НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Жук В. В.,
г. Алматы, Республика Казахстан
vladimir_zhuk@mail.ru

При нахождении расстояний между скрещивающимися прямыми у учеников очень часто возникают сложности, появление которых, скорее всего, обусловлены тем, что скрещивающиеся прямые не имеют общих точек и не лежат в одной плоскости. Решать эту задачу, опираясь на определение (находя длину общего перпендикуляра), в подавляющем большинстве случаев не является блестящей идеей, так как трудно за что-то "зацепиться".

Существуют несколько опосредованных методов нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, одним из которых является метод проекций, опирающийся на знаменитую лемму И. Ф. Шарыгина.

Лемма 1 (И. Ф. Шарыгин). *Расстояние между скрещивающимися прямыми расстоянию от точки, являющейся проекцией одной из данных прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на эту плоскость.*

Алгоритм вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, опирающийся на эту лемму, заключается в следующем.

1) **Строим плоскость, перпендикулярную одной из скрещивающихся прямых.**

2) **Находим проекции этих прямых на данную плоскость.**

3) **Проекция одной из этих прямых на эту плоскость является точкой. Вычисляем расстояние от этой точки до проекции другой прямой на эту плоскость. Это расстояние и будет искомым.**

Мы предлагаем несколькомодификация метода проекций, которая в некоторых случаях позволяет значительно облегчить процесс нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

Иногда искомая плоскость, перпендикулярная, одной из скрещивающихся прямых, проглядывается очевидным образом. В некоторых случаях приходится производить дополнительные манипуляции, чтобы построить эту плоскость.

Нами разработаны два новых метода вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми, которые позволяют избежать необходимости построения дополнительных плоскостей. Всё, что требуется, это умение находить расстояние от точки до прямой и расстояние от точки до плоскости.

Вычисление расстояния от точки до прямой может быть сведено к стандартной планиметрической задаче нахождения высоты треугольника. Для большинства многогранников, изучаемых в школьном курсе геометрии, задача вычисления расстояния от точки до плоскости не является сверхсложной, если в качестве этой плоскости выступает плоскость основания или боковой грани многогранника.

Разработанные нами методы опираются на доказанные нами теоремы 1 и 2, которые, в свою очередь, вытекают из приведённой выше леммы.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в тетраэдре $DABC$ ребро DA перпендикулярно плоскости ABC основания, тогда расстояние d между скрещивающимися прямыми AC и BD может быть вычислено по формуле*

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \tag{1}$$

где $a = DA$, $b = BK$ — высота треугольника ABC, опущенная из вершины B.

Доказательство. Пусть рёбра AB и AC не перпендикулярны.

Достроим треугольник AKB до параллелограмма $AKBB'$ (рис. 1). Так как $BK \perp AC$, то $AKBB'$ — прямоугольник.

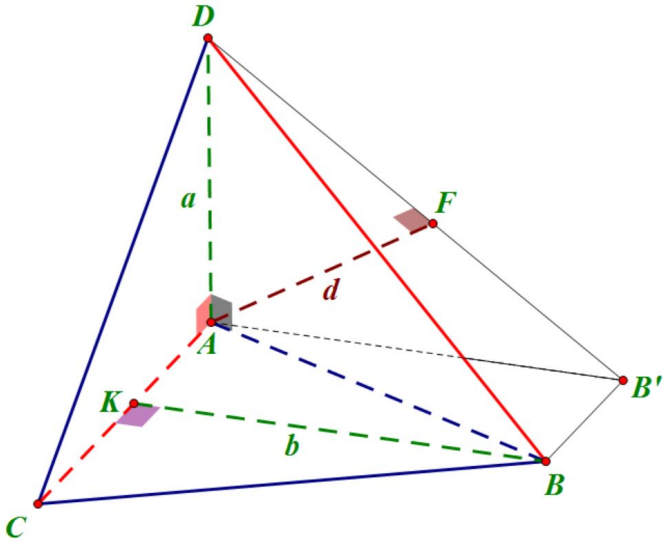


Рис. 1.

$AC \perp AD$, $AC \perp AB'$, следовательно, $AC \perp (DAB')$ (выполняется признак перпендикулярности прямой и плоскости). Так как BB' параллельна прямой AC, то ортогональной проекцией BD на плоскость DAB является прямая $B'D$.

Согласно лемме

$$d = \rho(A, (B'D)) = AF,$$

где AF — высота треугольника DAB.

Треугольник DAB прямоугольный. Значит,

$$\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{DA^2} + \frac{1}{B'A^2}.$$

Учитывая, что $B'A = BK$, получаем требуемое равенство (1).

Случай $AB \perp AC$ очевиден.

Теорема 1 доказана.

Таким образом, чтобы вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми можно применить следующий алгоритм.

Пусть прямая l лежит в плоскости α, а скрещивающаяся с ней прямая m пересекает плоскость α в точке M.

1) **Из точки M опустим перпендикуляр MM_0 на прямую l.**

2) **На прямой m выберем такую точку N, что её проекция на плоскость α, точка N_0, лежит на прямой l.**

3) **По формуле** (1) **расстояние d между прямыми l и m находится из равенства**

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{NN_0^2} + \frac{1}{MM_0^2}.$$

Замечание. Во многих задачах точки N и N_0 можно без труда определить. Если же эти точки явно не проглядываются, то точку N_0 определяем как точку пересечения прямой l и прямой m', являющейся проекцией прямой m на плоскость α. Точка N является точкой пересечения прямой m с перпендикуляром, восстановленным к плоскости α в точке N_0. В случае, когда прямые l и m' параллельны, будем считать, что $NN_0 = \infty$, то есть $\dfrac{1}{NN_0^2} = 0$.

Задача 1 (Сканави, Группа В, №11.231). *Основанием пирамиды SAB является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы которого $AB = 4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а его длина равна 2. Найти расстояние между прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая — через точку C и середину ребра AB.*

Решение. Пусть P — середина ребра AC, а Q — середина ребра AB (рис. 2а). По условию задачи требуется найти рассояние d между прямыми SP и CQ.

