительно не было шансов. Я ожидал, что не сдам экзамен по русскому языку, потому что литература и сочинение – субъективные предметы, имеют идеологический характер, и поэтому ими легко манипулировать. Еще одной возможностью провала был устный экзамен по математике, потому что после него не оставалось следов на бумаге. Однако, к моему удивлению, я провалил ПИСЬМЕННЫЙ экзамен по математике; к удивлению, поскольку математика – это «точная» наука, и письменный экзамен оформляется на бумаге. Во время апелляции меня допрашивали и унижали сотрудники МГУ, задачей которых было не допустить поступления евреев в университет. У меня были «нечистые плюсы» по всем пяти задачам: плюс-минус, плюс-точка, минус-плюс (в последней задаче, которую я знал, что не решил). «Нечистые плюсы» означали, что задача не была решена полностью и потому не учитывалась. Позвольте мне привести один пример математической задачи, которая была оценена на «плюс-минус».

Это была задача по геометрии по теме «прямоугольные треугольники». Я написал в решении, что «согласно теореме Пифагора, квадрат катета прямоугольного треугольника равен квадрату гипотенузы минус квадрат другого катета». Экзаменатор вычеркнул слово «согласно» и заменил его на предлог «по». На апелляции мне сказали, что: 1) я не знаю правильной формулировки теоремы Пифагора и 2) недостаточно хорошо владею русским языком, чтобы понимать семантическую разницу между «согласно» и «по». Я помню, как еврейская девушка за соседней партой внезапно вскочила с места (она сидела, как и я, между двумя преподавателями), выкрикнула им: «Вы останетесь жить в этой дерьмовой стране, а я буду учиться в Сорбонне!» и выбежала из аудитории. Я думаю, что она была права, назвав расистский Советский Союз «дерьмовой страной», и надеюсь, что ей удалось эмигрировать из СССР во Францию, а ее мечта об учебе Сорбонне стала реальностью. Все мои одноклассники-евреи потерпели неудачу, все мои русские одноклассники поступили в вузы.

Я поступил в Московский автомобильно-дорожный институт (МАДИ), потому что туда принимали евреев. Поступил на специальность «компьютерные науки». Его закончили мой старший брат и два двоюродных брата. Там учились на старших курсах оба моих учителя – Веня Дардык и Андрей Печковский. Веня рассказал мне, что когда он и некоторые другие ребята из математических школ, из которых евреями были многие, но не все, не смогли поступить в МГУ в 1973 году, Константинов посоветовал им пойти в МАДИ. Когда их всех приняли в МАДИ (на тот же факультет информатики), Константинов договорился с кафедрой математики МАДИ о том, чтобы освободить эту группу студентов от посещения курсов по математике. Вместо этого Константинов организовал для них неформальные занятия по математике, пригласив туда преподавать своих друзей, профессоров математики из МГУ. К сожалению, эти неформальные занятия по математике продлились лишь один год, потому что, как сказал мне Веня, многие студенты не справлялись со всем объемом программы. Несмотря на их неформальный характер, занятия были традиционными по формату – в виде лекций. В интервью, которое дал мне Константинов, он сказал, что его педагогический эксперимент по созданию в МАДИ неформальных занятий по математике для студентов из математических школ провалился. Однако он был прав только отчасти.

