Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование» .
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»
Выпуск 1 (04), февраль 2020 г.

Москва, 2020

Константиновский сборник

Приложение к журналу «Математическое образование».
Серия «Образование: история, персоналии, проблемы»

Выпуск 1 (04), февраль 2020 г.

Москва, 2020

Приложение к журналу “Математическое образование”

ISSN 1992-6138

Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Составитель Комаров С.И.

Выпуск 1 (04), 2020 г.

В настоящем выпуске представлены: заметка учащегося ГБОУ Школа № 179, продолжение перевода статьи Евгения Матусова об авторской педагогике Н.Н. Константинова, репринтные материалы о математических классах в Москве в период их становления, а также информация о вновь созданном Фонде содействия образовательным проектам “179”.

Адрес электронной почты для материалов: matob@yandex.ru

Подписано в печать 09.02.2020. Объем 2,5 п.л. Тираж 300 экз. Цена свободная.

Константиновский сборник

Приложение к журналу “Математическое образование”

Выпуск 1 (04), февраль 2020 г.

Содержание

Новое доказательство формулы объема пирамиды

Александр Кудрявцев

В старших классах школы № 179 обязательным предметом является проектная деятельность. Ученики выполняют мини-исследования в совершенно разных областях знания. Один из результатов работы ученика 11 математического класса Александра Кудрявцева приведен в этой заметке. Здесь с помощью классического принципа Кавальери доказывается формула объема пирамиды. Доказательство, однако, отличается от стандартного изящной геометрической конструкцией. Руководитель работы Стрелкова Наталия Павловна.

Мы хотим доказать, что для произвольной пирамиды $V = \frac{1}{3}Sh$. Сразу же отметим, что достаточно доказывать это утверждение для пирамиды с любым фиксированным основанием площади S. Действительно, площади сечения любых двух таких пирамид плоскостями, параллельными основанию, будут равны, а значит, по принципу Кавальери равны и объемы, рис. 1.

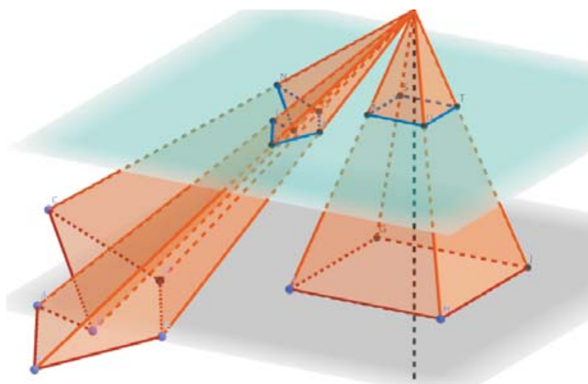


Рис. 1

Мы будем доказывать это утверждение для пирамид с прямоугольным основанием (например, можно взять как основание прямоугольник размера $1 \times S$). Заметим, что параллелепипед объема $2Sh$ можно разрезать на шесть прямоугольных пирамид с общей вершиной, которая совпадает с центром параллелепипеда, рис 2. Мы докажем, что объемы этих пирамид равны.

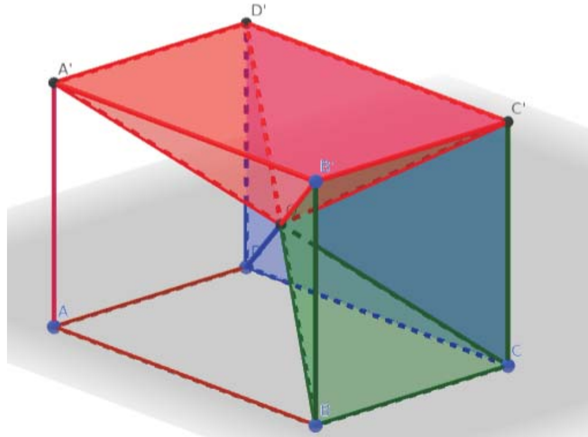


Рис. 2

Итак, осталось доказать, что три пирамиды на рис. 2 (красная, синяя и зеленая) равновелики. И это снова можно сделать по принципу Кавальери! Например, докажем, что зеленая пирамида равновелика красной. Каждое сечение каждой из этих пирамид плоскостью, параллельной $A'BCD'$, — это равнобокая трапеция (возможно вырожденная, т.е. треугольник или отрезок), и в силу симметрии относительно XY — пересечения нашей плоскости с $AB'C'D$ — они равны (рис. 3), а значит, равновелики!

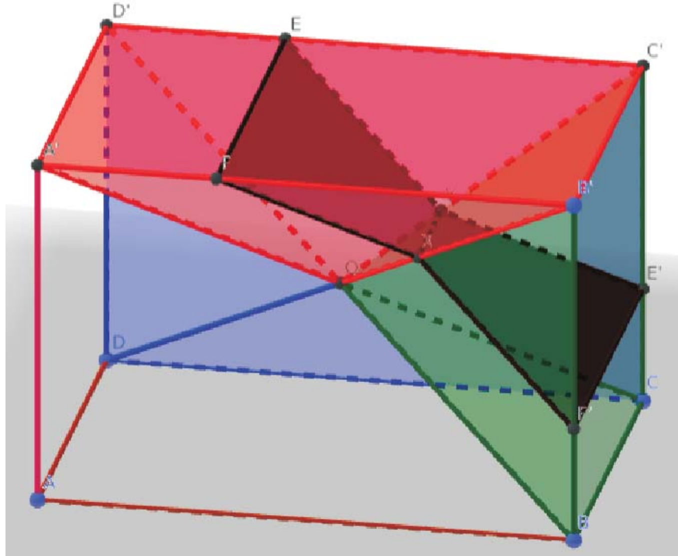


Рис. 3

Получается, что эти две пирамиды — красная и зеленая — равновелики, а значит, и все шесть пирамид деления параллелепипеда равновелики. Но их суммарный объем равен $2Sh$, значит, объем каждой отдельно взятой пирамиды равен $\frac{1}{3}Sh$. □

Кудрявцев Александр,
учащийся 11В класса
школы № 179 г. Москвы.

Авторская математическая педагогика Николая Н. Константинова для людей с крыльями

Евгений Матусов

Продолжение перевода статьи “Nikolai N. Konstantinov’s Authorial Math Pedagogy for People with Wings”, Journal of Russian and Est European Psychology, Vol. 54, No 1. 2017. Начало опубликовано в Константиновском сборнике № 2, февраль 2019 г.

Часть II. Образовательная философия авторской математической педагогики Константинова

В моем анализе инновационная авторская педагогика Константинова включала, по крайней мере, четыре основных, связанных между собой преобразования традиционной педагогики:

1. *Цель обучения*: переход от социализации учеников в математической практике как цели образования к стремлению дать «крылья» ученикам: их самореализация, самовоплощение, самовдохновение, которые могут происходить или не происходить в математике.

2. *Руководство*: переход от лекций учителей и упражнений учеников в качестве основной формы руководства к ученикам, которые решают новые задачи, и учителям, которые проверяют решения учеников вместе с ними. Вкратце, используя терминологию Бахтина, это переход от математики как “авторитарного слова” к математике как “внутренне убедительному слову” (Бахтин, 1975; Matusov and von Duyke, 2010).

3. *Среда обучения*: переход от принудительных заданий, подтверждаемых итоговой оценкой (аттестацией), к образовательной среде со свободным выбором, в которой ученики могут свободно участвовать или не участвовать в целевых активностях и свободно выбирать задачи для решения. По сути, это переход от преподавания как основной формы руководства к поддержке самодидактического обучения учеников.

4. *Педагогика*: переход от технической педагогики, основанной на педагогических методах и стратегиях, гарантирующих усвоение учащимися заранее заданной учебной программы, к авторской педагогике, основанной на педагогическом авторстве и самообучении учеников.

Цель образования

Отвечая на вопрос о математическом уровне, которого достигают его ученики, А. Леман (последователь методики преподавания Константинова в одной из математических школ) сказал: “Мы не учим людей быть математиками — мы учим их быть свободными” (Ilyashenko and Sossinsky, 2010, p. 38). Когда во время нашей беседы с Константиновым я спросил его о цели и главной ценности его авторской педагогики, он не сразу смог ответить. Я предложил ему озвучить свои соображения на этот счет, чтобы вдохновить его, и ему понравилась эта идея. Я говорил о том, чтобы дать студентам возможность почувствовать себя авторами, как в математике, так и во всем остальном. Константинов внимательно слушал, а затем перебил меня, высказав другую метафору. Используя расхожее русское выражение, он сказал, что его, как педагога, интересовали “люди с крыльями”. Мне кажется, что эта русская метафора может отсылать к древнегреческому мифу об Икаре, который соорудил крылья, чтобы полететь к солнцу. В любом случае это русское метафорическое высказывание относится к самореализации, самовоплощению, самовдохновению, творчеству и трансцендентности человеческого бытия, природы и культуры как таковых. По словам Константинова, эта самореализация не обязательно должна быть в математике, а может случаться и в других областях человеческой деятельности, интеллектуальной или не нет. Он привел несколько примеров “нематематических крыльев” у своих учеников математической школы, которые он ценил:

НК: У нас в математическом классе был один парень, эксперт во всем, но абстрактная математика его не интересовала. Таким он был. Затем, когда он закончил школу, он поступил в МГТУ им. Баумана. Но он сделал нечто очень необычное. Его отец был также мастером на все руки. Он построил дачу под Москвой настолько хорошую, что она не уступала их московской квартире. Поэтому, когда вся семья, как обычно, переехала в Москву к первому сентября, этот парень, Тимофей, сказал, что не хочет в Москву, и лучше останется на даче. Его родители не возражали, и он жил на даче один. Он варил себе картошку, но пользовался полной свободой. Он нашел брошенную, сломанную машину на какой-то свалке, отремонтировал ее и стал на ней ездить. Он также подружился с местной полицией. Во-первых, все его документы были в порядке. Во-вторых, если у полицейского проблема с машиной, а Тимофей находится где-то рядом, то он сразу же починит ее. Поэтому полиция относится к нему с большим уважением. А теперь он нашел другую машину, тоже брошенную. Он уже отремонтировал ее и собирается ездить на ней. Как видите, его образ жизни не такой, как у обычных математиков. Во всяком случае, тот факт, что он не учил математический анализ, не послужил причиной для его учителя попытаться выгнать его из школы. Он (его учитель) был снисходителен к этому. Потому что это был особенный человек очень высокого уровня. И у меня есть пара других примеров. У нас также был ученик, кстати, он был в моем классе, который тоже не решил ни одной задачи по анализу. Но он занял первое место в Москве в конкурсе на знание испанского языка, и теперь помогает устанавливать контакты с испаноязычными странами. Итак, должны были его выгнать или нет?

ЕМ: На самом деле, мне было бы интересно узнать, каковы ваши ценности. Если математика не важна, то что важно? Как бы вы это определили?

НК: Я не знаю; я просто решаю этот вопрос в конкретной ситуации. Но чтобы у меня была какая-то теория на этот счет, у меня ее пока нет.

ЕМ: Позвольте мне предположить кое-что на основании того, что я услышал, а вы скажете, так ли это на самом деле.

НК: Давайте попробуем.

ЕМ: Мне кажется, что вы сосредоточены на авторе. Это может быть автор в математике или в каких-то прикладных вещах, когда что-то делается вручную. Или авторство в языке. Вы просто заинтересованы в авторстве. В английском есть слово "агентность", а в русском ближе — "автор". В качестве альтернативы может быть "талант".

НК: Ну, я бы использовал другое слово. Итак, мы знаем, кто пришел к нам на работу. Очень хороший парень, все было отлично. Но позже, когда мы попытались оценить этого человека, я сказал, что мне все в нем нравится, но я не вижу у него крыльев. Так что слово "крылья", на мой взгляд, более уместно.

ЕМ: Другими словами, "человек с крыльями"! Это своего рода творческое авторство. Творческая личность с инициативой.

НК: Да, что-то в этом роде.

ЕМ: Спасибо, это очень хорошая метафора.