Так как $SC \perp (ABC)$, то согласно теореме 1

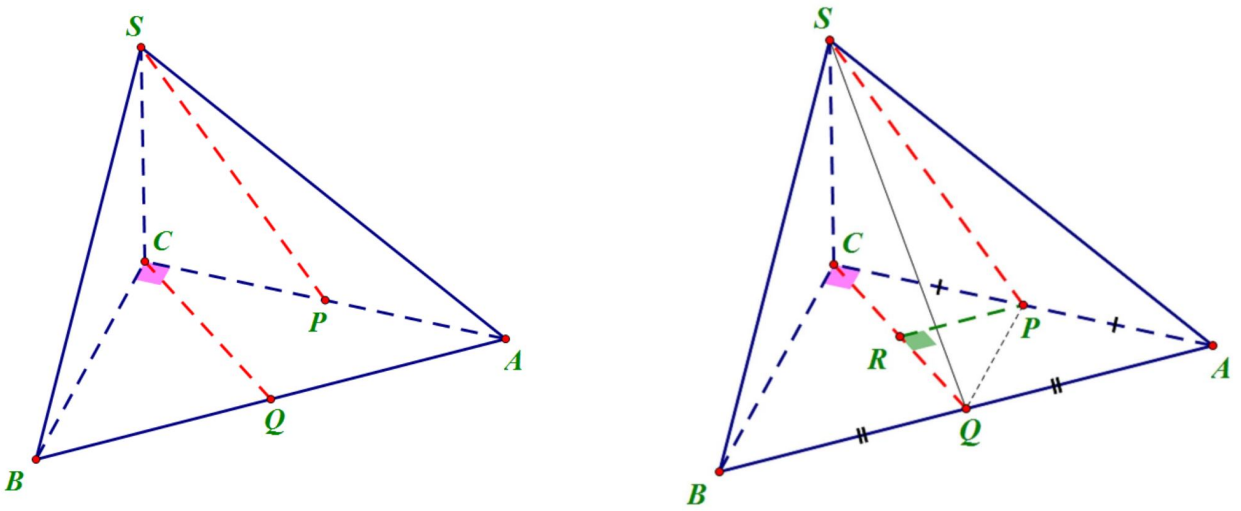
$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{PR^2},$$

где PR — высота треугольника CPQ.

По условию $SC = 2$. Нетрудно заметить, что PR — средняя линия треугольника CAQ, следовательно, $PR = \dfrac{1}{2}AQ = \sqrt{2}$.

Итак,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$



а) б)

Рис. 2.

Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 2. *Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BK, где K — середина ребра CC_1.*

Решение. Из точки B_1 опустим перпендикуляр BZ на прямую BK (рис. 3а). Заметим, также, что $AB \perp (BKB_1)$. Поэтому по теореме (1)

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BZ^2},$$

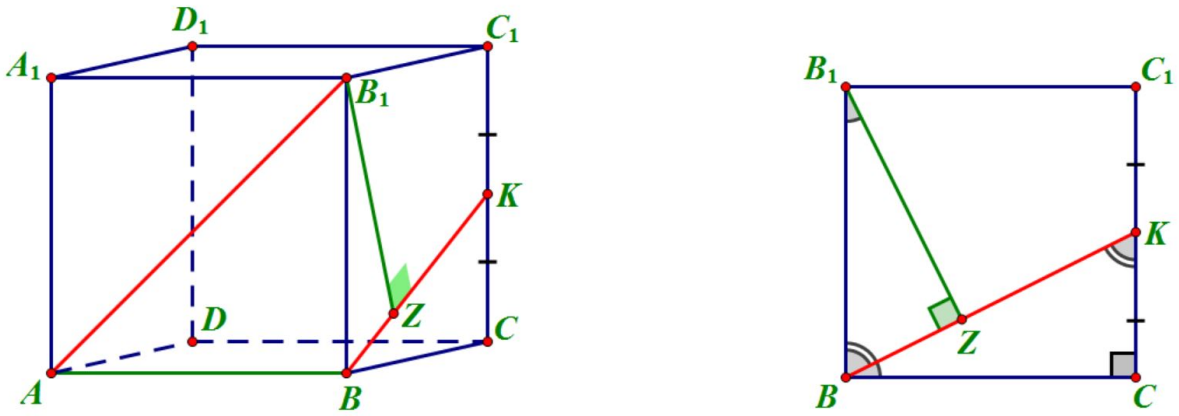
где $d = \rho(AB_1, BK)$ — расстояние между прямыми AB_1 и BK.

$AB = 2$, найдём BZ. Для этого рассмотрим квадрат BCC_1B_1 (рис. 3б). По теореме Пифагора находим

$$BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Прямоугольные треугольники BZB_1 и KCB подобны ($\angle BB_1Z = \angle KBC$). Следовательно,

$$\frac{BZ}{BB_1} = \frac{BC}{BK}.$$



а) б)

Рис. 3.

Отсюда

$$BZ = \frac{BC \cdot BB_1}{BK} = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{9}{16},$$

значит,

$$d = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Задача 3. *В основании прямой треугольной призмы* $ABCA_1B_1C_1$ *лежит треугольник со сторонами* $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = \sqrt{13}$, *боковое ребро равно* 6. *На ребре* A_1B_1 *выбрана точка* K *так, что* $A_1K : KB_1 = 3 : 2$. *Найти расстояние между прямыми* AK *и* BC.

Решение. Продлим AK до пересечения с прямой BB_1 в точке L и опустим перпендикуляр AH на прямую BC (рис. 4). Учитывая, что призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, по формуле (1) получаем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{BL^2} + \frac{1}{AH^2},$$

где d — расстояние между прямыми AK и BC.

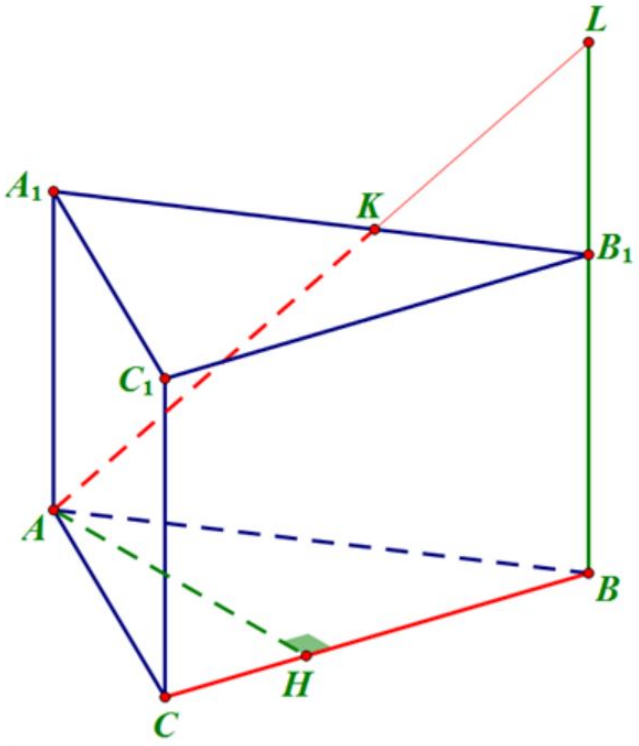


Рис. 4.