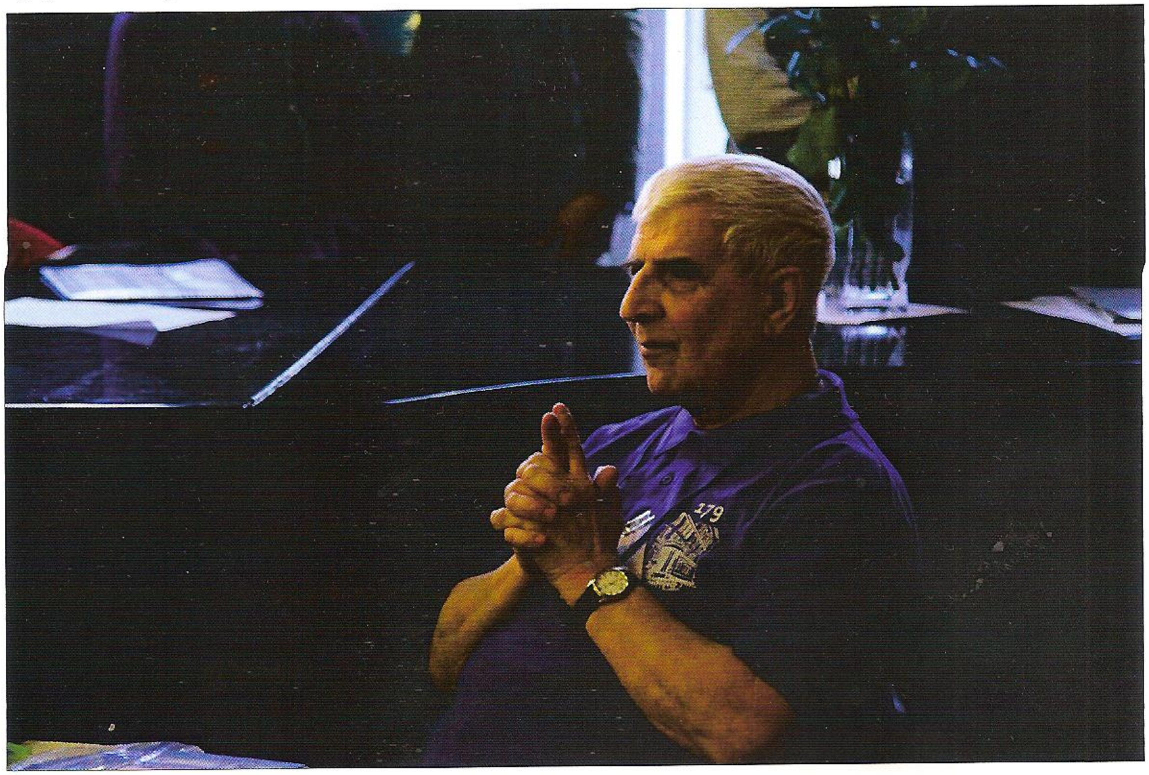
Осенью 1977 года, когда мы, окончив школу, поступили в вузы, наши учителя математики Веня и Андрей и их друзья из института организовали неформальный математический клуб, работа которого была посвящена искусственному интеллекту (ИИ). Мы встречались вечером по субботам после занятий и обсуждали ИИ. Так, Юлий Барышников рассказывает о работе нашего клуба ИИ: «Что касается замен Маркова, я помню, как мы долго беседовали с одним другом Вени и Андрея о том, как создать искусственный интеллект (в то время мы серьезно планировали поработать с этой темой). Идея заключалась в том, чтобы брать случайные заменители (объекты) и практиковаться до тех пор, пока кирпич с крыши не упадет на землю (имитируя гравитацию). Не прошло и 40 лет, как технологии глубокого обучения почти обратили наши сказки в реальность... После математического клуба, в котором мы занимались искусственным интеллектом, мы вместе с Матвеем Соколовским, моим одногруппником, выпускником 57-й математической школы, организовали математический кружок для наших сокурсников в МАДИ, которые интересовались математикой. Мы пригласили преподавателя математики из МАДИ, который давал нам интересные прикладные математические задачи по автоматизации светофоров с целью организации более эффективного дорожного движения. В то же время мы с Матвеем обратились к администрации МАДИ и добились (потратив немало сил) свободного посещения, о чем просил и Константинов несколькими годами ранее. В освободившееся время мы ходили на лекции по математике на мехмате МГУ. В университете некоторые преподаватели математики, например, лауреат Ленинской премии Владимир Арнольд, проявляли сочувствие и поддержку по отношению к интересующимся математикой молодым евреям.

В 1978 году, когда я учился на втором курсе МАДИ, один из моих бывших одноклассников пригласил меня в подпольный университет – Еврейский народный университет (ЕНУ), где преподавали известные советские профессора из МГУ и других престижных университетов (в том числе русские и не-евреи по национальности), которые героически сопротивлялись антисемитизму, насаждаемому в советском обществе государством. Однако в июле 1982 года КГБ уничтожил университет для студентов-евреев. Один из организаторов ЕНУ – Белла Абрамовна Субботовская, по-видимому, была убита КГБ осенью 1982 года. Два других организатора – Валерий Сендеров, учитель математики московской физико-математической школы № 2, и Борис Каневский – были арестованы, заключены в тюрьму, а позже отправлены в ссылку. Я посещал ЕНУ в течение двух лет. В 1979 году мои интересы сместились от математики и физики к философии, психологии и педагогике. Позже, после распада СССР, в начале 1990-х, Николай Николаевич Константинов организовал свой собственный университет – Независимый Московский Университет.