НК: Могу я привести еще один пример? Очень талантливый человек. Он уже окончил университет и преподает в школе. Вот что удивительно в этом парне. Он потрясающий трудоголик; он работает так много, что это трудно себе представить. Этому невозможно научиться у меня. Вот что ему нравилось: он выбирал задачи для учеников средней школы, например, с 3-го класса по 7-й. И начал выпускать журнал: вы, наверное, знаете журнал "Квант"[1]? Ну, он создал своего рода младший брат "Кванта" — журнал "Квантик"[2]. Он издает его, журнал продается в киосках, и им интересуются не только ученики средних классов. Пенсионерам тоже нравится его читать. Во всяком случае, он тратит огромное количество времени на "Квантик". И когда я однажды начал говорить среди своих друзей о крыльях — то, о чем я только что рассказывал вам, этот человек, Сергей, сказал: "Если бы у меня не было крыльев, вы думаете, стал бы я заниматься изданием этого журнала «Квантик»"?

[1] Научно-популярный журнал по математике и физике "Квант" (издается с января 1970 года) http://kvant.mccme.ru/
[2] Главный редактор журнала "Квантик" — Сергей Дориченко. (http:// kvantik.org/).

Это абсолютно верно. Благодаря своим крыльям он тратит массу времени на то, чтобы “Квантик” увидел свет.

В конечном итоге, полностью сформировавшийся человек с крыльями — тот, кто может найти в себе вдохновение на инициирование новых творческих начинаний, проектов и задач. Воспитание таких качеств предполагает особую педагогическую направленность. Константинов ценит школьников, которые любят учиться, страстно любят математику (или другую область деятельности), и которые упорно добиваются своего, несмотря на разочарование и случайные неудачи на пути в достижении своих интересов и увлечений (а не отличников и победителей престижных математических конкурсов). Мне кажется, что представление Константинова об идеальном ученике было реализовано при отборе воспитанников в математические школы. Все абитуриенты, которые не вылетели и дошли до конечной, шестой, стадии вступительных испытаний, зачислялись независимо от результатов экзаменов, т.е. того, сколько задач кандидат решил или не решил. Дело было не в количестве решенных задач, а в том, мог ли интерес ученика в математике сохраниться несмотря на разочарование от количества нерешенных задач. Идеальный ученик — тот, кто хочет учиться и способен “постоянно думать о нерешенной задаче”.

НК: Действительно, способных ребят не хватает. Но я думаю, дело не только в том, что нельзя научить каждого, очень важно, чтобы человек очень хотел научиться. Есть один известный учитель физики, который ведет семинар для взрослых, куда приходят физики и некоторые учителя. Однажды он задал им вопрос: “С какими учениками вы бы хотели работать — с отличниками учебы или с победителями олимпиад, с кем еще?” И почти все ответили примерно одинаково: не важно, отличник он или победитель олимпиады; важно одно — способен ли человек неотступно думать над нерешенной задачей. Потому что бывает, что человек очень способный, но у него нет этой неотступности. Тогда ничего не выйдет, ничего. Важно, чтобы интерес к этому возрастал в течение всего его детства. Но в школе часто этот интерес убивают, например, прививают людям страх к математике. (Борусяк, 2010).

Для Константинова идеальный ученик представляет собой сочетание дилетанта (от итальянского слова, которое можно перевести как “приятный”), того кто любит заниматься каким-то делом (например, математикой) и любит изучать его, а также того, кто способен преодолевать разочарование и неудачи, часто встающие на пути того, кто сталкивается с самостоятельной работой и решением математических задач (Anderson, 2010; Matusov and Brobst, 2013).

Как педагог может поддержать крылья в учениках?

Я спросил Константинова, как поддержать “человека с крыльями” и способствовать развитию его/ее “крыльев”. Константинов ответил, что рецепта для этого нет, но что у самого педагога должны быть крылья. Тем не менее, существуют педагогические и организационные условия, которые облегчают или мешают процессу развития “крыльев”.

ЕМ: Предположим, какой-то педагог хочет поддержать детей с крыльями. Как можно помочь людям, способствуя развитию их крыльев?

НК: Мне кажется, ученик сам по себе должен быть очень хорош — это самая трудная часть. Я не думаю, что тут есть какой-то алгоритм. Такой человек всегда отличается; какой тут может быть алгоритм? Ясно, что вы должны быть непохожи на других.

ЕМ: В России был философ по имени Владимир Библер, он назвал это “человеком культуры” (Berlyand, 2009; Bibler, 2009). То есть человек с крыльями — тот, кто делает то, что никто другой не делает, и очень хочет это делать. Он делает это не потому, что это можно продать, а потому, что не может жить иначе. Чтобы вернуться к нашему разговору о педагогическом институте, то, что убивает крылья в школе, — это вечно строгие правила: домашнее задание должно быть выполнено к пятнице; в противном случае вы получите неудовлетворительную оценку. Вы согласны с этим?

НК: Согласен. Когда нам впервые пришла в голову идея создать математические классы, Кронрод[3], который был одним из инициаторов, думал, что все это будет решаться областным (коммунистическим) партийным комитетом, хотя позже выяснилось, что этот орган не имеет к нашему делу никакого отношения. Поэтому он договорился с областным комитетом партии, что мы будем работать вообще без оценок. Но так не получилось, не вышло. Но идея такая была: для чего нужны оценки? Все прекрасно понимают, что можно жить без оценок.

ЕМ: Кстати, вот еще одно мое наблюдение: Веня и Андрей просто ставили всем "пятерки" в итоге.

НК: Да, они делали это именно для того, чтобы, по сути, отменить оценки.

ЕМ: Хорошо, кроме того факта, что у нас были страстные учителя, вроде Вени и Андрея, которые говорили, что оценки не нужны, домашние задания, нависающие над тобой, вредны, что еще вы обнаружили, что еще мешает формированию крыльев и что важно для их развития? Ограниченность по отношению к предметам: то, что вы рассказали о детях, которые не обязательно изучают математику. Это тоже ограниченность, когда вы смотрите на что-то одно и забываете, что мир богаче математики или чего-то еще. Это уже третий принцип. Что еще вы заметили?

НК: Вы знаете, сейчас в нашей школе происходит серьезный процесс бюрократизации, основанный на правилах, а не на авторских суждениях преподавателей.

(Разговор между ЕМ и НК, часть 1, 30 октября 2016 года).

Из этого разговора и других источников я могу вывести следующие принципы авторской педагогики Константинова для поддержки людей с крыльями:

1. Педагог сам должен иметь сильные крылья.
2. Не должно быть давления на учеников, которое мешает их интересам, переживаниям и порывам (т.е. "крыльям") путем создания педагогического режима выживания.
3. Педагогу следует избегать или саботировать оценки, которые постоянно создают давление.
4. Педагогу следует избегать такого режима выполнения заданий, который держит учеников под контролем и отвлекает их от того, что они по-настоящему хотят делать.
5. Педагогу следует избегать бюрократизации и того, чтобы руководствоваться правилами. Вместо этого педагог должен руководствоваться авторскими суждениями о том, что хорошо и что плохо в каждой конкретной ситуации, и брать на себя ответственность за принятие рискованных решений.
6. Педагогу следует избегать узкого взгляда на ученика, который не позволяет воспитанникам развивать крылья в более широкой или даже полностью другой сфере.
7. Педагогу следует направлять ученика в сторону постановки своих собственных задач и целей.

Предпочтение работать с детьми старшего возраста

Константинов настаивал на том, что его идеальные ученики должны иметь определенную добровольную приверженность некоторой области практики (например, математике) для того, чтобы крылья сформировали свой собственный авторский голос в этой практике. Для этого личность ученика должна быть достаточно зрелой, что часто начинается с подросткового возраста. Крылья юных учеников носят целостный, широкий, недифференцированный и не нацеленный на определенный предмет характер.

НК: Я могу только сказать, почему я не хочу работать с маленькими детьми... У меня про это же спрашивал в свое время Сергей Фомин (организатор математических кружков и олимпиад): "Почему вы не занимаетесь с 5-м, 6-м классом? Это такие благодарные ребята, они так все хорошо воспринимают". Я ему так ответил: "Когда у меня ученики 10-го класса, то даже если они чего-то и не знают, это в любом случае люди, у которых есть своя собственная шкала ценностей в жизни. А когда я занимаюсь с пятиклассником, я в лучшем случае увижу свою собственную отраженную шкалу ценностей. И поэтому он мне не очень интересен".

[3] Александр Семёнович Кронрод (22 октября 1921 года — 6 октября 1986 года) — советский математик. Основоположник создания направления искусственного интеллекта.
(https://ru.wikipedia.org/wiki/Кронрод,_Александр_Семёнович).

Возьмем историческую аналогию. Когда Бетховен начал учиться у Гайдна, то последний никак не мог понять: что интересного в этом ученике? Повторяет в точности то, что делает Гайдн. А вот когда Бетховен показал что-то свое, вот тут Гайдн заинтересовался. И понял, что это очень интересно.

Вымуштровать маленьких можно. Но есть другая сторона: у человека должны развиваться широкие интересы. Если их нет, то что он будет делать? Приведу такой пример. Однажды меня уговорили взять одного шестиклассника в Эстонию (в летний математический лагерь). Он там старался, был библиотекарем, и даже ходил на кружок по комбинаторике. Но было видно, что у него ум не созрел. Каких-то простых вещей не понимал. Потом стал понимать, поступил в 57-ю школу, успешно окончил ее, и, казалось бы, все в порядке. Но после школы он не стал никуда поступать. Ему уже 30 лет, а он с тех пор так нигде не учится и не работает, причем такая жизнь его вполне устраивает. Ему ничего не надо. А родители изо всех сил старались, чтобы он развился побыстрее...

Мне кажется, что когда человека вынимают из естественной среды, то он может больше потерять, чем приобрести.

ЕМ: Но кружки для 6-го класса — это совсем другое. Это не то же самое, что шестиклассник идет на кружок 10-го класса.

НК: В.Л. Гутенмахер (популяризатор математики, ныне живущий в Соединенных Штатах), когда его дочь училась в 91-й школе, стал вести там кружок для маленьких по геометрии. Я спрашиваю: "Чем вы там занимаетесь?" И он отвечает: "Конечно, то, что мы там занимаемся геометрией, это условность. На первом занятии мы обсуждали вопрос: что общего между словом «циркуль» и словом «цирк»?". Я думаю, что это как раз правильно. Чем меньше люди, тем у них интересы рассыпаннее. Ребенок будет писать формулу, а его заинтересует карандаш, которым он эту формулу пишет. Не надо пытаться вести для них сконцентрированный курс. А вот такие занятия, где обсуждается, что общего между циркулем и цирком, очень подходят для этого возраста (Константинов, 2002, с. 47–48).

ЕМ: Я прочитал ваши очень интересные размышления о том, почему вы не любите работать с младшими школьниками. Например, почему вы предпочитаете работать с 7-м классом, а не с 3-м или 4-м классами. Я не знаю, когда было то интервью, которое я прочитал. Вы можете что-нибудь добавить к этому?

НК: Ну, мне кажется, что им нужен несколько иной подход в образовании. Оно должно быть менее узким.

ЕМ: Более интегрированным? Более целостным?

НК: В нем должны быть самые разные вещи: почему кошка мяукает, почему у мухи шесть лап или почему перегорает лампочка. Одним словом, очень широкий круг вопросов, которые дети изучают поверхностно. Более глубокое изучение должно происходить на уровне школьников старшего возраста. (Разговор между ЕМ и НК, часть 3, 3 ноября, 2016 года).

Для меня позиция Константинова в отношении младших школьников предполагает, что их учебная программа должна быть еще более открытой и спонтанной, чем программа для старших классов. Учебный план, вероятно, не должен тематически определяться одним предметом, но должен позволять свободные междисциплинарные запросы. Это не дает ученикам в раннем возрасте посвящать себя какому-либо предмету, к чему младшие школьники часто не готовы (Lobok, 2012).

Руководство учителя: проверка решений математических задач учеников в течение лекции

Одним из главных изменений, которые Константинов внес на ранних этапах, был отказ от лекций и упражнений в качестве основной формы занятия. Вместо этого основной формой занятия стали решение математических задач учащимися и проверка учителями решений вместе с учениками. Математические задачи отличаются от упражнений, поскольку математические задачи направлены на введение новых, возникающих понятий и идей, в то время как традиционные упражнения включают в себя применение понятий и идей, которые студенты изучают в ходе лекций. Например, в обычной школе учитель дает новую теорему, а затем доказывает ее перед учениками. Ученики должны понять и запомнить теорему, а затем использовать предложенные упражнения, чтобы правильно применить теорему. Наконец, учитель проверяет правильное понимание учащимися теоремы посредством устных и письменных математических заданий: воспроизведение доказательства теоремы и ее применения.