По теореме косинусов из треугольника ABC находим

$$\cos\angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4}{5}.$$

В прямоугольном треугольнике AHB ($\angle AHB = 90°$)

$$AH = AB \cdot \sin\angle ABC = AB \cdot \sqrt{1 - \cos^2\angle ABC} = \frac{5 \cdot 3}{5} = 3.$$

Треугольники KLB_1 и ALB подобны, поэтому

$$\frac{B_1L}{BL} = \frac{KB_1}{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BL - 6}{BL} = \frac{2}{5}.$$

Отсюда получаем $BL = 10$. Итак,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{100} + \frac{1}{9} = \frac{109}{900},$$

то есть

$$d = \frac{30\sqrt{109}}{109}.$$

Ответ: $\dfrac{30\sqrt{109}}{109}$.

Теорема 2. *Пусть $H = DO$ — высота тетраэдра $DABC$, $b = BK$ — высота треугольника ABC, лежащего в основании этого тетраэдра. Тогда расстояние d между скрещивающимися прямыми AC и BD вычисляется по формуле*

$$d = \frac{bH}{\sqrt{c^2 - h^2}}, \tag{2}$$

где $c = DB$, h — расстояние от точки O, основания высоты тетраэдра, до прямой BK.

Доказательство. Пусть для начала $O \notin (BK)$. Из точки O опустим перпендикуляр OL на прямую BK (рис. 5а), тогда $h = \rho(O, (BK)) = OL > 0$.

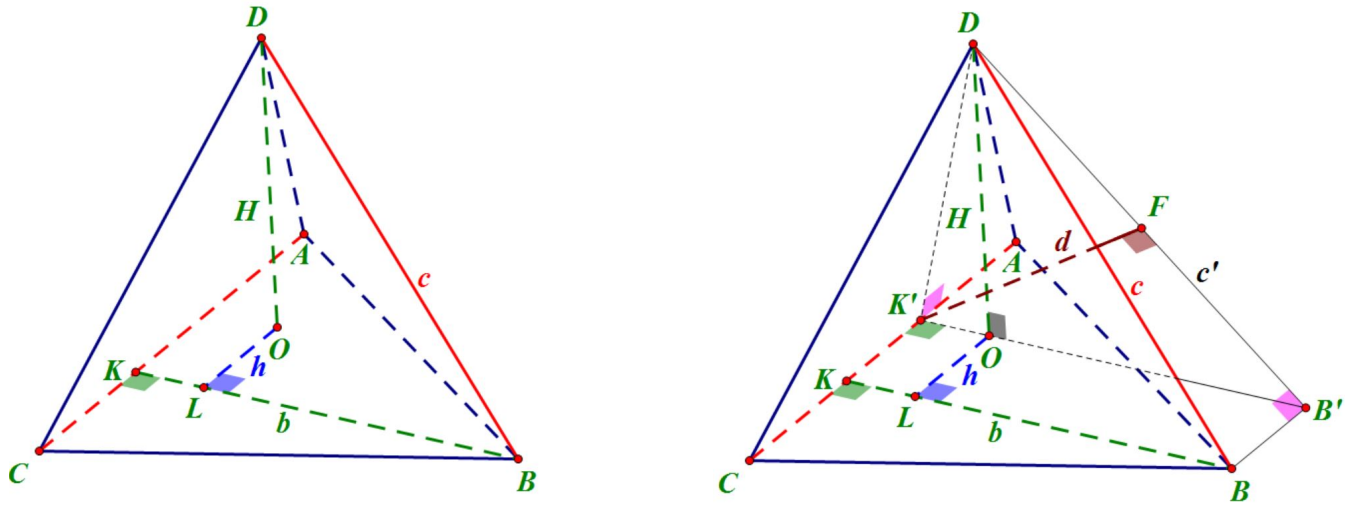


Рис. 5.

Пусть K' — ортогональная проекция точки O на прямую AC. Достроим треугольник BKK' до параллелограмма $BKK'B'$ (рис 5б). Так как $BK \perp AC$, то $BKK'B'$ — прямоугольник, при этом $O \in (B'K')$, $BK = B'K' = b$, $KK' = BB' = h$.

$AC \perp B'K'$ и $AC \perp DO$, значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $AC \perp (DK'B')$, причём ортогональной проекцией прямой AC на плоскость $DK'B$ является точка K'. Заметим далее, что ортогональной проекцией BD на плоскость $DK'B$ является прямая $B'D$.

Следовательно, по лемме

$$d = \rho(K', (B'D)) = K'F,$$

где $K'F$ — высота треугольника $DK'B'$.

Высота DO тетраэдра $DABC$ является также высотой треугольника $DK'B'$, поэтому

$$\frac{K'F}{DO} = \frac{B'K'}{B'D}.$$

Итак,

$$K'F = \frac{B'K' \cdot DO}{B'D} = \frac{bH}{B'D}.$$

Далее воспользуемся тем фактом, что $BB' \parallel AC$ и $BB' \perp (DK'B')$. Отсюда, $DB' \perp BB'$. Наконец, применяя теорему Пифагора к треугольнику $DB'B$, получаем

$$B'D = \sqrt{BD^2 - (BB')^2} = \sqrt{c^2 - h^2}.$$

Таким образом,

$$d = K'F = \frac{bH}{\sqrt{c^2 - h^2}}.$$

В случае, когда $O \in (BK)$, то есть $h = 0$, вместо треугольника $DK'B'$ следует рассмотреть треугольник DKB. Дальнейшие рассуждения аналогичны.

Теорема доказана.

Теорема 2 позволяет вычислить расстояние между скрещивающимися прямыми по следующему алгоритму.

Пусть прямая l лежит в плоскости α, а скрещивающаяся с ней прямая m пересекает плоскость α в точке M.

1) **Из точки M опустим перпендикуляр MM_0 на прямую l.**

2) **На прямой m выберем произвольную точку N ($N \neq M$), и опустим из неё перпендикуляр NN_0 на плоскость α.**

3) **Из точки N_0 опустим перпендикуляр N_0H на прямую MM_0 Расстояние d между прямыми l и m находим по формуле**

(2), **то есть**

$$d = \frac{MM_0 \cdot NN_0}{\sqrt{MN^2 - N_0H^2}}.$$

Второй алгоритм позволяет обойти достаточно жёсткое требование первого алгоритма, чтобы проекция точки N на плоскость α лежала на прямой l.