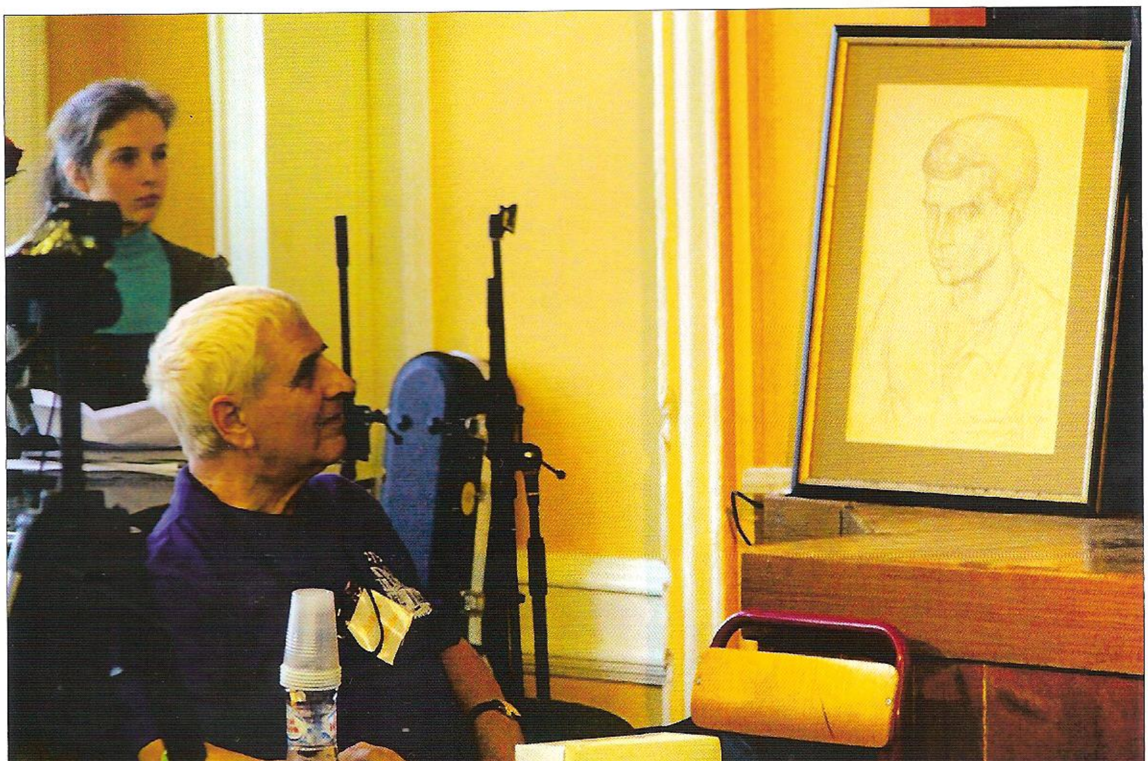
Многие (но не все!) из нас сохранили тесную связь друг с другом и с некоторыми нашими учителями, а также с другими выпускниками и учителями наших математических школ. Математическая школа создала устойчивую среду общения, сообщества и культуры выпускников и учителей. Некоторые выпускники поженились и создали семьи. Как сказал сын моего одноклассника Жени Емелина об одноклассниках и друзьях своего отца: «Вы странные. Вы собираетесь вместе, выпиваете, а потом начинаете обсуждать математические задачи» (беседа с Леней Розенбаумом, 7 декабря 2016 г.). Многие из их детей сами учились в математических школах. Многие выпускники математических школ стали профессиональными математиками и занимаются теорией или прикладной наукой. Как рассказывал Константинов, «я помню, как однажды группа [выпускников математических школ] собралась вместе. Там было много незнакомых людей, и одного парня спросили, что он закончил. Он начал отвечать, в каком институте учился. «Нет-нет! Какую [математическую] школу вы закончили?» Не имело значения, какой институт (то есть университет) он окончил. Вот какое было отношение». Алексей Рябинин сообщил мне, что главное, чему он научился в нашей математической школе № 91, – это любви к людям.