НК: Когда я задаю задачи, я всем раздаю листки с условием, чтобы человек видел написанный текст. Это лучше, чем если я буду писать что-то на доске, а они будут переписывать... У нас вообще есть презумпция: если лекция прочитана, это значит, что студенты ее усвоили. Но лекционная система изначально неэффективна, потому что кто-то быстро записывает, но ничего не понимает, кто-то отвлекается. А изучать все это люди будут только перед экзаменами. К тому же ошибочно представление о том, что сначала нужно наполнить голову знаниями, а потом только эти знания применять. Человек просто перестает воспринимать. В Высшей школе экономики на математическом факультете попробовали избавиться от этой ошибочности. Там человек читает лекции, и они сразу попадают в интернет. Кроме того, каждый студент там регулярно сдает решения задач. Материал у него по мере усвоения сразу становится рабочей лошадкой. (Леенсон, 2012).

Напротив, в педагогике Константинова ученики часто сталкиваются с новой теоремой в форме оригинальной математической задачи, которую они свободно выбирают, чтобы решить ее самостоятельно или в сотрудничестве с другими учениками. Ученики могут успешно решить эту задачу/теорему или нет. Когда ученик или группа учеников чувствуют, что они решили задачу/теорему, они сообщают об этом учителю по математическому анализу, который "принимает" решение учеников, внимательно выслушивая его детали, задавая проверочные вопросы и привлекая внимание учеников к самым интересным, творческим, оригинальным и красивым чертам их решения. В том случае, если ученики застряли, педагог направляет их на правильный путь. Руководство преподавателей матанализа часто предлагается в ответ на трудности, с которыми сталкиваются учащиеся, пытаясь решить задачу самостоятельно. Когда ученик успешно решает задачу/теорему, она становится новым инструментом ("рабочей лошадкой") для решения других задач/теорем, что делает задачу теоремой. Под "теоремой" я не подразумеваю классическую теорему, которые даются в традиционных учебниках по математике, но любую задачу, которая может стать инструментом для решения других задач. Столкновение с новой математической задачей/теоремой вызывает у ученика новый интерес, который приводит его или ее к углублению интереса в ней.

НК: ... естественный ход познания в математике такой, что человек заинтересовался какой-то проблемой, потом он начинает как-то углубляться в нее, но на лекциях же делают все наоборот: вы не успели даже узнать, чем эта задача интересна, а вам уже дают ее решение, читают теорему, вы не знаете, зачем она нужна, и потом ее надо выучить, потом еще одну, еще одну, и так пять лет. Но это же уже неправильно. (Привалов, 2012).

В педагогике Константинова математика всегда авторская, дискурсивная и "внутренне убедительная" (Бахтин, 1975; Matusov and von Duyke, 2010). Математическая истина устанавливается, определяется и контролируется не авторитетом учителя или учебником, или тестом, а самим учеником посредством убедительного дискурса в математическом сообществе с участием сверстников и учителей. Конечно, лекции тоже играют роль в его педагогике, но лекции часто были подчинены первичному процессу решения и отчета/проверки математических задач.

ЕМ: Николай Николаевич, я хотел бы спросить вас сейчас об истоках, и я уже много читал в ваших интервью об истоках авторской педагогики. Я знал, что эти математические кружки существовали еще до вас, но из того, что я читал, они были, в общем и целом, другими. Они были ориентированы больше на лекции. Правильно ли мое понимание?

НК: Они были другие, конечно. Они не были полностью посвящены решению задач.

ЕМ: Не могли бы вы объяснить, почему вы переключились с этой ориентированной на лекцию формы или с формы лекций и обсуждений на решение задач и их обсуждение?

НК: Я думаю, что традиции мехмата (механико-математический факультет МГУ) были здесь основным фактором. У меня был друг, с которым я сидел за одним столом, а его мать была учителем биологии. И поскольку она была учителем, пусть и биологии, она дала нам пропуск на посещение кружков в университете. А на кружках были лекции, в первую очередь. Первая лекция, которую я посетил, была лекция Яглома. Яглом прочел лекцию об индукции в геометрии. Были некоторые небольшие задачи по геометрии, в которых нужно было выяснить, на сколько частей диагональ делит многоугольник; количественные проблемы, решаемые по индукции. В любом случае, знаете, что потрясло меня на этой лекции? Яглом читал лекцию и иногда задавал вопросы школьникам, сидящим в первом ряду. Другими словами, он стоял у классной доски, а школьники сидели перед ним и слушали. И вот он говорит, обращаясь к залу: “Есть ли такая теорема?” И он формулирует некоторую теорему. А я был в университете впервые и думал: “Вот до чего мы дошли — профессор читает лекции в университете и не знает, какие есть теоремы”. Он спрашивает школьников, существует ли такая теорема. “Так, — подумал я, — он профессор и не знает теорем”. Я, конечно, отреагировал узколобым, схоластическим способом: он профессор, который должен знать все. И вдруг он говорит: “Вы не помните, есть ли такая теорема или нет? Ну, это не имеет значения, мы докажем ее сейчас”. И я был совершенно потрясен. Он не знает, существует ли такая теорема, но ему даже не нужно это знать. При необходимости он сам ее докажет, вот и все. Другими словами, было ощущение, что мы живем в совершенно другом мире. В школе ты должен был запомнить все, чтобы знать это. Но здесь, как оказалось, можно обойтись без запоминания чего-либо и все равно это знать.

ЕМ: Другими словами, знание здесь приходит через воспроизводство. Если мне нужно что-то узнать, я заново узнаю это, выведя это, а не вспоминая.

НК: Это о том, чтобы не запоминать все заранее, а затем использовать. Конечно, это совершенно другой подход.

ЕМ: Другими словами, схоластический подход, хороший схоластический подход, означает сначала понять и запомнить. А затем воспроизвести свое понимание — то, что вы запомнили. Здесь все совершенно иначе; здесь всегда задачи, интересные задачи, которые решаются. Так что, если вы забыли ее, это не имеет значения. Это новая задача, которую нужно снова решить сейчас.

НК: У меня был странный опыт в первом классе. Нам задали выучить таблицу умножения. Сейчас это делается во втором классе, а тогда было в первом. Итак, учительница вызывает Иванова. Трижды три. Он встает и отвечает: девять. И так она постепенно опрашивает всех. Я понимаю, что скоро очередь дойдет до меня. Но я не выучил всю таблицу. Она спросила меня шесть на семь. Шесть на семь было относительно непростой задачей. А я не помнил ответ и думал, что мне делать. Я тут же встал и сообразил — “шесть на шесть — тридцать шесть” — это я знал. “А шесть на семь — нужно прибавить еще шесть»” Пока я стоял, я это понял и ответил правильно. И потом я был убежден, что обманул учительницу. Нам было сказано выучить, но я не выучил. Другими словами, я не выполнил ее задания. Смешно то, что и по сей день, когда мне нужно умножить шесть на семь, я воспроизвожу эту операцию.

(Разговор между ЕМ и НК, часть 3, 3 ноября, 2016 года).

Переход от лекций к слушанию и проверки ученических решений математических задач-теорем представляет собой переход от того, что Бахтин (1975) определил как “авторитарное слово”, к “внутренне убедительному слову”. В последнем и ученик, и учитель являются членами дискурсивного сообщества, в котором они оба имеют равные права на то, чтобы бросить вызов и дать ответ любой идее в дискурсе. Истина утверждается в этом дискурсе только после того, как ученик сможет доказать ее, ответив на все возможные вопросы, возражения и вызовы со стороны равных членов сообщества. У учителя нет большего, чем у учеников, эпистемологического или другого авторитета в этом процессе. Когда математический дискурс ученика выдержал вопросы, возражения и задачи учителя (и сверстников), он становится решением и доказательством (Latour, 1987). Напротив, в обычной педагогике, основанной на лекциях и упражнениях, истина контролируется авторитетом учителя. Цель ученика — понять, принять и воспроизвести эту истину.

НК: Так я понемножку втянулся в математические кружки, а к пятому курсу до того обнаглел, что для студентов первого курса мехмата организовал семинар. И я понял тогда удивительную вещь, абсолютно новую для меня. Уровень взаимопонимания между преподавателем и студентом становится совершенно иным, когда преподаватель принимает задачи. Эта систематическая работа, когда я пытаюсь понять твою мысль, а ты пытаешься понять мою мысль, — это совершенно иной уровень взаимопонимания, чем тот, что бывает, когда лектор читает лекцию. А особенно сейчас — дистанционно... человек, сидя дома, может слушать лекцию в университете... там не будет этого уровня. Неизбежно получается поверхностно. Он и вопрос не может задать. Я не против дистанционного обучения, только надо понимать, что оно не всегда может что-то дать. (Дориченко, 2010).

Тесное взаимодействие между учителем и учеником в классе Константинова не ограничивается "принятием решения ученика", но включает и испытание ученика новыми задачами. Опять же, испытание происходит среди равных людей в дискурсивном сообществе, которые воспринимают идеи друг друга серьезно и безо всякого покровительства или чепухи. Преподаватель помогает ученику перейти от интуитивных зародышей идей к развитию полномасштабного понимания.

НК: ...У меня был ученик в школе, а теперь он студент. Но когда он еще учился в школе, я начал задавать ему такие вопросы: "Подумайте над определением точной верхней границы множества". И он успешно придумал одно: это число, которое больше или равно любому элементу данного множества, и его нельзя уменьшить. Позже, когда он учился в 8-м классе и еще не знал определение предела, я начал задавать ему вопросы типа "Попытайтесь сформулировать определение предела". Я дал ему наброски примерно для десятка вариантов определения, и он разобрался с ними всеми самостоятельно. А в некоторых случаях он говорил: "Нет, это неверно, потому что..." Но я был удивлен, что этот человек фактически придумал все определения сам. Они на самом деле практически идентичны. Он очень способный человек и теперь учится в университете.

ЕМ: А что, если вы помните, побудило вас дать ему задачу придумать определение? В этом случае, с этим учеником?

НК: Я скажу, что обычно люди начинают нести всякую чушь. Например, когда я учился в 7-м классе, один мой одноклассник спросил меня, — а это был обычный урок, поскольку в то время не было математических классов: "Ты знаешь высшую математику?" Это был совершенно неожиданный вопрос для меня, и я сказал "нет". И вот он говорит мне: "Смотри. Значение называется бесконечно малым, если оно все время приближается к нулю, но никогда не достигает его". Я воспринял это утверждение как очень мудрое. Боже мой, мне никогда не приходило в голову нечто подобное. Я знал, что существует эта высшая математика, но она пришла ко мне каким-то странным образом. Но когда человек постигает некую сущность, он начинает безошибочно создавать все эти определения, теперь, когда он понял, в чем суть. Это потрясающе, когда человек уже интуитивно все понял и начинает правильно формулировать.

ЕМ: Другими словами, когда вы видите, что человек начинает интуитивно понимать, следующая задача для него — сформулировать, то есть найти форму для этого.

НК: Да, найти форму. Но если он знает форму в одном случае, это помогает ему найти форму в других случаях.

(Разговор между ЕМ и НК, часть 2, 11 ноября 2016 г.)

В конце концов, Константинов определил три основных педагогических принципа для математических классов, которые, на мой взгляд, составляют принципы "внутренне убедительного слова" (Бахтин, 1975; Matusov and von Duyke, 2010):

Основные принципы работы в математических классах — тщательность, неторопливость и самостоятельность... Тщательность означает, что тема проходится не временно ("в вузе вас этому обучат как следует"), а окончательно (что не исключает последующего возврата к теме на новом уровне). Потеря тщательности ведет к потере интереса. Ученик, который один раз чего-то недопонял, другой раз чего-то недопонял, засоряет, наконец, свою учебу до того, что ему становится противно в ней жить. Наоборот, тщательность позволяет находить в обычных вещах все новый интерес. Основная роль учителя — не в том, чтобы рассказывать и объяснять, а в том, чтобы тщательно проверять, разбираться в любых ошибках, сохраняя искренний интерес ко всем успехам ученика. Этот интерес и является основным стимулом, который имеется в руках учителя, а вовсе не двойки и пятерки, которые, конечно, что-то стимулируют, но, к сожалению, совсем не то, что требуется. Обдуманность означает, что каждой сложной задаче уделяется столько времени, сколько необходимо. Неважно, было ли охвачено не так много тем. Это имеет значение только тогда, когда что-то должно быть пройдено к определенному сроку и независимо от того, хорошо ли оно изучено или плохо. Если это все, что имеет значение, то поскольку в итоге ничего не было пройдено, то все — и ученики, и учителя — теряют интерес.