Альтернативное решение задачи №3. Из точки Kопустим перпендикуляр KP на плоскость ABC (рис. 6). Так как призма прямая, то точка P, будет лежать на ребре AB. В треугольнике ABC проведём высоту AH, и из точки P опустим перпендикуляр PQ на прямую AH. Применив формулу (2) для нахождения расстояния d между скрещивающимися прямыми AK и BC, получим

$$d = \frac{AH \cdot KP}{\sqrt{AK^2 - PQ^2}}.$$

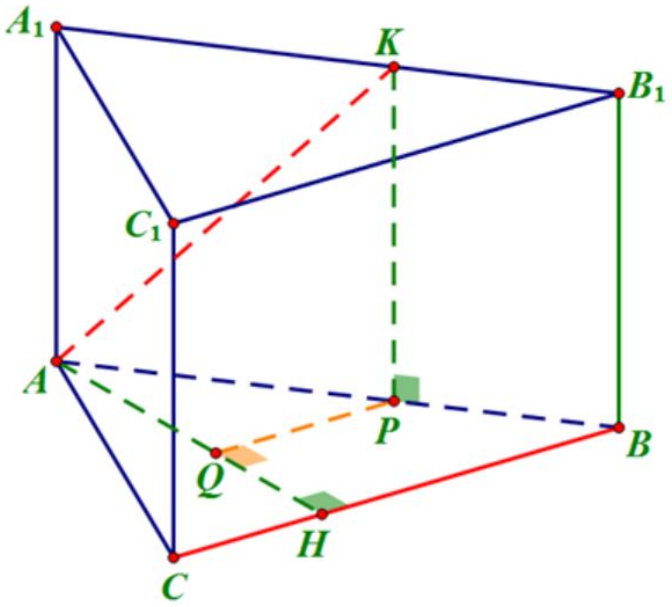


Рис. 6.

В предыдущем решении этой задачи было установлено, что $AH = 3$. Также имеем $BH = AB \cdot \cos\angle ABC = 4$.

Заметим, что $KP = BB_1 = 6$, $BP = B_1K = 2$, $AP = A_1K = 3$. Из прямоугольного треугольника AA_1K ($\angle AA_1K = 90°$) по теореме Пифагора найдём

$$AK = \sqrt{AA_1^2 + AK^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AQP и AHB следует, что

$$\frac{PQ}{BH} = \frac{AP}{PB} = \frac{3}{5}.$$

Отсюда

$$PQ = \frac{3}{5}BH = \frac{12}{5}.$$

Осталось вычислить

$$d = \frac{3 \cdot 6}{\sqrt{45 - \dfrac{144}{25}}} = \frac{30\sqrt{109}}{109}.$$

Ответ: $\dfrac{30\sqrt{109}}{109}$.

Задача 4. *В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания равна 2, а высота равна 3. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.*

Решение.

Первый способ. Из точки B опустим перпендикуляр BK на прямую AB_1 (рис. 7).

В равностороннем треугольнике $A_1B_1C_1$ проведём высоту CF_1, которая также является медианой и биссектрисой. Заметим, что $C_1F \perp (ABB_1)$ ($CF_1 \perp A_1B_1$, $CF_1 \perp BB_1$, $AB \cap BB_1 = B$).

Отрезок BF пересекает AB_1 в точке P. Через точку P в плоскости треугольника BFC_1 параллельно C_1 проведём прямую до пересечения с BC_1 в точке Q. Так как $PQ||C_1$, то $PQ \perp (ABB_1)$.

По теореме 1

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{QP^2} + \frac{1}{BK^2},$$

где d — искомое расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Длину BK найдём как высоту прямоугольного треугольника ABB_1 ($\angle ABB_1 = 90°$):

$$BK = \frac{AB \cdot BB_1}{AB_1} = \frac{AB \cdot BB_1}{\sqrt{AB^2 + BB_1^2}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

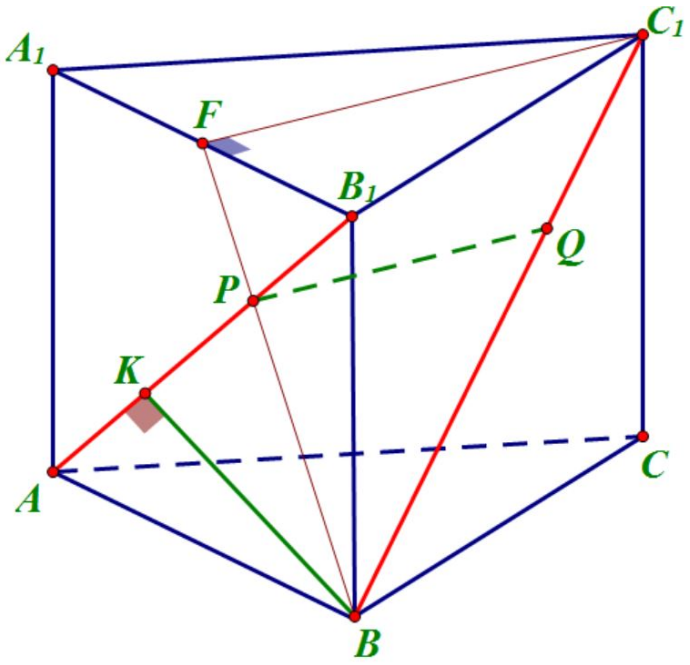


Рис. 7.

Треугольник ABP и B_1FP подобны. Следовательно

$$\frac{FP}{BP}\frac{FB_1}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из подобия треугольников BPQ и BFC_1

$$\frac{QP}{C_1F} = \frac{BP}{BF} = \frac{2}{3}.$$

Значит,

$$QP = \frac{2}{3}C_1F = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{d^2} = \frac{3}{4} + \frac{13}{36} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9},$$

те есть

$$d = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Второй способ. Пусть BK, C_1F — высоты треугольников ABB_1 и $A_1B_1C_1$ соответственно (рис. 8). Из точки F опустим перпендикуляр FT на прямую BK.

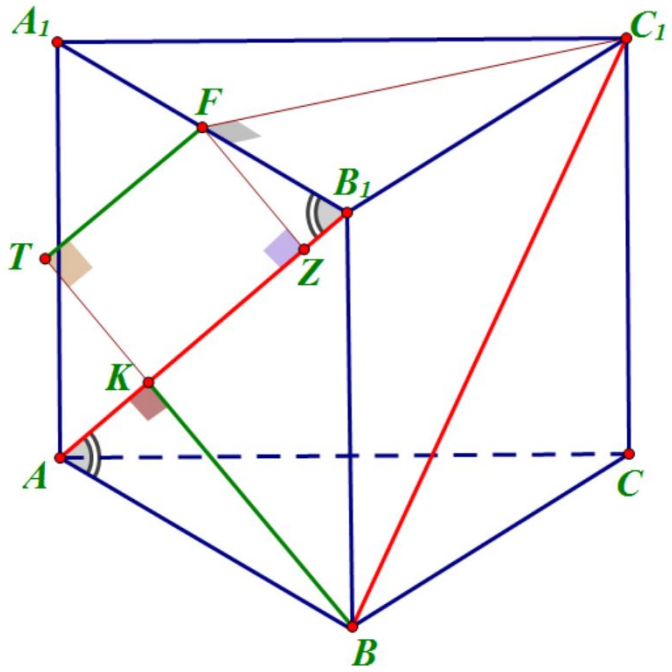


Рис. 8.

