

Задачи к семинару 9.10.25

1. (А.Шевцов. Олимпиада им. Шарыгина, 2023) В треугольнике ABC проведена медиана AM и на ней выбрана точка D . Касательные, проведенные к описанной окружности треугольника BDC в точках B и C , пересекаются в точке K . Докажите, что DD' параллельно AK , где D' — точка, изогонально сопряженная точке D относительно треугольника ABC .
2. (А.Заславский. Олимпиада им. Шарыгина) Дан треугольник ABC . Рассмотрим точки P , обладающие следующим свойством: если P_a, P_b, P_c — проекции P на прямые BC, CA, AB соответственно, то прямые AP_a, BP_b, CP_c пересекаются в одной точке S . Докажите, что все прямые PS проходят через одну точку.
3. (А.Заславский. ЛКТГ, 2010 и 2020) Внутри треугольника XYZ взяты точка D и ее изогонально сопряженная точка D' . На лучах XD и XD' взяты соответственно точки A' и A такие, что $XD \cdot XA = XD' \cdot XA' = XY \cdot XZ$. Аналогично на лучах YD и YD' определим точки B' и B , а на лучах ZD и ZD' точки C' и C .
Пусть P_X — точка пересечения AD и BC , P_Y — точка пересечения AC и BD , P_Z — точка пересечения AB и CD . Точки Q_X, Q_Y, Q_Z определяются аналогично по точкам A', B', C', D' . Докажите, что
 - (а) прямые P_XQ_X, P_YQ_Y, P_ZQ_Z пересекаются в одной точке;
 - (б) эта точка лежит на окружности XYZ ;
 - (в) прямые P_XQ_Y, P_YQ_X и XY пересекаются в одной точке Z_0 ;
 - (г) при этом прямая ZZ_0 параллельна прямым AA', BB', CC', DD' .
4. В треугольнике ABC H — ортоцентр, H_a — основание высоты из A , A' — точка описанной окружности, диаметрально противоположная A . Аналогично определим H_b, B', H_c, C' . Докажите, что окружности HH_aA', HH_bB', HH_cC' имеют две общие точки.
5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Лучи BA и CD пересекаются в точке E , а лучи AD и BC в точке F . Оказалось, что $ED = FD$. Докажите, что инцентры треугольников ADE и CDF равноудалены от O .
6. Пусть T_1, T_2 — точки Торричелли треугольника, а F_1, F_2 — фокусы вписанного эллипса Штейнера. Докажите, что четырехугольник $T_1F_1T_2F_2$ — гармонический.

7. Дан правильный треугольник ABC с центром O и точка P . Прямые AP , BP , CP пересекают BC , CA , AB в точках D , E , F соответственно. Докажите, что окружности AOD , BOE , COF имеют две общие точки.
8. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон BC , CA , AB в точках A' , B' , C' соответственно. Три мухи одновременно начали движение с постоянными скоростями из точек A , B , C и одновременно приползли в A' , B' , C' соответственно. В какой-то момент времени они были на одной прямой p_1 , а в другой момент — на прямой p_2 . Докажите, что эти прямые перпендикулярны.
9. Пусть точки B , C , D , E , F лежат на одной окружности. Прямые DE и DF пересекают BC в точках X и Y . Пусть описанная окружность треугольника DXY пересекает описанную окружность треугольника BCD в точке Z . Докажите, что E , F , точка, симметричная Z относительно BC и точка T такая, что $BDCT$ — параллелограмм, лежат на одной окружности.
10. Докажите, что три окружности, каждая из которых касается одной из сторон треугольника в ее середине и проходит через середину отрезка между центроидом и соответствующей вершиной, пересекаются в одной точке.