Неторопливость означает, что на каждую трудность уходит столько времени, сколько нужно. Не беда, если пройдено мало. А беда начинается тогда, когда нужно к определенному сроку что-то “пройти” — неважно, хорошо или плохо. Это — беда, так как в результате не пройдено ничего, и всем становится неинтересно — и ученикам, и учителям.

Самостоятельность означает, что значительная часть теоретического материала, иногда почти весь материал, выполняется учащимися самостоятельно — они сами доказывают или опровергают большинство предлагаемых задач и теорем. Прямой рассказ учителя малоэффективен. (Константинов, 2001).

Преобладание неформального добровольного образования, основанного на свободном выборе, по сравнению с формальным принудительным образованием

Изучая музейное образование, Джон Фальк, Линн Диркинг и их коллеги пришли к понятию “образовательной среды со свободным выбором” (Falk and Dierking, 2002; Falk, Donovan, and Woods, 2001). В образовательной среде со свободным выбором студенты (например, посетители музея) имеют возможность приходить или не приходить в образовательное учреждение (например, в музей), подходить к любому экспонату, к которому они хотят, и участвовать (или не участвовать) в выставке так, как они хотят, определяя свое время, людей, коммуникации, перемещения и т.д. Напротив, в традиционных школах учебная среда назначается и навязывается учащимся: все — образование, время, пространство, люди, общение, учебная программа, распорядок, отношения, занятия и т.д. — предопределено и решено вместо и для студентов (Matusov, 2015a). Константинов пришел к идее образовательной среды со свободным выбором посредством наблюдения за “успехами” принудительного образования: как оно искажает первоначальные внутренние мотивы и страсть учеников к математике:

Слава Цуцков провел кружок для школьников по квантовой механике на мехатико-математическом факультете МГУ. Но он не мог никакого математического аппарата им рассказать, потому что ничего они не знают. И вот тогда мы решили сделать такой кружок, чтобы дать им тот математический аппарат, с помощью которого они смогут написать и понимать все уравнения электродинамики и квантовой механики. Это был кружок “Бета”. А ребята из кружка “Альфа” были помощниками. Так как там была твердая цель, чтобы они нечто усвоили, нам пришлось ввести фашистский режим. Дисциплина была как в гестапо. Человек, который не выполнил хотя бы одно задание, исключается из кружка. Но может прийти, если задание выполнит. Семьдесят человек дошло до конца... (Дориченко, 2010).

НК: На первое занятие пришло человек 200. Совершенно неожиданный эффект. Мы сидели в большой аудитории, там было две доски, на двух противоположных сторонах. На одной доске вел занятие Витя Пан, на другой — я. Те, кто сидели посередине, могли смотреть и туда, и сюда. Потом кружок стабилизировался, и осталось 70 человек. Мы договорились со Славой Цуцковым, что проведем с ним курс анализа и дойдем до уравнений Максвелла и уравнения Шредингера. Но чтобы реально пройти все это охватить, нельзя, чтобы люди пропускали какие-то разделы. Поэтому я и объявил, что каждый, кто не выполнит задание, отстраняется от дальнейших занятий кружка. Это было очень жесткое требование. А привело оно к тому, что все 70 человек выполнили все задания. Но как только я отменил это жесткое требование, почти все перестали делать задания, а потом вообще перестали ходить на кружок.

Они ходили, пока боялись, что их выгонят. Я часто привожу этот пример, чтобы показать, как жесткость приводит к искажению целей. Сейчас я говорю своим ученикам: "Если вы надеетесь, что я заставлю вас заниматься, — не дождетесь!". Потому что, действительно, жесткостью можно добиться, что они что-то выучат. И что? Разве это высшая цель? Выучит, будет знать. И что? Все равно, от него не будет никакого толку, если не будет внутреннего стимула к деятельности (Константинов, 2002, с. 45).

По словам Константинова, подлинное образование требует свободы выбора интересов учеников. Когда его спросили, если бы у него были все рычаги власти, как бы он изменил образование, Константинов ответил, что он отменил бы службу в армии для студентов мужского пола в России. Многие русские студенты мужского пола хотят поступить в университет, чтобы избежать армии. Без призыва на военную службу студенты были бы "свободны в выборе своих интересов" (Привалов, 2012).

По моим наблюдениям, образовательная среда со свободным выбором Константинова основывалась на нескольких практиках:

1. Добровольное участие учеников в различных олимпиадах по математике и математических соревнованиях на всех уровнях;

2. Добровольное посещение учениками математических кружков;

3. Добровольный выбор учениками математических задач-теорем на листках в математических кружках и на уроках математики;

4. Выбор учеников участвовать или не участвовать в решении математических задач на уроках математического анализа;

5. Организация учениками своего собственного времени;

6. Выбор учениками движения, ассоциации (или не ассоциации), сотрудничества (или не сотрудничества), слушания (или не слушания) во время классов математического анализа;

7. Полный или частичный саботаж учителями математического анализа итоговой аттестации (оценок);

8. Интерес Константинова к разнообразным нематематическим увлечениям и талантам учеников и его поддержка этих увлечений и талантов.

9. Наличие богатого выбора внеклассных добровольных мероприятий для учеников (например, кинофак, факультатив по литературе, пеший туризм, КСП — авторская песня у костра, летние лагеря и т.д.)

ЕМ: Иногда мы заходили в тупик и тогда просили Веню, Андрея или другого студента объяснить, и они делали мини-лекции для всех, кто был заинтересован. Если кому-то было не интересно, они отсаживались и занимались своими делами. И если память мне не изменяет, мы иногда уходили и работали над этими задачами за пределами класса. Мы даже ходили с друзьями в маленький дворик перед школой и работали там, пока нас не ловил дежурный, но мы говорили, что нам разрешили уйти. И несмотря на то, что мы могли работать или не работать над этими задачами в течение недели, насколько я помню, у меня был огромный опыт в решении этих задач. И никто не нависал над нами и не вынуждал нас выполнять определенный объем. По крайней мере, я не помню, чтобы меня заставляли, например, решить три задачи к пятнице.

НК: Все это так. Теперь у нас бывают учителя, которые не могут этого понять. Они очень строго требуют, что такую-то и такую-то задачу нужно обязательно сдать к такому-то числу, иначе грозит исключение из школы. Мы не можем найти с ними общий язык, потому что эти люди никогда сами не учились. Например, один учился в педагогическом институте, а потом бросил. Ясно, что этому не учат в пединституте.

ЕМ: Я думаю, что в пединституте учат прямо противоположным вещам.

НК: Абсолютно верно. Их учат прямо противоположным вещам. И я знаю, что в одной школе, которую называют "интеллектуальной", один человек, который заботится обо всем, он учитель физики, говорит: "Когда кто-то приходит и говорит, что он хочет работать в нашей школе, я всегда спрашиваю, пришел ли он из педагогического института. Если он пришел из пединститута, я пытаюсь побыстрее избавиться от него, потому что у него совершенно противоположные идеи". Так что то, что вы сказали о педагогическом институте — правда.

ЕМ: Хотя я сам работаю не в педагогическом институте, а на педагогическом отделении, я пытаюсь внедрить нечто, чему традиционно не учат на таких отделениях.

НК: Преподаватели, которые изучают мой опыт, гораздо более либеральны по отношению к ученикам. Например, в одном сильном математическом классе, где все ученики, кроме одного, — победители олимпиад, один не участвовал ни в одной олимпиаде. Но он хорошо работает руками. И поэтому преподаватель, сильный математик, простил его за то, что он почти не тратит времени на математику. Учителю не пришло в голову выгнать его, потому что он не делал того, что делали другие. Но он настолько хорошо работает руками, что они теперь вводят уроки технологии вместо труда (классы труда отменили), где можно сделать некое устройство, например. Сначала вы используете компьютер, чтобы создать модель инструмента, а затем отливаете его в металле. Другими словами, это полностью отличается от того, чем был предмет труда, где нужно было работать молотком и пилой. В любом случае, этот парень все делал очень хорошо и на компьютере, и по металлу, но он не решал математические задачи. Тем не менее, он был настолько успешным в этой работе, что в школу позвонил ректор Бауманского института, чтобы выяснить, может ли этот парень быть зачислен в его учебное заведение. Это единственный известный мне случай, когда ректор самолично позвонил, чтобы спросить, достаточно ли у ученика знаний, чтобы учиться в его институте.

(Разговор между ЕМ и НК, часть 1, 30 октября, 2016 года).

Три основных элемента математического образования Константинова — математические конкурсы, математические кружки и математические классы/школы/университет — совместно составляют образовательную среду со свободным выбором:

В России сложилась развитая система математического образования старших школьников. Слово "система" употреблено, может быть, не совсем по праву. Многие части системы не так уж тесно связаны между собой и не столь уж согласованы по содержанию и стилю, чтобы говорить о "системе". Эти части создавались усилиями десятков и сотен вузов, математических школ, различных региональных коллективов и отдельных энтузиастов. Тем не менее, общность и согласованность все же просматриваются. Основные части системы следующие:

1. Математические школы и классы.
2. Городские математические кружки.
3. Летние математические школы.
4. Заочные математические школы (ВЗМШ, ЗФТШ, школа Малого мехмата и некоторые другие).
5. Журнал "Квант" и другие издания в помощь учителям и продвинутым школьникам.
6. Российская математическая олимпиада со всеми ее этапами, от школьных до Всероссийской.
7. Другие олимпиады республиканского уровня (Соросовская олимпиада, Международный Турнир городов).
8. Региональные соревнования (Кубок Колмогорова и некоторые другие, в общей сложности десятки соревнований).

Итак, выделяются две группы мероприятий: направленные на обучение (пункты 1–5) и соревнования (6–8). Ядром системы является обучение, соревнования же служат наполнению классов и кружков, кроме того, они — украшение системы, которое придает учебе характер большого праздника. Всю систему в целом я буду называть "Российские математические классы", подчеркивая ведущую роль обучения и не забывая при этом, что такое название несколько одностороннее и не отражает всего богатства вариантов работы со школьниками. (Константинов, 2001).

Список литературы

Anderson M.A. 2010. Investigating the Impact of an Engaged Adolescent Participation in Hip-Hop Pedagogy: An Exploration of the Educational Possibilities of Youth Culture. PhD Doctoral dissertation, University of Delaware, Newark.

Ilyashenko Y.S., and Sossinsky A.B. (2010, March). “The Independent University of Moscow.” The Newsletter of the European Mathematical Society, vol. 75, pp. 38– 44.

Accessed http://www.mccme.ru/mathinmoscow/img/IS.pdf

Бахтин М.М. 1975. Вопросы литературы и эстетики. М.: Художественная литература.

Berlyand I.E. 2009. “A Few Words about Bibler’s Dialogics: The School of the Dialogue of Cultures Conception and Curriculum.” Journal of Russian & East European Psychology vol. 47, no. 1, pp. 20– 33. doi: http://dx.doi.org/10.2753/RPO1061-0405470101

Bibler V.S. 2009. “The Foundations of the School of the Dialogue of Cultures Program.” Journal of Russian & East European Psychology, vol. 47, no. 1, pp. 34– 60. doi: http://dx. doi.org/10.2753/RPO1061-0405470102

Борусяк Л. (29 сентября, 2010). “Как появилось математическое образование. Беседа с математиком Николаем Константиновым”. http://www.polit.ru/article/2010/09/29/matheducation/

Дориченко С. 2010. Интервью с Н.Н. Константиновым // Квант. № 1. С. 19–23. Элементы большой науки: http://elementy.ru/lib/431023.

Falk J.H. and Dierking L.D. 2002. Lessons without Limit: How Free-choice Learning is Transforming Education. Walnut Creek, CA: AltaMira Press.

Falk J.H., Donovan E., and Woods R. 2001. Free-choice Science Education: How We Learn Science Outside of School. New York, NY: Teachers College Press.

Константинов Н.Н. 2001. “Российские математические классы”.
http:// www.mccme.ru/teachers/articles/russmath.htm).

Константинов Н.Н. 2002. Математические кружки раньше // Математическое просвещение. Том. 3. № 6. С 38–48.

Леенсон Е. (5 ноября, 2012). “Учителя большого города: Николай Константинов”
http://bg.ru/kids/uchitelja_bolshogo_goroda_nikolaj_konstantinov-15493/

Latour B. 1987. Science in Action: How to Follow Scientists and Engineers through Society. Cambridge, MA: Harvard University Press. Латур, Б. Наука в действии: следуя за учеными и инженерами внутри общества (пер. с англ. К. Федоровой). Санкт-Петербург: Изд-во Европейского ун-та, 2013.