По теореме 2 расстояние d между прямыми AB_1 и BC_1 находится по формуле

$$d = \frac{BK \cdot C_1F}{\sqrt{BC_1^2 - FT^2}}.$$

Мы знаем, что

$$BK = \frac{6}{\sqrt{13}}, C_1F = \sqrt{3}, AB_1 = BC_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

Опустим перпендикуляр FZ на прямую AB_1, тогда $TFZK$ — прямоугольник, и $FT = KZ$.

BK — высота прямоугольного треугольника ABB_1, значит,

$$\frac{AK}{KB_1} = \frac{AB^2}{BB_1^2} = \frac{4}{9}.$$

Отсюда

$$AK = \frac{4}{13}AB_1.$$

Треугольники BAK и B_1FZ подобны как прямоугольные треугольники с равными острыми углами, отсюда

$$\frac{B_1Z}{AK} = \frac{FB_1}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно $B_1Z = \dfrac{1}{2}AK = \frac{2}{13}AB_1$.

Таким образом,

$$FT = KZ = \left(1 - \frac{6}{13}\right) AB_1 = \frac{7}{13}AB_1 = \frac{7}{\sqrt{13}}.$$

Окончательно получаем

$$d = \frac{\dfrac{6}{\sqrt{13}} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{13 - \dfrac{49}{13}}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{120}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

Задача 5. *В треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) все боковые рёбра имеют длину $\frac{25\sqrt{17}}{8}$, а в основании лежит треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $BC = 15$, $AC = 14$. Найдите расстояние между прямой AC и медианой BP грани SBC.*

Решение. Из точки P опустим перпендикуляр PP' на плоскость ABC. Затем в треугольнике ABC проведём высоту BB_1, и из точки P' опустим перпендикуляр $P'Q$ на BB_1 (Рис. 7а).

Применим формулу (2) для нахождения расстояния d между скрещивающимися прямыми AC и BP, получим

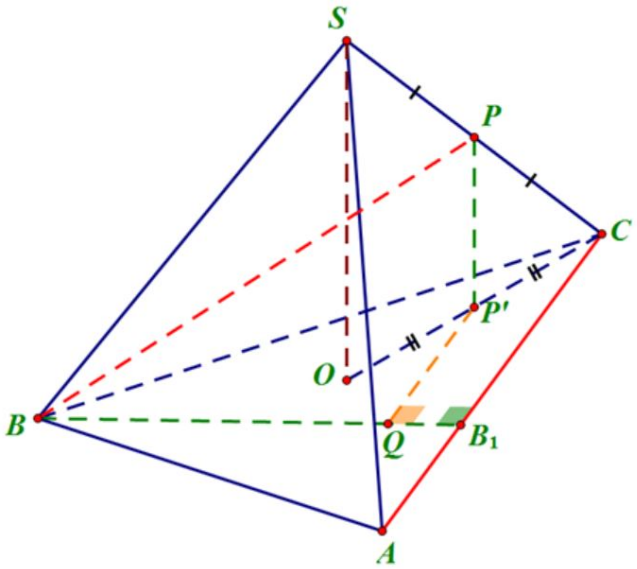
$$d = \frac{BB_1 \cdot PP'}{\sqrt{BP^2 - P'Q^2}}.$$

Используя формулу Герона находим площадь треугольника ABC:

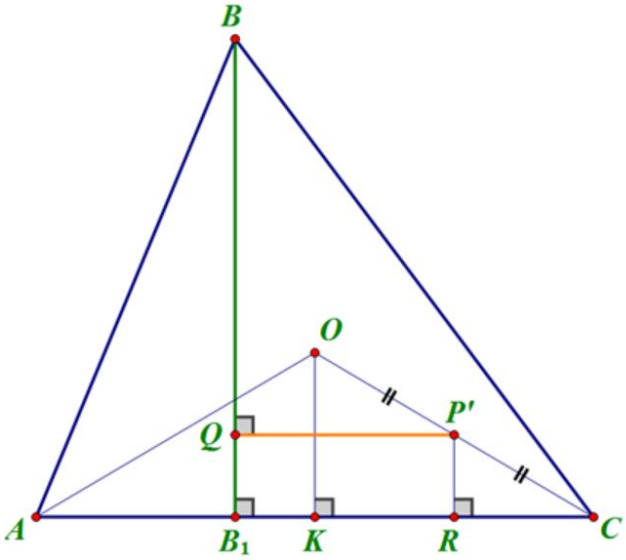
$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AB)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84,$$

здесь $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = 21$ — полупериметр треугольника ABC. Теперь без труда находим высоту BB_1 треугольника ABC

$$BB_1 = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AC} = \frac{2 \cdot 84}{14} = 12.$$



а)



б)

Рис. 9.

Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, тогда PP' — средняя линия прямоугольного треугольника SOC ($\angle SOC = 90°$), поэтому

$$PP' = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2}\sqrt{SC^2 - CO^2}.$$

Так как $SA = SB = SC = \dfrac{25\sqrt{17}}{8}$, то точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, а CO — радиус этой окружности, поэтому

$$CO = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{13 \cdot 15 \cdot 14}{4 \cdot 84} = \frac{65}{8}.$$

Итак,

$$PP' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{10625}{64} - \frac{4225}{64}} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5.$$

BP — медиана треугольника SBC, следовательно,

$$BP = \frac{1}{2}\sqrt{2(SB^2 + BC^2) - SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(\frac{10625}{64} + 225\right) - \frac{10625}{64}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11075}{64}} = \frac{5\sqrt{443}}{16}.$$

Из точек O и P' опустим на сторону AC, соответственно, перпендикуляры OK и $P'R$ (Рис. 7б). Четырёхугольник $QP'RB_1$ — прямоугольник, значит,

$$P'Q = RB_1 = |CB_1 - CR|.$$

. Из прямоугольного треугольника BB_1C ($BB_1C = 90°$) по теореме Пифагора находим

$$CB_1 = \sqrt{BC^2 - BB_1^2} = \sqrt{225 - 144} = \sqrt{81} = 9.$$

Поскольку OK — серединный перпендикуляр, и $P'R$ – средняя линия треугольника OKC, то

$$CR = \frac{1}{2}CK = \frac{1}{4}AC = \frac{7}{2}.$$

Получаем

$$P'Q = \left|9 - \frac{7}{2}\right| = \frac{11}{2}.$$

Осталось вычислить

$$d = \frac{BB_1 \cdot PP'}{\sqrt{BP^2 - P'Q^2}} = \frac{12 \cdot 5}{\sqrt{\frac{11075}{256} - \frac{121}{4}}} = \sqrt{960}\sqrt{3331} = \frac{960\sqrt{3331}}{3331}.$$

Ответ: $\frac{960\sqrt{3331}}{3331}$.

