А. Блинков

Теорема Штейнера – Лемуса

Речь пойдёт об одной из самых удивительных теорем элементарной геометрии. Чем именно она удивляет, будет понятно после рассмотрения простых примеров.

Вспомним свойства высот; медиан и биссектрис равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам. Соответствующие отрезки равны. Напомним, как это доказывается.

Рис. 1а

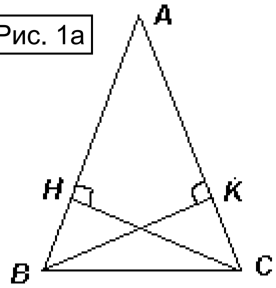
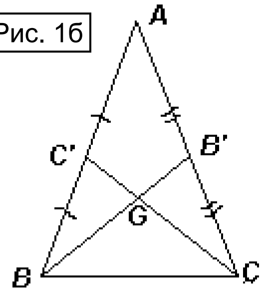


Рис. 1б

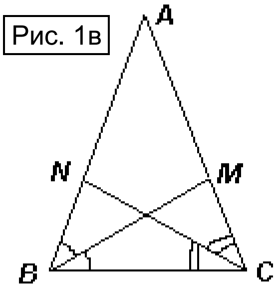


Пусть в треугольнике *ABC* равны стороны *AB* и *AC*. К этим сторонам проведены высоты, медианы и биссектрисы (см. рис. 1 а – в соответственно). Тогда:

а) $\Delta KBA = \Delta HCA$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow BK = CH$;

б) $\Delta ABB' = \Delta ACC'$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow BB' = CC'$;

Рис. 1в



в) $\Delta BCM = \Delta CBN$ (по стороне и прилежащим к ней углам) $\Rightarrow BM = CN$.

Теперь докажем обратные утверждения, которые являются признаками равнобедренного треугольника. Пусть в треугольнике ABC равны а) высоты; б) медианы; в) биссектрисы, проведённые к сторонам *AB* и *AC*. Тогда

а) $\Delta KAB = \Delta HAC$ (по катету и острому углу) $\Rightarrow AB = AC$;

б) Учитывая, что точка G делит каждую медиану в одном и том же отношении, $\Delta BGC' = \Delta CGB'$ (по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow BC' = CB' \Rightarrow AB = AC$; в) **?**

И тут выясняется, что элементарным образом не получается доказать, что **если две биссектрисы треугольника равны, то этот треугольник – равнобедренный**.

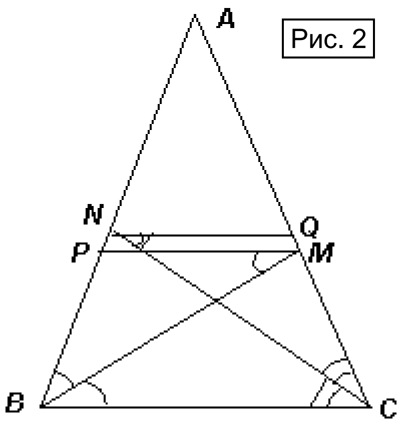
Формулировка этого утверждения была послана великому швейцарскому геометру, члену Берлинской академии наук, Якобу Штейнеру (1796 – 1863) в 1840 году Кристианом Лудольфом Лемусом, немецким математиком, профессором Берлинского университете, с просьбой дать чисто геометрическое доказательство. Его теперь так и называют: **теорема Штейнера – Лемуса**.

Доказательство Штейнера мы разбирать не будем, так как оно довольно громоздкое и, как выяснилось позже, работает не во всех случаях. Интересней разобрать три других геометрических доказательства.

На математическом кружке при мехмате МГУ, который работал в 1938 – 1941 годах под руководством Д.О. Шклярского, школьникам было предложено найти геометрическое доказательство этой теоремы. Два участника кружка справились с этой задачей.

1. Лидия Копейкина (впоследствии Л.И. Головина, доцент мехмата), 1939.