Lobok A. 2012. “The Writing Person.” Journal of Russian and Eastern European Psychology, vol. 50, no. 6, pp. 32– 68.

Matusov E. and Brobst J. 2013. Radical Experiment in Dialogic Pedagogy in Higher Education and Its Centaur Failure: Chronotopic Analysis. Hauppauge, NY: Nova Science.

Matusov E. and K. von Duyke. 2010. “Bakhtin’s Notion of the Internally Persuasive Discourse in Education: Internal to What? (A Case of Discussion of Issues of Foul Language in Teacher Education).” In Proceedings from the Second International Interdisciplinary Conference on Perspectives and Limits of Dialogism in Mikhail Bakhtin Stockholm University, Sweden June 3–5, 2009, ed. K. Junefelt and P. Nordin, pp. 174– 99. Stockholm: Stockholm University.

Matusov E. 2015a. “Chronotopes in Education: Conventional and Dialogic.” Dialogic Pedagogy: An International Online Journal, vol. 3, pp. A65– 97. doi: 10.5195/dpj.2015.107

Привалов А. (17 января, 2012). “Инкубатор для перельманов” http://expert.ru/2012/01/17/ugol-zreniya/

Перевод с английского: Бондал Елена.

Из истории математических классов

Материал подготовили Комаров С.И., Якушкин П.А.

В этом номере сборника предлагаем вниманию читателей две статьи о преподавании математики в математических классах Н.Н.Константинова, опубликованные в шестидесятые годы прошлого столетия.

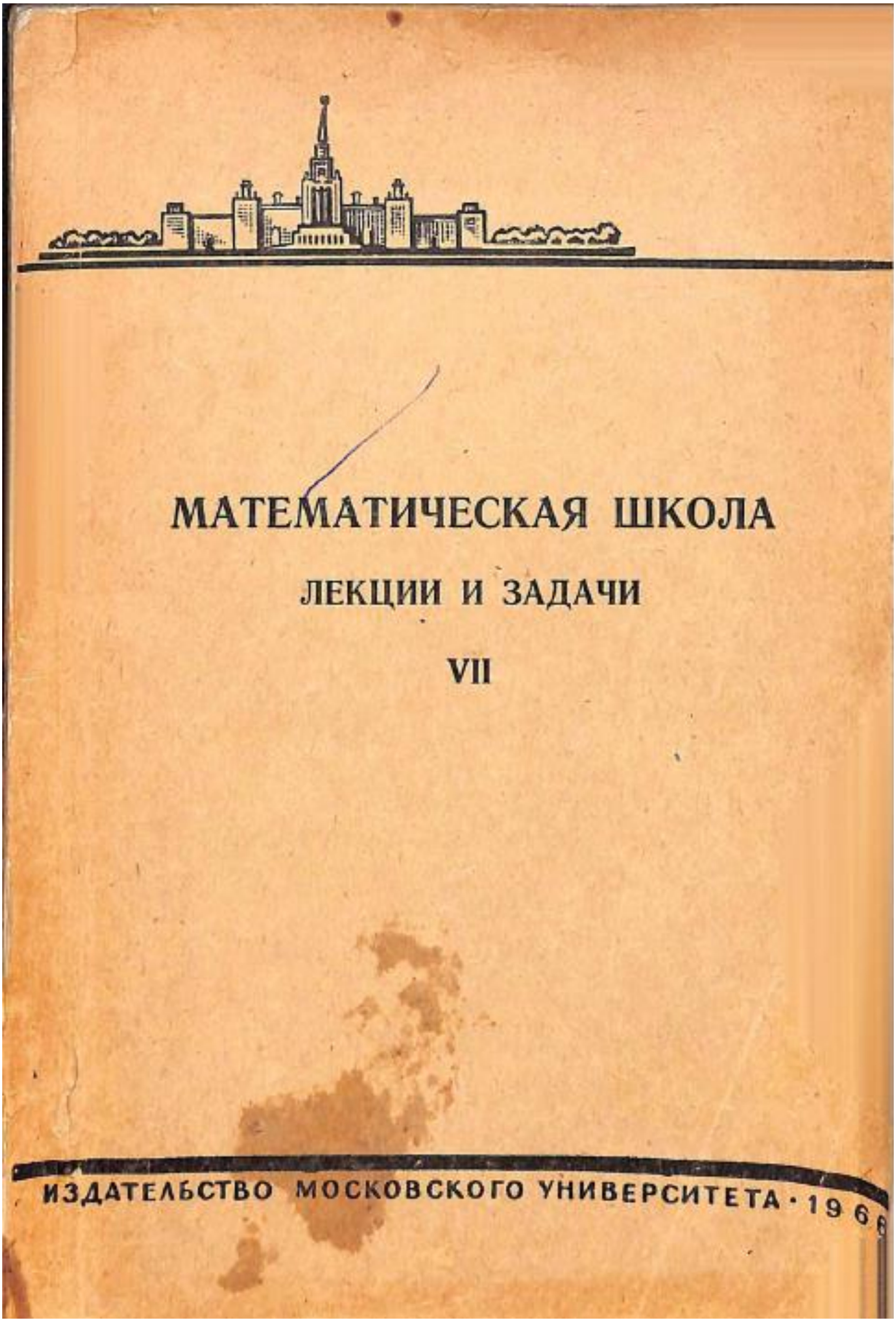
1961-1962 учебный год в московской школе № 7 был особенным – в школе начал работать математический кружок под руководством А.С. Кронрода и Н.Н. Константинова. Одним из главных результатов работы кружка стал набор на следующий год двух первых математических классов (8-ых) этой школы, один из которых, по инициативе А.С. Кронрода возглавили Н.Н. Константинов и М.Л. Гервер. Тогда же в московской школе № 444 появились классы учащихся-вычислителей-программистов. В 1963 году Постановлением Совета Министров СССР в Москве, Киеве, Ленинграде и Новосибирске были основаны четыре специализированные школы-интерната физико-математического профиля. Каждая из этих школ была прикреплена к государственному университету соответствующего города, так появился физико-математический интернат № 18 при МГУ. В эти же годы началась физико-математическая специализация московской школы № 2, когда директор школы В.Ф. Овчинников привлек для преподавания математики в школе И.М. Гельфанда и его коллег, а для школьников организовал прохождение производственной практики по специальности «радиомонтажник» (а позже и «программист») в одном из институтов Академии наук СССР. С 1963 года стала работать вечерняя математическая школа при механико-математическом факультете МГУ, а параллельно с вечерней математической школой в 1964 г. была организована Заочная математическая школа (ЗМШ), основателем и первым руководителем которой был И.М. Гельфанд, для учеников других городов СССР и способной сельской молодежи.

Такое бурное развитие специализированного математического образования школьников в Москве вызвало к жизни специальное издание – сборник «Математическая школа». Первый сборник вышел в октябре 1965 года, последний (четырнадцатый) в мае 1968 года. Первоначально планировалось, что сборник будет выходить 2 раза в месяц (таков анонс в первом номере!). В реакционный совет сборника входили такие уже тогда или позже известные математики и педагоги как Э.Б. Винберг, Е.Б. Дынкин, А.А. Егоров, С.И. Шварцбурд, И.М. Яглом, которые многие годы активно занимались математическим образованием школьников. Сборники «Математическая школа» содержали материалы преподавания математики в специализированных математических классах школ №№ 2, 7, 444, интерната № 18 и вечерней математической школы, а также материалы, представляющие интерес для учеников и преподавателей математических школ. Сборник печатался на ротапринтах в типографии Издательства МГУ. Все номера сборника можно найти по ссылке https://math.ru/lib/ser/msch

В 1966 году в седьмом номере сборника «Математическая школа» была опубликована статья Н.Н. Константинова «В математических классах школы № 7» с указанием всех преподавателей математических дисциплин на текущий год (в том числе большого количества студентов), а также с приложением задач по теме «Комплексные числа». Здесь мы целиком воспроизводим эту публикацию. (Воспроизведены также обложка, титульный лист, аннотация и оглавление этого выпуска.)

Вторая статья, которая здесь помещена, – это совместная заметка М.Л. Гервера, Н.Н. Константинова и А.Г. Кушниренко «Задачи по алгебре и анализу, предлагавшиеся учащимся IX и X классов», опубликованная в 1965 году в выпуске 1 сборника «Обучение в математических школах» издательства «Просвещение».

Предлагаемые материалы позволят читателю увидеть, как рождалась «система Константинова», что в нее закладывалось, а также сравнить задуманное с тем, что делается в сегодняшних условиях в школе № 179 и других математических школах.


МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА
ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ
VII
ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 196

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

ИНСТИТУТ ОБЩЕГО И ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК
Р С Ф С Р

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

У П

Издательство Московского Университета

1966

В сборниках "Математическая школа" публикуются материалы преподавания математики в специализированных математических школах (Московские школы№№ 2, 7, 444; школа-интернат №18 при МГУ) и в Вечерней математической школе при механико-математическом факультете МГУ. Материалы имеют экспериментальный характер. Руководит изданием редакционный совет в составе :