Следствие 1. *Пусть $H = DO$ — высота тетраэдра $DABC$, и $b = BK$ — высота треугольника ABC, лежащего в основании этого тетраэдра. Тогда расстояние d между скрещивающимися прямыми AC и BD вычисляется по формуле*

$$d = \frac{bH}{c'} = \frac{bH}{c\sin\psi}, \tag{3}$$

где c' — расстояние от точки D до прямой l, проходящей через точку B параллельно прямой AC, $c = BD$, ψ — угол между прямыми AC и BD.

Доказательство. В процессе доказательства теоремы 2 установлено, что $DB' \perp BB'$, при этом $BB' \parallel AC$ (см. рис. 5б). Значит, $c' = DB' = \sqrt{c^2 - h^2} = c\sin\psi$. Наконец, применяя формулу 2, получаем равенство (3).

Следствие 1 доказано.

Задача 6 (Смирнов, уровень С, с. 92, №14). *В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние между прямыми SB и DE.*

Решение. По условию

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA = 1,$$

$$SA = SB = SC = SD = SE = SF = 2.$$

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, лежащего в основании правильной шестиугольной пирамиды $SABCDEF$. Тогда

$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = 1.$$

и SO — высота пирамиды $SABCDEF$.

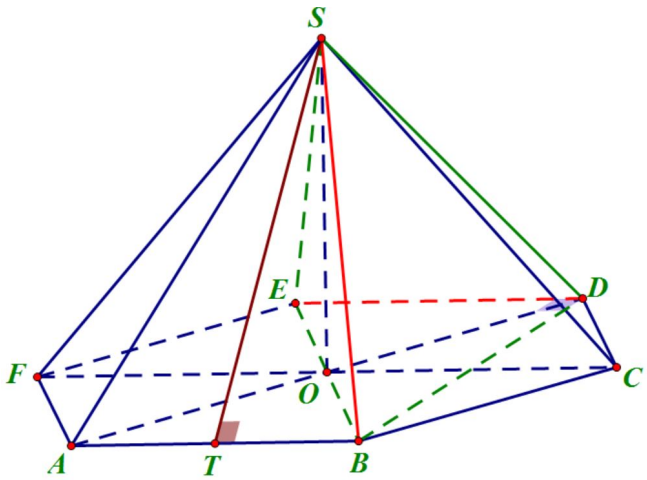


Рис. 10.

Заметим, что $BD \perp ED$, $AB \parallel ED$. Поэтому, по следствию 1

$$d = \rho(SB, DE) = \frac{BD \cdot SO}{ST}.$$

где BD — высота треугольника BDE, SO — высота тетраэдра $SBDE$, ST — расстояние от точки S до прямой AB.

Применяя теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику SOB, находим высоту SO пирамиды $SABCDEF$.

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{3}.$$

По теореме косинусов из треугольника BCD имеем

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos \angle BCD =$$

$$= 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3,$$

то есть

$$BD = \sqrt{3}.$$

Далее, ST — высота равнобедренного треугольника SAB ($SA = SB$). Значит,

$$ST = \sqrt{SB^2 - TB^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{AB^2}{4}} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

Наконец,

$$d = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{2\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{15}}{5}$.

Задача 7 (Родионов, Задача 6, с. 64). *Основанием треугольной пирамиды $TABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, высота пирамиды h, все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45°, а угол между боковым ребром TB и медианой CD равен 60°. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды, проходящей через медиану CD и пересекающей ребро TB?*

Решение. Все боковые рёбра пирамиды $TABC$ наклонены к плоскости основания под одинаковым углом 45°, следовательно, основанием

высоты пирамиды служит центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, то есть точка D.

Итак, $TD = h$ — высота пирамиды $TABC$, и

$$\angle TAD = \angle TBD = \angle TCD = 45^\circ,$$

$$AD = BD = CD = h,$$

$$TA = TB = TC = h\sqrt{2}.$$

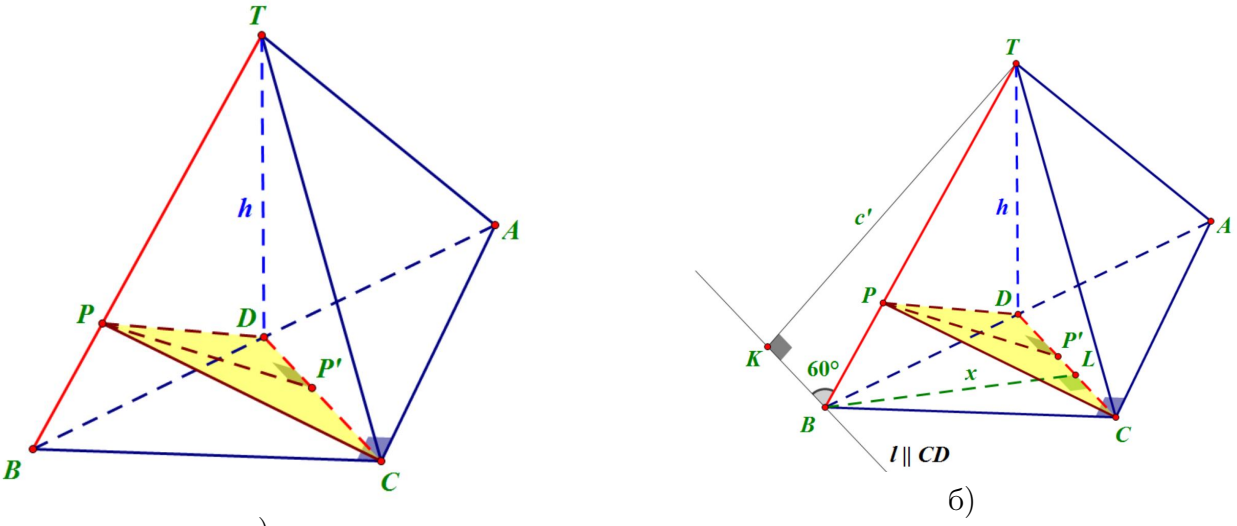


Рис. 11.