Перевод с английского: С. Кулешов, В. Имайкин, Е. Лагутина.

Автор фото: Якушкин П.А.



08.02.2012 Юбилей. 80 лет



08.02.2012 Юбилей.
Константинов и его портрет работы Вильяма Враныча (одноклассника Н.Н.)

26.05.2012

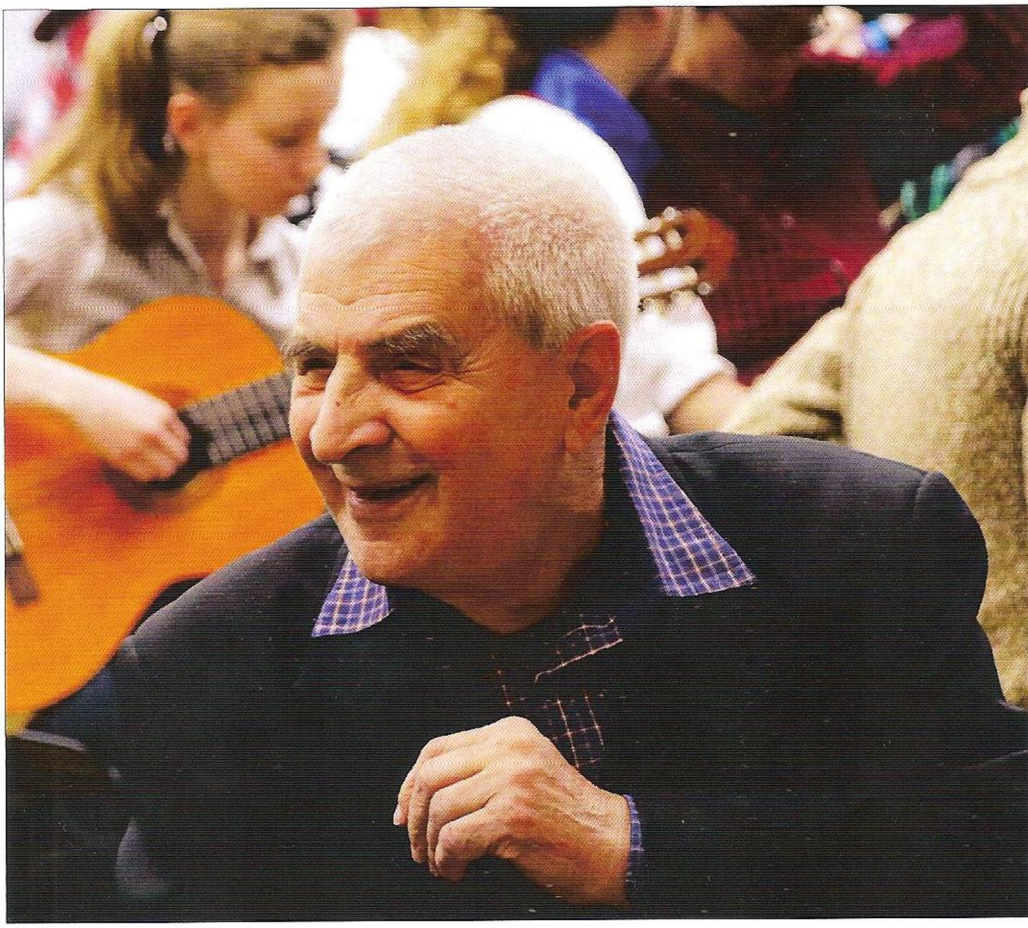
Последний звонок в школе 179. Выпускники класса НикНика