ОГЛАВЛЕНИЕ

3

В МАТЕМАТИЧЕСКИХ КЛАССАХ ШКОЛЫ № 7

Н.Н.КОНСТАНТИНОВ

Из всех наук математика наиболее загадочна для новичка. Человек, никогда не изучавший физики, биологии или химии, знает в общих чертах, о чем там говорится. Физик мог избрать свою профессию только потому, что в детстве на него произвели большое впечатление магнит или волчок. Интерес к астрономии может зародиться при виде звездного неба. Про математику же обычно знают только, что она очень нужна для вычислений, но ведь это не дает представления о ней самой. Когда я и мои товарищи, будучи школьниками, начинали заниматься в математическом кружке при МГУ, нас очень удивило то, что математика оказалась совсем не такой, как мы ее себе представляли. Мы думали, что математика – в основном законченное здание. Конечно, мы слышали, что в математике делаются какие-то открытия, но мы думали, что они относятся лишь к очень сложным областям. А оказалось, что мы сами можем придумывать теоремы и доказательства, и, что особенно было удивительно, для того, чтобы узнать, верны ли они, не нужно лезть в книги, а нужно только подумать. Вот характерный случай, правда, уже не из моей учебы. Есть старинная задача: если множество точек на плоскости обладает тем свойством, что не существует прямой, содержащей ровно две точки множества, то либо все это множество лежит на некоторой прямой, либо в нем бесконечное число точек. Это – так называемая проблема Минелая. Она была решена в средние века довольно сложным способом. Так до последнего времени и считалось, что решение этой задачи сложное. В книге И.М.Яглома оно занимает несколько страниц(вместе с подготовительной теорией). Года два тому назад мы задали эту задачу нашим ученикам. И вскоре оказалось, что она имеет совсем простое решение,которое состоит из нескольких фраз и не требует никакой теории. Несколько человек независимо придумали это решение, но первым был, кажется, Миша Кронрод, теперь студент первого курса мех-мата. Попробуйте и вы придумать простое решение этой задачи. Странный факт, много раз проверенный: если кто-то решил задачу, для других она тем самым становится легче. Но не смотрите предварительно в книжку - вы не придумате простого своего решения, если будете знать чужое. Вот эта возможность выдумывать свое была основой нашего энтузиазма, когда мы были кружковцами. К сожалению, такая работа дает все же неточное представление о математике. Некоторые интересные и важные области этой науки становятся доступными только в результате долгого и подчас скучного ученья. В связи с этим многие считают, что нужно сначала по книжкам выучить значительную часть математики, а потом уже начинать заниматься самостоятельной творческой работой. Такая точка зрения очень естественна, и многие школьники, не участвующие в математических кружках или математических школах, пытаются учиться именно таким способом. Однако, это часто приводит к плохим результатам. При таком методе не развиваются творческие способности, и приобретенные знания оказываются в пассивной форме, они мало на что пригодны. Самое же главное, наверное, то, что ученик лишается возможности посмотреть на вещи свежими глазами. Ведь многие открытия в науке чрезвычайно просты, и было бы очень жаль, если бы люди не пытались открывать новое в давно известных вещах. Мне кажется, в последнее время вкус к простым вещам несколько утрачен. Все меньше людей, которые способны их выдумывать. Для иллюстрации расскажу об одной задаче. Дан баллон объемом 100 литров с газом под давлением 100 атм. и два баллона по 50 литров, пустых. Как с помощью простых домашних средств (без помощи насосов, сверхнизких температур и т.д.) перекачать газ из 1-го баллона в два других, не потеряв давления. Эту задачу я задавал многим физикам и математикам с высшим образованием, но сделали ее единицы. А ведь метод ее решения известен, наверное, уже 200 лет и практически применяется. Выходит, чтение сложных книг не всегда помогает разбираться в простых вещах. Аналогичные примеры можно привести и из математики. Итак, чтение книг, как способ изучения нового материала, обладает серьезными недостатками. Это относится во всяком случае к физике и математике. Как же в таком случае следует организовать изучение этих наук ? Коллектив преподавателей математики седьмой школы применяет систему обучения, которая является, на мой взгляд, шагом вперед и по отношению к системе, обычно применяемой в школе, и к университетской системе. Прежде, чем быть примененной в школе, эта система предварительно прошла испытание в нескольких математических кружках для студентов и школьников. При этой системе весь программный материал предлагается в виде задач, включая все теоремы. Объяснения учителя сводятся к минимуму. Для примера скажу, что когда я работал в 9-м классе, я за весь год объяснял новый материал в течение двух часов. Это была лекция о понятии числа, содержание которой я не смог изложить в задачах . Этой лекцией начиналась тема "действительные числа". В чем же тогда состоит работа учителя? Главным образом в том, чтобы проверять решения. Проверка решений - самая трудоемкая и самая важная часть работы. Так как один учитель не может справиться с этим, у нас в каждом классе работает несколько учителей математики. Другая функция учителей - подбирать задания и регулировать скорость прохождения материала. Скорость эта должна быть такой, чтобы все могли работать спокойно, идти в естественном темпе. При этом получается, что ученики идут с разной скоростью. В вопросах темпа мы ориентируемся по тем, кто идет медленно. Тем же, кто идет быстро, мы предлагаем дополнительные циклы задач по главам, не входящим в обязательную программу. Такие методы могут быть эффективными, конечно, только в работе с теми учениками, которые любят решать задачи. Как же выглядит занятие при такой системе ? В классе присутствует одновременно несколько преподавателей математики, от 2-х до 5-ти в разных классах. Преподаватели тихо беседуют с учениками, которые рассказывают решенные ими задачи. За одно занятие учитель может поговорить с двумя-тремя учениками. Это несколько напоминает экзамены в университете, с тем существенным различием, что студент обычно рассказывает доказательства, которые профессор прочел на лекциях, а студент выучил, у нас же ученик рассказывает только то, что сам сделал. Другое различие состоит в том, что студент сдает определенный материал, который он обязан был изучить ко дню экзамена, у нас же ученик рассказывает то, что успел сделать. Наконец, третье различие то, что за экзамен отметка ставится, а за рассказ своего решения ученик отметки не получает. Практически никогда мы не задаем ученикам что-либо выучить, почти никогда не вызываем их к доске и ставим отметки обычно только за контрольные работы. Так что сходство с экзаменом по существу не очень большое. С другой стороны, такие занятия напоминают математический кружок.

Такие методы применяются у нас при прохождении курса алгебры - анализа. Курс геометрии и тригонометрии построен на основе обычных школьных методов с привлечением более трудных задач и некоторого дополнительного материала.

Коллектив преподавателей математики 7-й школы накопил большой опыт работы по новой системе. Некоторые результаты этого опыта - циклы задач по анализу, алгебре, учебники по программированию - частично опубликованы и будут публиковаться, в частности, в выпусках "Математическая школа".

СПИСОК ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ АНАЛИЗА И АЛГЕБРЫ ШКОЛЫ № 7

IIв. Гутер Рафаил Самойлович, кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник матем.лаб. ИТЭФ (Института Теоретической и Экспериментальной физики),

Оревков Юрий Павлович, кандидат физико-математических наук, мл.научн.сотрудник матем.лаборатории ИТЭФ.

IIг. Константинов Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник математической лаборатории ИТЭФ,

Чернавский Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научн.сотрудник Математического Института имени А.В.Стеклова,

Калинин Дмитрий Иванович, студент 6-го курса мех-мата МГУ,

Ситникова Елена Георгиевна, студентка 6-го курса мех - мата МГУ.

IOв. Битман Александр Рафаилович, аспирант ИТЭФ,

Титов Вячеслав Константинович, аспирант ИТЭФ,

Белов Валерий Константинович, младший научный сотрудник Комитета по Кибернетике,

Емельянов Николай Евгеньевич, сотрудник математической лаборатории ИТЭФ,

Пранов Борис Михайлович (МГУ, 4 курс).

IOг. Адельсон-Вельский Георгий Ма[illegible]мович, кандидат физ.-мат.наук, доцент, ст.научный сотр.матем. лаб. ИТЭФ.

Леман Андрей Андреевич, аспирант ИТЭФ,

Макар-Лиманов Леонид Григорьевич, (МГУ, 4 курс).

Якобсон Михаил Викторович, студент 4-го курса мех-мат. МГУ.

9в. Бернштейн Давид Наумович, студент 2-го курса мех мата МГУ,
Великанов Кирилл Михайлович, студент 2-го курса мех-мата МГУ,
Финкельберг Владлен Моисеевич, научный сотрудник ИТЭФ.
Хованский Аскольд Георгиевич, студент 2-го курса мех-мата МГУ.

9г. Кушниренко Анатолий Георгиевич, студент 4-го курса мех мата МГУ,
Ротенберг Александр Робертович, студент 3-го курса мех мата МГУ,
Киперман Вячеслав Александрович, студент 3-го курса мех мата МГУ,
Чопенко Ольга Петровна , студентка 4-го курса мех мата МГУ,
Блохин Анатолий Александрович, студент I-го курса мех-мата МГУ,
Ревзин Юрий Владимирович, учитель школы,
Осипова Виктория Аркадьевна, студентка 3-го курса мех мата МГУ.

Курс геометрии и тригонометрии ведут учителя школы
Юдина Ирина Игоревна,
Ревзин Юрий Владимирович.

КУРС АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА В ШКОЛЕ № 7.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ "КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА"

ЗАДАНИЕ I.

Вычислить:

I. $\frac{i-1}{i}$ 2. $\sqrt{i+1}$ 3. $\frac{1}{i-1}$ 4. $i^{-3/2}$; 5. $\frac{a+bi}{c+di}$

6. Составить квадратное уравнение, корнем которого было бы $(i-2)$.

7. Показать, что $z+\bar{z}$ и $z\cdot\bar{z}$ - действительные числа.

8. Доказать, что $\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$; $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=\overline{z_1\cdot z_2}$; $\bar{z}_1:\bar{z}_2=\overline{z_1:z_2}$.

9. Даны две вершины правильного треугольника: 0 и z . Найти 3-ю вершину.

I0. Даны две вершины квадрата z_1 и z_2 . Найти две другие его вершины.

II. Показать, что точки, представляющие комплексные числа $1+4i$; $2+7i$; $3+10i$ лежат на одной прямой.

I2. Где расположены точки $1+2z$, если $|z|=1$?

I3. Где расположены точки z на комплексной плоскости, для которых $|z-1|=2$, $Re\,z\geq 0$, $a<Im\,z<b$? (a, b - действительные числа).

ЗАДАНИЕ 2.

I. Представить в тригонометрической форме

а) i ,

б) $\sqrt{i}$,

в) $-\cos\pi/6+i\sin\pi/6$.

2. Чему равен $\arg\bar{z}$, если $\arg z=\varphi$?

3. Доказать формулу Муавра.

4. Вывести формулу для извлечения корня n-й степени из

83

комплексного числа.
5. Чему равен $\arg {z}/{\bar z}$, если $\arg z=\varphi$?
6. Показать, что $\sqrt[n]{-1}$ имеет n различных значений. Как они расположены на комплексной плоскости ?
7. Где расположены точки z такие, что $Re\,\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\ (r>0)$?
8. Пусть точки z лежат на прямой. Могут ли все точки $\frac{1}{z}$ также лежать на прямой ?
9. Найти сумму $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots+\cos nx$.

ЗАДАНИЕ 3.
I. Найти геометрическое место точек z^4, если $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.
2. Чему равна сумма всех корней степени n из I ?
3. Где расположены точки $z=tz_1+(1-t)z_2$, если z_1 и z_2 - две заданные точки и $0\le t\le 1$ (t - действительные число)?
4. Доказать, что множество точек z, удовлетворяющих условию $\frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}=K$, где $K\neq 1$, есть окружность.

5. Если z не равно - I и 0, то для того, чтобы $\frac{z-1}{z+1}$ было чисто мнимым числом, необходимо и достаточно, чтобы $\bar z=1/z$. Доказать.
6. Вычислить: $\sin\frac{x}{m}+\sin\frac{2}{m}x+\ldots+\sin\frac{m-1}{m}x+$ $+\sin x$.
7. Выразить $\sin 4x$ и $\cos 4x$ через $\sin x$ и $\cos x$ (используя формулу Муавра).

ЗАДАНИЕ 4.
I. Решить уравнение : $z^2=\bar z$.
2. Доказать, что любое число на единичной окружности $(|z|=1)$, не являющееся действительным числом $(Im\,z\neq 0)$, можно представить в виде $\frac{c-i}{c+i}$, где c - действительное число.

3. Исследовать, куда переводится единичный круг, действительная и мнимая ось, первый квадрант при следующих преобразованиях:

а) $w=az+b$; б) $w=\frac{a}{z}+b$; в) $w=z+\frac{1}{z}$;

г) $w=\frac{z+i}{z-i}$; д) $w=z\cdot\bar{z}$ (a и b - комплексные числа).

4. Если $P(z)$ - многочлен с вещественными коэффициентами, то $P(\bar{z})=\overline{P(z)}$. Доказать.

5. Если $P(z)=0$,то $P(\bar{z})=0$. Доказать.

6. Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень. Доказать.

7. Доказать, что для любого многочлена $P(z)$ и любого комплексного числа a , многочлен $P(z)-P(a)$ делится на $z-a$.

8. Доказать, что многочлен $P(z)$ делится на $z-a$ в том и только в том случае, когда $P(a)=0$.

ЗАДАНИЕ 5.

I. Доказать, что многочлен $P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}$ можно разложить в произведение n линейных множителей и коэффициента при старшем члене: $P(z)=a_0(z-z_1)\ldots(z-z_n)$

2. Доказать, что многочлен с действительными коэффициентами $P(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ можно представить в виде:

$$P(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)(x^2+p_1x+q_1)\ldots$$
$$\ldots(x^2-p_e x+q_e).$$

3. Доказать, что каждое из разложений в предыдущих задачах единственно.

4. Доказать, что $P(z)$ делится на z^2+1 тогда и только тогда, когда $P(i)=0$ и $P(-i)=0$.

5. Делится ли $x^{1965}+x^{50}+1$ на x^3+1 ?

6. В каких случаях x^n+1 делится на x^m+1 ?

7. Найти все значения z, удовлетворяющие равенству $z^2+|z|=0$.

М. Л. ГЕРВЕР, Н. Н. КОНСТАНТИНОВ и А. Г. КУШНИРЕНКО
(Москва)

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ И АНАЛИЗУ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ УЧАЩИМСЯ IX и X КЛАССОВ

Ниже представлена часть курса анализа, пройденная в течение полутора лет (IX класс и первая половина X) в математических классах школы № 7. В этот курс включены и элементы традиционного курса алгебры, естественно примыкающие к анализу. Этот предмет занимает 6 часов в неделю, из которых 2 не обязательны для посещения (консультация).

Не нужно думать, что в нашей школе проходится какой-то не представленный здесь курс анализа, а задачи являются к нему упражнениями. Предлагаемые задачи — это и есть сам курс анализа. В сборник включены определения, достаточные для самостоятельного решения всех задач. Проходя таким образом материал, школьники шаг за шагом овладевают техникой математического мышления. Овладение такой техникой на серьезном профессиональном уровне — основная цель курса.

Хотя научиться математическому мышлению можно почти на любом материале, мы старались подобрать его так, чтобы подвести учащихся к наиболее актуальной тематике. Здесь, конечно, сказывается вкус преподавателя. Мы считаем, что именно свободное владение основами анализа (техника работы с понятиями непрерывности и предела в разных видах) есть та база, на основе которой можно начинать серьезные занятия различными областями математики.