Пусть плоскость сечения пересекает ребро TB в точке P, тогда сечение — треугольник PCD (рис. 11а), его площадь

$$S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} CD \cdot h_P,$$

где $h_P = PP'$ — высота треугольника PCD.

Поскольку длина CD не зависит от расположения точки P, то минимальная площадь треугольника $S_{\triangle PCD}$ будет при минимальной высоте h_p, которая есть расстояние d между скрещивающимися прямыми CD и TB.

В треугольнике BCD проведём высоту BL и обозначим $BL = x$ (см.рис. 11б). Применяя формулу (3) с учётом того, что угол между прямыми CD и TB равен 60°, получим

$$d = \rho(CD, TB) = \frac{BL \cdot h}{TB \cdot \sin 60^\circ} = \frac{xh}{h\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2x}{\sqrt{6}}.$$

С другой стороны, по формуле (1) имеем

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Отсюда получим уравнение

$$\frac{3}{2x^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{h^2} \Leftrightarrow x = \frac{h}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$h_P = d = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Значит, искомая площадь

$$S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{h}{\sqrt{3}} = \frac{h^2\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{6}$.

Следствие 2. *Пусть тетраэдре $DABC$ проведены высоты DK' и BK граней DAC и ABC, соответственно. Тогда расстояние d между прямыми AC и BD вычисляется по формуле*

$$d = \frac{ab\sin\varphi}{\sqrt{c^2 - h^2}}, \tag{4}$$

где $a = DK'$, $b = BK$, $c = DB, h = KK'$, φ — величина двугранного угла $D(AC)B$.

Доказательство. Заметим, что $AC \perp (DK'B')$ (см. рис. 5б). Отсюда получаем, что угол $DK'B'$ является линейным углом двугранного угла $D(AC)B$. Следовательно,

$$\angle DK'B' = \angle D(AC)B = \varphi.$$

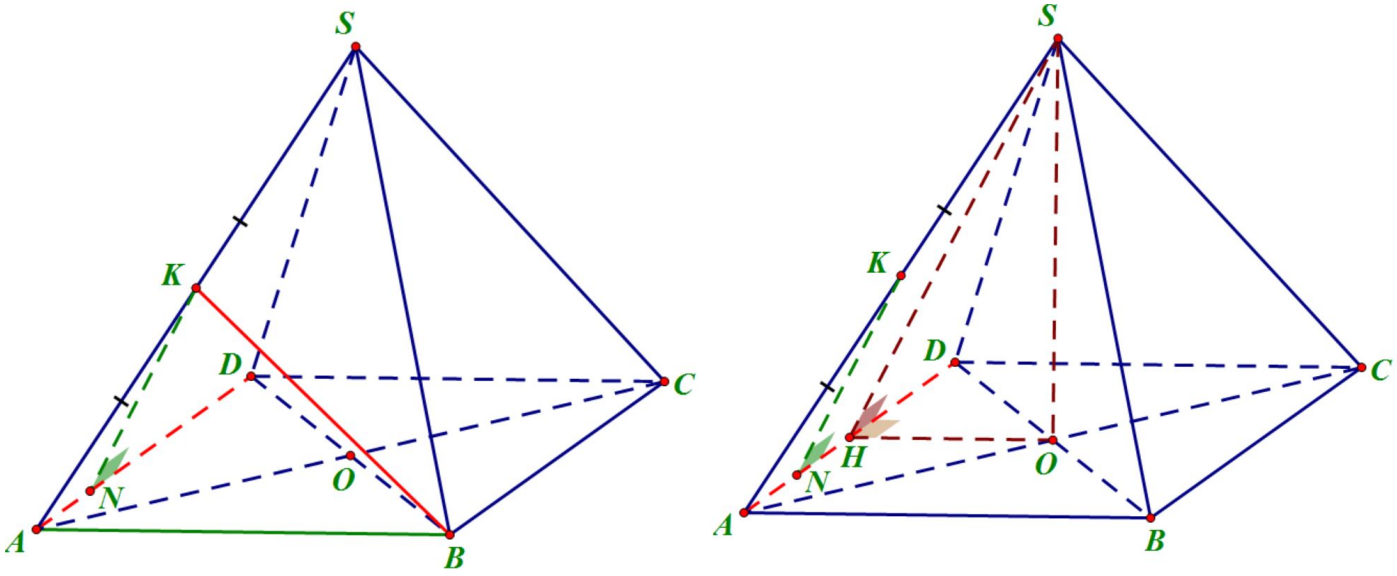
Чтобы получить равенство (4), осталось заметить, что

$$H = DO = DK' \cdot \sin\angle DK'B' = a\sin\varphi,$$

и применить формулу (2).

Задача 8 (Яковлев, mathus, задача 3). *В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) длина каждого ребра равна 4. Точка K — середина ребра SA. Найдите расстояние между прямыми AD и BK.*

Решение. Из точки K опустим перпендикуляр KN на ребро AD (рис. 12).



а) б)

Рис. 12.

Учитывая, что $AB \perp AD$, и применяя формулу (4), найдём искомое расстояние d между прямыми AD и BK.

$$d = \rho(AD, BK) = \frac{AB \cdot KN \cdot \sin\varphi}{\sqrt{BK^2 - AN^2}},$$

где $\varphi = \angle K(AN)B = \angle S(AD)B$.

$AB = 4$, $KN = \sqrt{3}$ (половина высоты SH равносторонненго треугольника SAD со стороной 4), $AN = \frac{1}{4}AD = 1$, $BK = 2\sqrt{3}$ (медиана равностороннего треугольника ASB со стороной 4).

Опустим высоту SO правильой пирамиды $SABCD$ (O — центр квадрата $ABCD$). Тогда $\angle SHO$ является линейным углом двугранного угла $S(AD)B$, следовательно, $\varphi = \angle S(AD)B = \angle SHO$.

Из прямоугольного треугольника SOH ($\angle SOH = 90°$) находим.

$$\sin\varphi = \frac{SO}{SH} = \frac{\sqrt{SH^2 - HO^2}}{SH} = \frac{\sqrt{12-4}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Остаётся вычислить

$$d = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{\sqrt{12-1}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{22}}{11}$.