26.05.2012

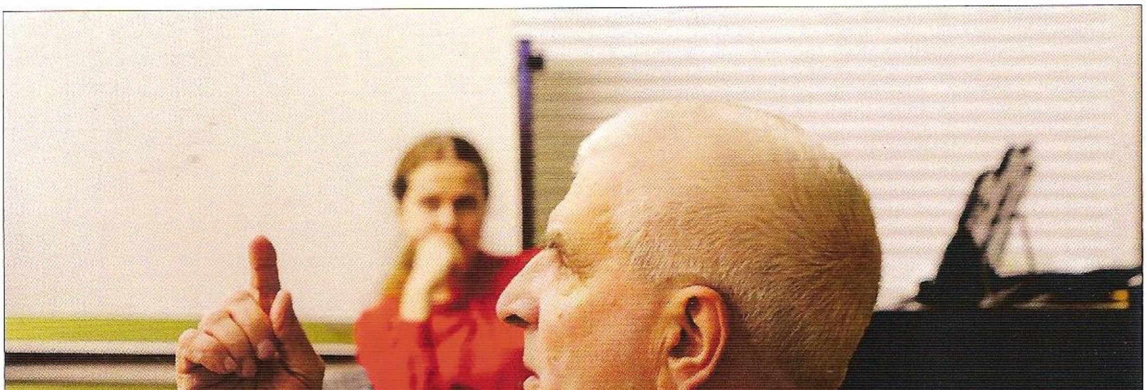
Последний звонок. На крыльце 179 школы

01.03.2014 Масленица в школе 179

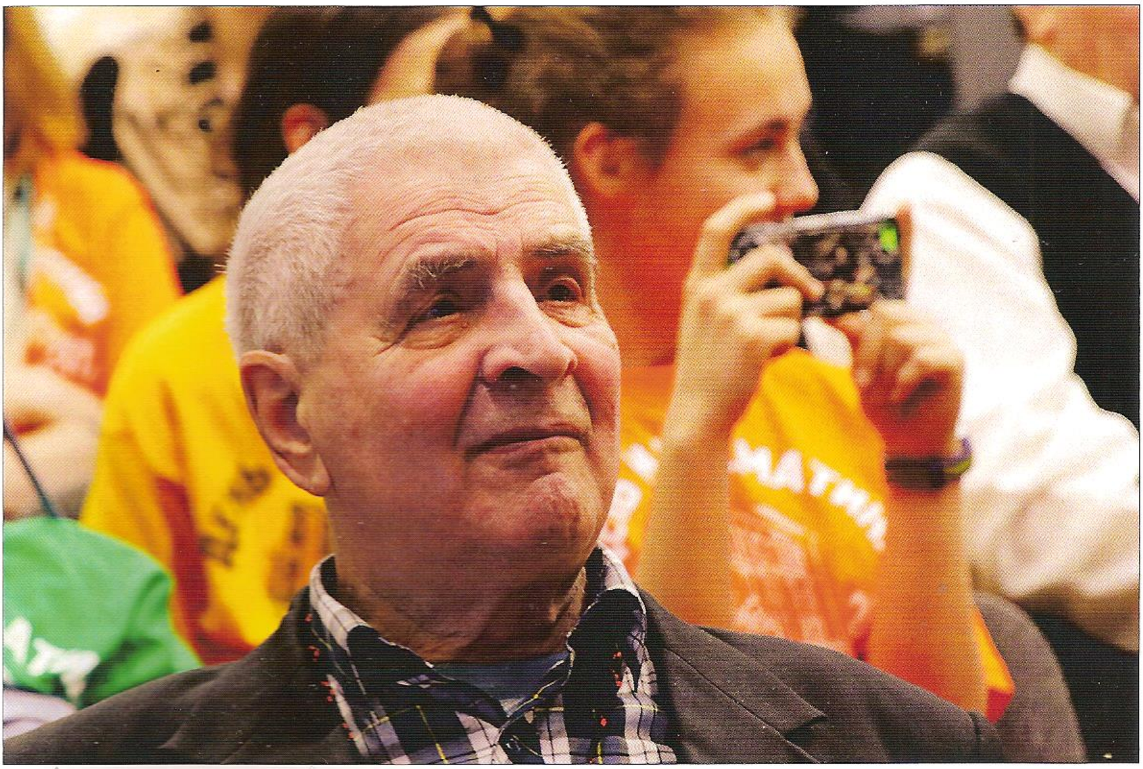
01.03.2014 Во время масленицы во дворе школы