Логической стороне понятия предела у нас уделено значительно больше внимания, чем вычислительной. Это вполне соответствует современному стилю работы математиков, в особенности вычислителей-программистов. Один из основных выводов нашей работы состоит в том, что нужно очень много времени, чтобы хорошо усвоить основные понятия анализа: понятия предела и непрерывности. Если случится, например, что какой-нибудь из учеников, даже из лучших, не сможет в течение месяца доказать эквивалентность двух определений непрерывности (на ε, δ-языке и на языке последовательностей), — не подсказывайте ему. Дайте ему возможность самостоятельно преодолеть эти трудности.

На занятиях по анализу у нас присутствует одновременно несколько учителей, от 3 до 6 в разных классах. Задания вы-даются каждому в виде листочков, размноженных на машинке (один листочек на одно или несколько занятий). Ученики сидят в классе и решают задачи. Их же они продолжают решать дома, так как в классе, как правило, не успевают. Никаких специальных домашних заданий не задается.

Из таких листков, переписанных подряд, и составлен настоящий сборник (с добавлением контрольных работ). Преподаватели заняты в классе тем, что по очереди беседуют со всеми. За час можно побеседовать с одним-тремя учениками. Во время беседы ученик рассказывает преподавателю решенные им задачи. Беседа напоминает экзамен, с тем различием, что ученик рассказывает только то, что сам сделал. Отметка за это не ставится. Одновременно может происходить консультация, но она занимает, как правило, небольшую долю времени.

Большинство задач первой части курса, до действительных чисел, не обязательно. Начиная с действительных чисел, большинство задач обязательно. Обязательность понимается в том смысле, что мы не переходим к следующему разделу, пока большинство учеников не решат почти все задачи. Мы не практикуем искусственного ускорения темпа, то есть прохождения курса с большей скоростью, чем ученики могут его усвоить при самостоятельной спокойной работе.

Контрольные работы в большинстве случаев разрешается несколько раз переделывать, пока не будет написано аккуратное решение. При этом мы не возражаем, чтобы каждый решил задачи своими методами и не узнал методов, примененных другими. Некоторые контрольные не завершают тему, а начинают ее.

Естественное требование к задачникам предлагаемого типа состоит в том, чтобы задачи были хорошо подогнаны друг к другу, т. е. чтобы каждая задача была хорошо приспособлена для решения дальнейших задач. Однако слишком хорошую подогнанность мы считаем вредной: чрезмерная гладкость в задачнике обернется беспомощностью в дальнейшей работе математика. Часто мы нарочно разрушали цепочки задач, в которых каждая задача подсказывает метод решения следующей.

В нашем курсе основная техника математического мышления отрабатывается на понятии предела. Можно было бы положить в основу понятие непрерывности, что и сделано в некоторых классах нашей школы. Фактически тема предела начинает понемногу появляться в задачах предыдущих тем. Несмотря на такую подготовку, понятие предела все же оказывается в логическом отношении намного труднее, чем все, что встречается в предыдущих темах.

Существенную трудность для учащихся представляет не только само решение задачи, но и запись решения. От тех учеников, которые нечетко рассказывают устно, обязательно требовать, чтобы решения записывались. Если решение записано плохо, мы возвращаем его для доработки. Ничего, если способ решения не самый удачный, мы предоставляем ученику довести до конца его собственное решение.

Иногда у нас происходят занятия обычного типа, когда преподаватель у доски беседует с классом. Таких занятий бывает очень мало — 2—5 в полугодие (например, вводная лекция к теме «Неравенства», где говорилось о натуральном числе).

При такой системе проведения занятий возникают следующие проблемы:

1) В классе, где одновременно 4 ученика рассказывают задачи своим преподавателям, бывает шумно. Мы завели у себя в школе «тихую комнату» (вроде читальни, но без книг). В «тихой комнате» вовсе запрещено разговаривать. В основном классе тоже становится тихо, так как там остается меньше народу.

2) Ученики решают задачи по-разному, причем часто плохим способом. Конечно, когда задача как-то уже решена, можно рассказать ученику лучшее решение, но не нужно навязывать учащимся свои привычные рассуждения.

3) Ученики идут в разном темпе. К этому мы приспособились так: скорость поступления новых задач мы берем такую, чтобы с ней справлялись самые тихоходные. Тогда у части класса образуется резерв времени, который мы используем для факультативных тем и кружков. Их тоже можно проводить «в листочках», так что добавочных часов они не требуют.

4) Необходимо много преподавателей. У нас учителями анализа работают научные сотрудники ряда институтов, аспиранты и студенты. Привлечение лучших студентов — резерв, который может быть использован во многих местах.

Хотя мы редко задаем формально обязательные задания (на дом), необходимым условием успешности нашей работы является большой резерв свободного домашнего времени учащихся. Перегрузка домашними заданиями по другим предметам делает применение наших методов невозможным.

О Фонде содействия образовательным проектам "179"

Фонд содействия образовательным проектам "179" создан в январе 2020 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд поддерживает образовательные и иные инициативы, направленные на развитие системы математического образования школьников и студентов, которая начала создаваться в 60-е годы прошлого столетия при активном участии Н.Н. Константинова и его последователей — "система Константинова".

Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. По правовому статусу Фонд является не имеющей членства унитарной некоммерческой организацией, преследующей общественно полезные цели, указанные в Уставе Фонда.

Фонд формирует имущество и средства на основе добровольных имущественных взносов, а также иных не запрещенных законом поступлений, и обеспечивает использование данного имущества и средств для поддержки и развития образования.

Фонд для достижения своей уставной цели осуществляет следующую деятельность:

- привлечение российских и иностранных инвесторов и меценатов к финансированию проектов и программ Фонда, формированию его имущества и средств;

- взаимодействие с образовательными и научными организациями, организациями сферы культуры, творческими коллективами, органами государственной власти и местного самоуправления, частными лицами, иными заинтересованными субъектами;

- поддержка педагогической и научной деятельности учащихся и молодых учителей и ученых;

- проведение совместно с российскими и зарубежными партнерами образовательных проектов, лекций, встреч, конференций, выставок, фестивалей, в том числе международных;

- осуществление информационно-аналитической, методической, просветительской деятельности и поддержка такой деятельности;

- учреждение средств массовой информации, издание научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук, поддержка такой издательской деятельности.

Дорогие читатели, поддержите деятельность Фонда, оказав ему материальную и иную поддержку!

Реквизиты Фонда

Полное наименование: Фонд содействия образовательным проектам "179"

Краткое наименование: ФСОП "179"

ИНН: 7722483776

ОКПО: 43061727

Юридический адрес: 111024 г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 55, корп. 31, ком. 525-3

Телефон: +7 (495) 980-03-72

E-mail: eap_fund@179.ru

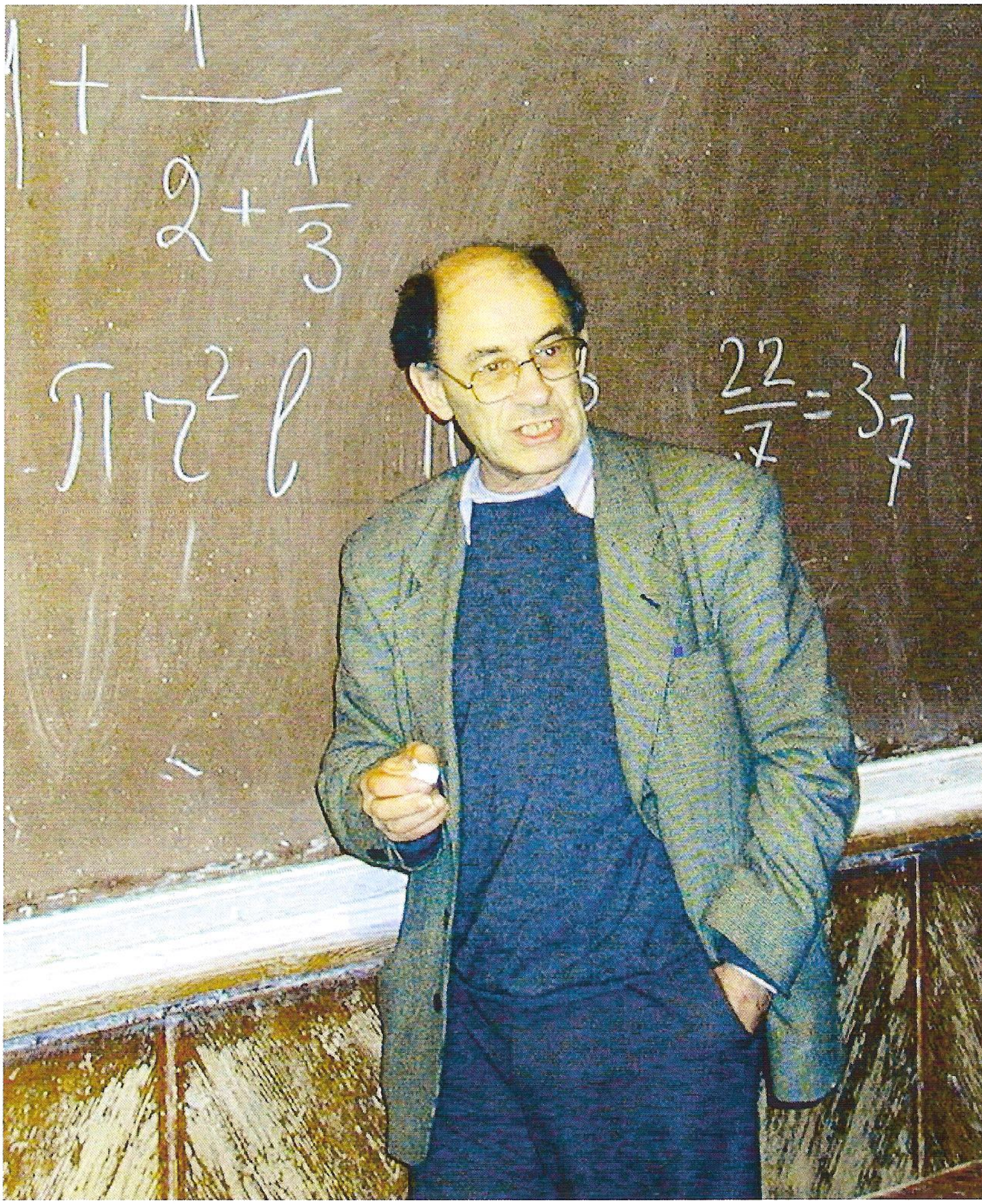
Расчетный счет: 40703810100167648002 в КБ "ЛОКО-Банк" (АО)