Следствие 3. *Пусть тетраэдре $DABC$ проведены высоты DK' и BK и граней DAC и ABC, соответственно. Тогда расстояние d между прямыми AC и BD вычисляется по формуле*

$$d = \frac{\sqrt{a^2b^2 - \frac{\Delta^2}{4}}}{\sqrt{c^2 - h^2}}, \tag{5}$$

где $a = DK'$, $b = BK$, $c = DB$, $h = KK'$, $\Delta = a^2 + b^2 + h^2 - c^2$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник $DK'B'$. По теореме косинусов получаем

$$\cos\varphi = \frac{(DK')^2 + BK^2 - B'D^2}{2DK' \cdot BK} = \frac{a^2 + b^2 - (c')^2}{2ab} = \frac{a^2 + b^2 + h^2 - c^2}{2ab} = \frac{\Delta}{2ab}.$$

По формуле (4)

$$d = \frac{ab\sin\varphi}{\sqrt{c^2 - h^2}} = \frac{ab\sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{\sqrt{c^2 - h^2}} = \frac{ab\sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{4a^2b^2}}}{\sqrt{c^2 - h^2}} = \frac{\sqrt{a^2b^2 - \frac{\Delta^2}{4}}}{\sqrt{c^2 - h^2}}.$$

Следствие 3 доказано.

Альтернативное решение задачи №8. Воспользуемся формулой (5) для нахождения расстояния d между скрещивающимися прямыми AD и BK.

$$d = \rho(AD, BK) = d = \frac{\sqrt{AB^2 \cdot KN^2 - \frac{\Delta^2}{4}}}{\sqrt{BK^2 - AN^2}}.$$

Здесь $AB = 4$, $KN = \sqrt{3}$, $BK = 2\sqrt{3}$, $AN = 1$ (см. выше решение задачи №8),

$$\Delta = AB^2 + BK^2 + AN^2 - BK^2 = 16 + 3 + 1 - 12 = 8.$$

Окончательно получаем,

$$d = \frac{\sqrt{16 \cdot 3 - \dfrac{8^2}{4}}}{\sqrt{12 - 1}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3 - 16}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{22}}{11}$.

Задача 9. *В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (с вершиной S) сторона основания равна 2, а длина бокового ребра — 3. Точки K и L — середины ребер SA и SB, соответственно. Найдите расстояние между прямыми CK и AL.*

Решение. CK — медиана равнобедренных треугольника SAC, следовательно,

$$CK = \frac{1}{2}\sqrt{2(CS^2 + CA^2) - SA^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot (9 + 4) - 9} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Аналогично, в треугольнике SAB находим длину медианы AL:

$$AL = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

На прямую AL из точек C и K опустим, соответственно, перпендикуляры CP и KQ (см. рис. 13). Для вычисления расстояния d между скрещивающимися прямыми CK и AL применим формулу (5), получим

$$d = \rho(CK, AL) = \frac{\sqrt{CP^2 \cdot KQ^2 - \dfrac{\Delta^2}{4}}}{\sqrt{CK^2 - PQ^2}},$$

где $\Delta = CP^2 + KQ^2 + PQ^2 - CK^2$.

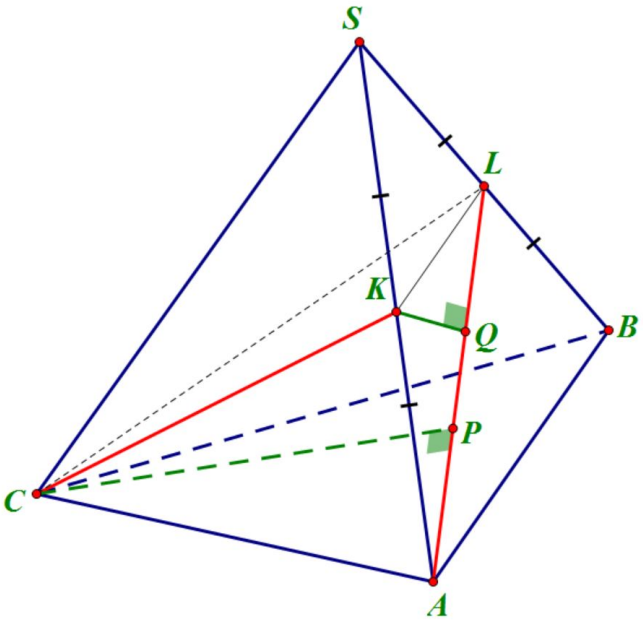


Рис. 13.

CP — высота треугольника ALC, в котором $AC = 2$, $AL = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$, $CL = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ (медиана треугольника SBC). Поэтому

$$CP = \frac{2S_{\Delta ALC}}{AL}.$$

Треугольник ALC равнобедренный ($AL = CL$), значит,

$$S_{\Delta ALC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \sqrt{AL^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{17}{4} - 1} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Отсюда

$$CP = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{17}}.$$

KQ является высотой треугольника AKL и может быть вычислена по формуле

$$KQ = \frac{2S_{\Delta AKL}}{AL}.$$

Точки K и L — середины ребер SA и SB, соответственно. Поэтому

$$S_{\Delta AKL} = \frac{1}{2}S_{\Delta ASL} = \frac{1}{4}S_{\Delta SAB}.$$

Учитывая, что треугольник SAB равнобедренный ($SA = SB$), получаем

$$S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sqrt{SA^2 - \frac{AB^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2},$$

и, значит,

$$S_{\Delta AKL} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом,

$$KQ = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}.$$

По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ACP ($\angle APC = 90°$) и AKQ ($\angle AQK = 90°$)найдём AP и AQ.

$$AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{4 - \frac{52}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}},$$

$$AQ = \sqrt{AK^2 - KQ^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{17}} = \sqrt{\frac{121}{68}} = \frac{11}{2\sqrt{17}}.$$

Далее,

$$PQ = |AP - AQ| = \left| \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{11}{2\sqrt{17}} \right| = \frac{3}{2\sqrt{17}}.$$

Вычислим Δ.

$$\Delta = CP^2 + KQ^2 + PQ^2 - CK^2 = \frac{52}{17} + \frac{8}{17} + \frac{9}{68} - \frac{17}{4} = -\frac{10}{17}.$$

Окончательно получаем,

$$d = \frac{\sqrt{CP^2 \cdot KQ^2 - \frac{\Delta^2}{4}}}{\sqrt{CK^2 - PQ^2}} = \frac{\sqrt{\frac{52}{17} \cdot \frac{8}{17} - \frac{100}{4 \cdot 17^2}}}{\sqrt{\frac{17}{4} - \frac{9}{68}}} = \frac{\sqrt{\frac{23}{17}}}{\sqrt{\frac{70}{17}}} = \sqrt{\frac{23}{70}} = \frac{\sqrt{1610}}{70}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{1610}}{70}$.