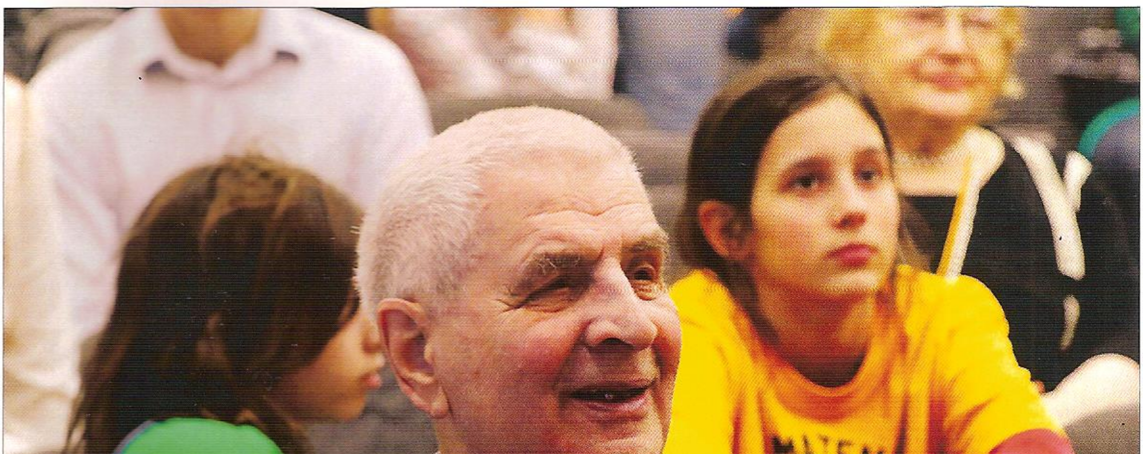
29.12.2016 Новогодний капустник в школе 179



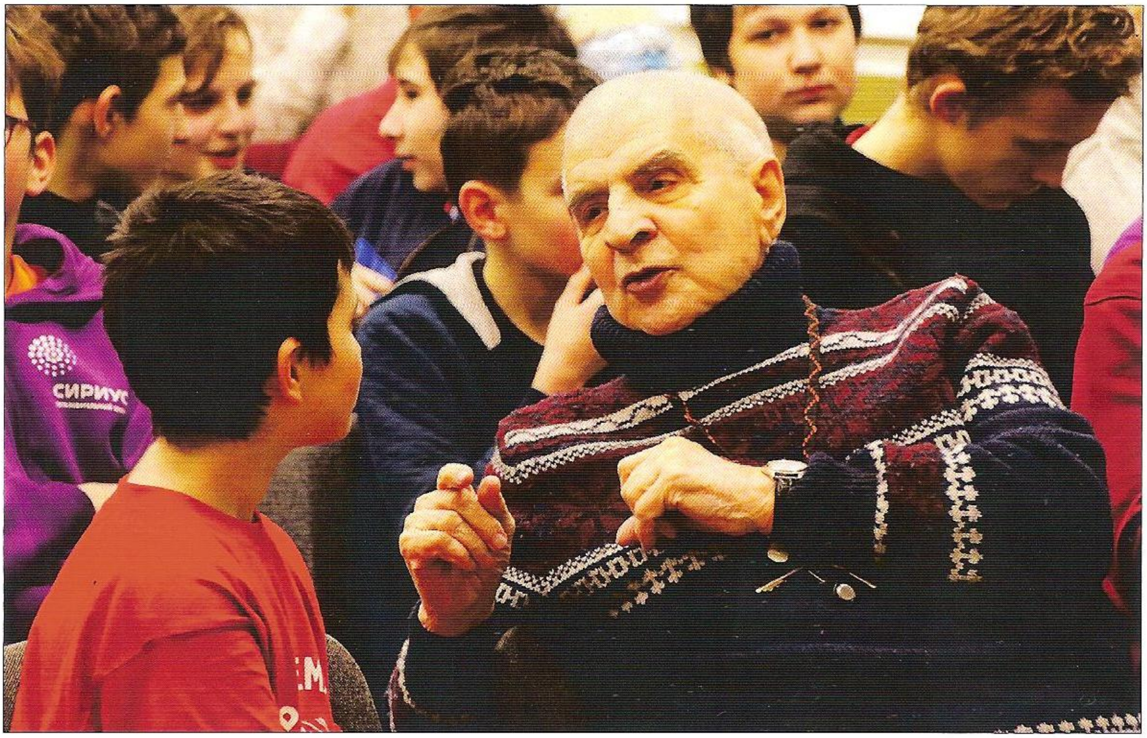
18.02.2017 Юбилей.
85 лет. Константинов рассказывает



18.02.2017 Юбилей.
Ученики 179-й поют щербаковского Трубача



18.02.2017 Юбилей. Во время концерта.



17.02.2018 День математика

17.02.2018 День математика.
С Юрой Лысовым