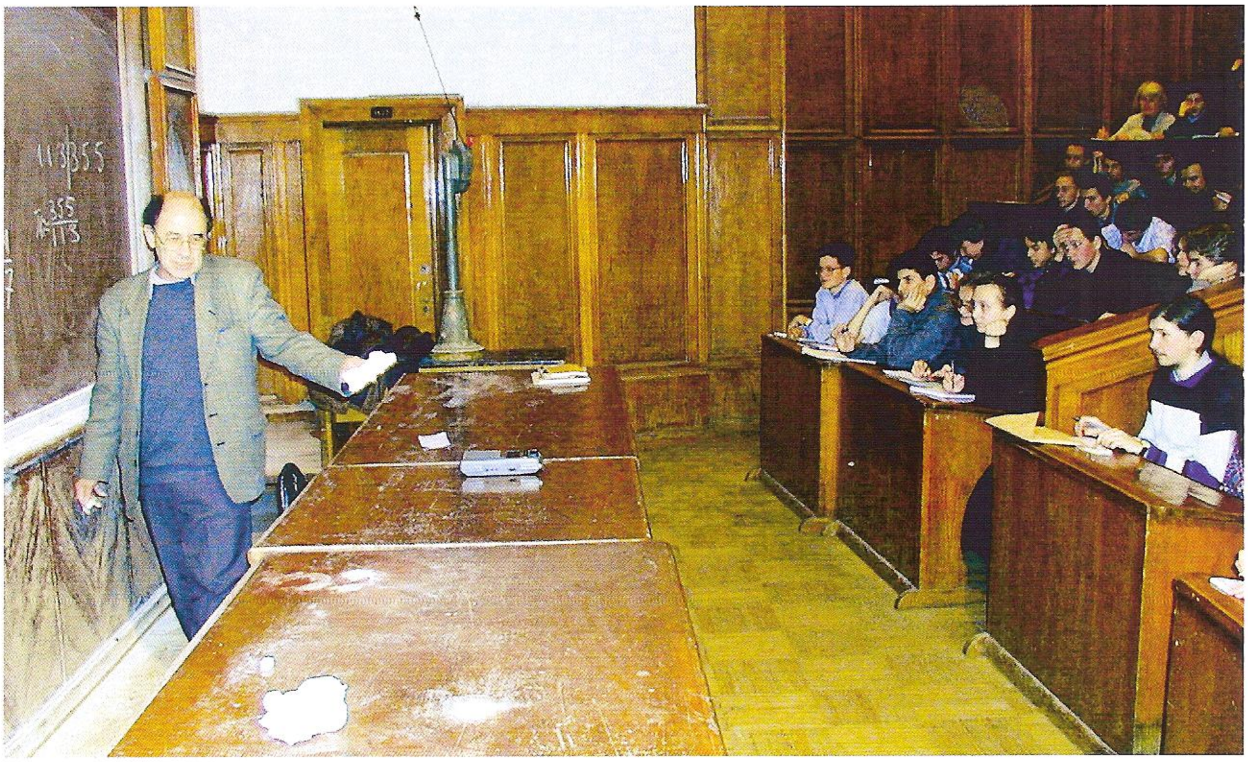
БИК: 044525161

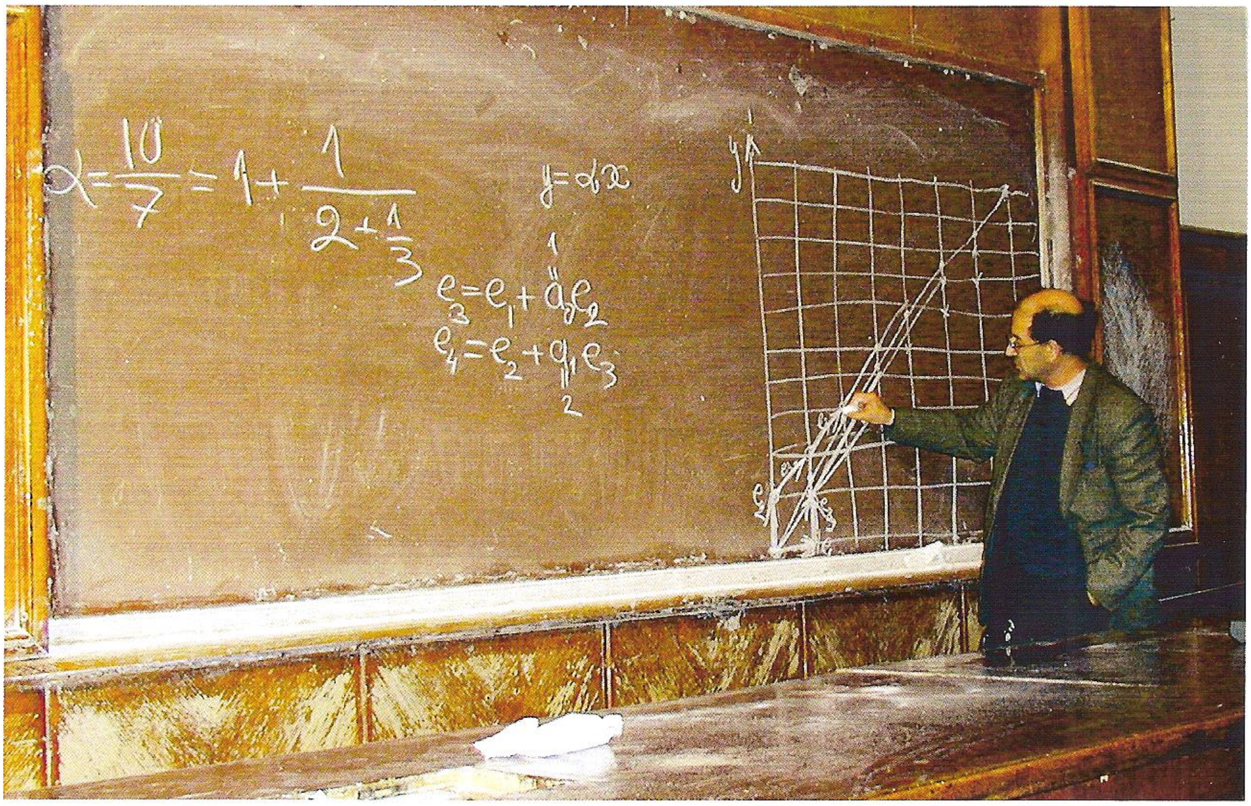
Корр. счет: 30101810945250000161

Академик Арнольд В.И. читает лекцию для школьников на Малом мехмате 2 декабря 2000 г.

Фотографии представлены Якушкиным П.А.


$2+\frac{1}{3}$
$\pi r^2 l$
$\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}$

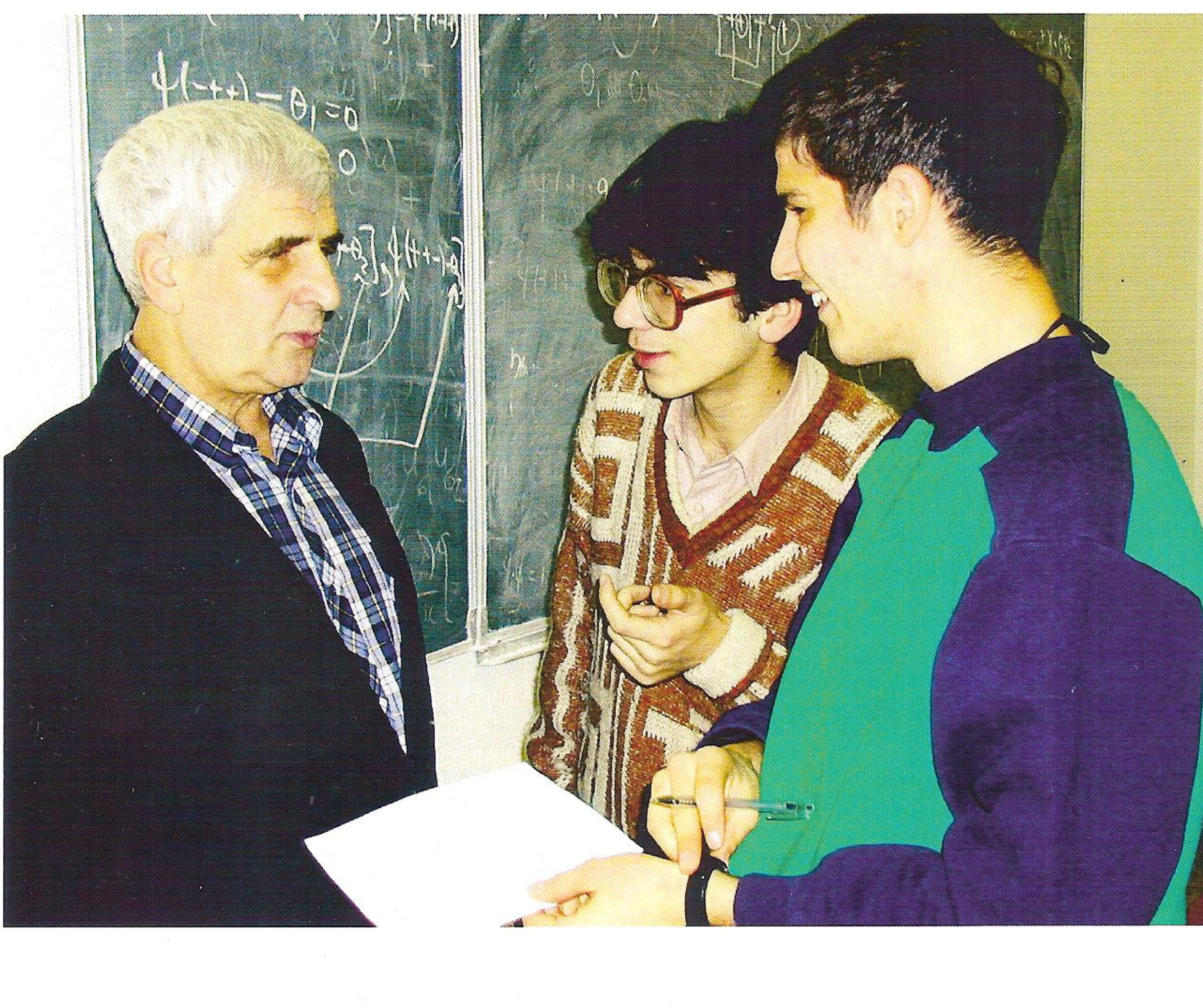

113|355
355
113

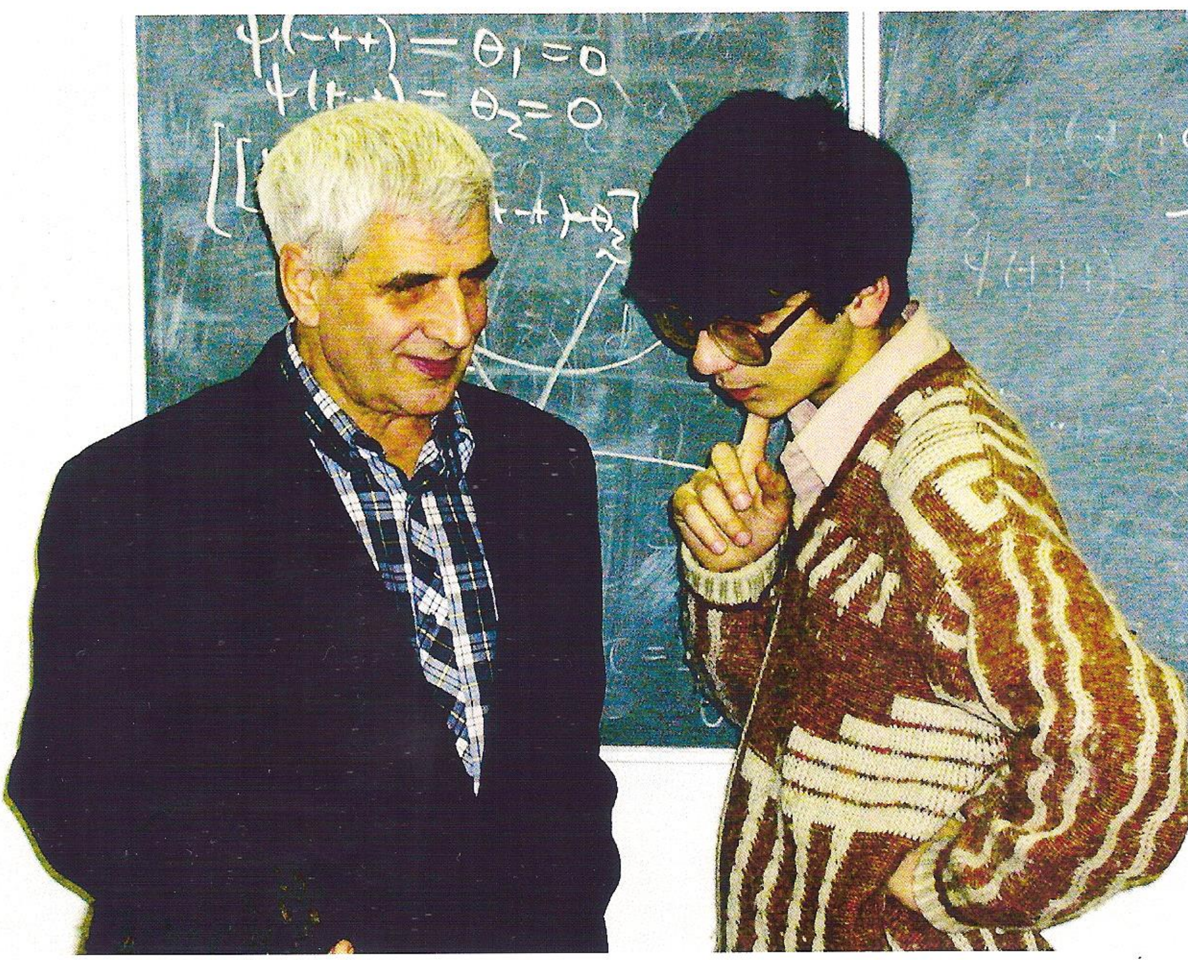


y = αx

Константинов Н.Н. проводит кружок в МЦНМО 10 октября 2000 г.

Фотографии представлены Якушкиным П.А.




$\psi(-++) = \theta_1 = 0$