Рис. 2



Пусть биссектрисы *BM* и *CN* равны. Через точки *M* и *N* проведём прямые, параллельные *BC*, которые пересекут *AB* и *AC* в точках *P* и *Q* соответственно (см. рис. 2). Докажем, что отрезки *MP* и_*NQ* совпадают. Пусть это не так, и *MP* располагается к *BC* ближе, чем *NQ*, тогда $MP > NQ$. Из параллельности следует, что $PM = PB$ и $QN = QC$, то есть *BPM* и *CQN* – равнобедренные треугольники с равными основаниями. При этом, боковые стороны у *BPM* больше, чем у *CQN*, поэтому $\angle PBM > \angle QCN$. Тогда в трапеции *BPMC*: $\angle B > \angle C$, значит, $MP = BP < CM < CQ = NQ$. Полученное противоречие доказывает совпадение отрезков *MP* и *NQ*, откуда следует, что образовавшаяся трапеция равнобокая, значит, $\angle B = \angle C$, то есть $AB = AC$.

2. Владимир Болтянский (впоследствии известный математик, профессор В.Г. Болтянский), 1940.

Точку пересечения *BM* и *CN* обозначим через *O*. Докажем, что равны треугольники *ABM* и *ACN*. Для этого достаточно доказать равенство треугольников, в которых соответственно равны стороны, противолежащие углы и биссектрисы, проведённые к этим сторонам (см. рис. 3а).

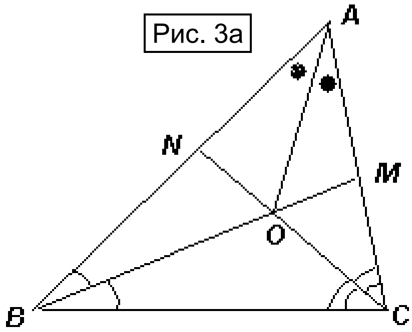


Рис. 3а

Совместим равные стороны *BM* и *CN* так, чтобы противолежащие вершины *A* и *A*' этих треугольников лежали в одной полуплоскости как относительно совпавших сторон, так и в одной полуплоскости относительно серединного перпендикуляра *DF* к ним. Опишем окружность около треугольника *ABM*, тогда вершина *A*' лежит на этой окружности (см. рис. 3б). При этом, продолжения обеих биссектрис пересекут окружность в середине *D* дуги *BM*.

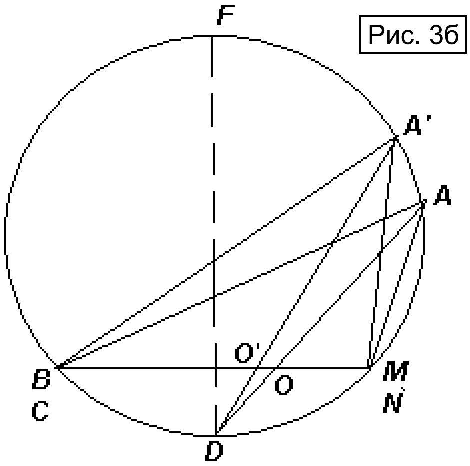


Рис. 3б

Пусть точки *A* и *A*' не совпадают, тогда, не умаляя общности, можно считать, что дуга *DA* меньше, чем дуга *DA*', тогда *AD* < *A*'*D*. Кроме того, $\angle FDA > \angle FDA'$, значит, точка *O* находится дальше от *DF*, чем *O*', поэтому *DO* > *DO*'. Из неравенств *AD* < *A*'*D* и *DO* > *DO*' следует, что *A*'*O*' > *AO*, что противоречит условию.

Таким образом, доказано равенство треугольников по указанным элементам, откуда следует равенство треугольников *ABM* и *ACN*, поэтому *AB* = *AC*, что и требовалось.

Наиболее короткое чисто геометрическое доказательство было придумано двумя английскими инженерами Г. Джильбертом и Д. Мак-Доннеллом и опубликовано в 1963 году в журнале American Mathematical Monthly.

3. Предположим, что биссектрисы *BM* и *CN* равны, но $AB \neq AC$, тогда без ограничения общности можно считать, что $\angle B = 2\beta < \angle C = 2\gamma$. Докажем, что тогда *BM* > *CN*, что приведёт к противоречию с условием.

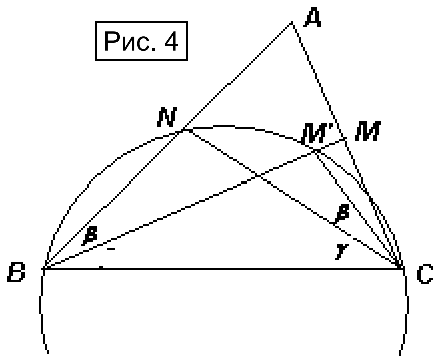


Рис. 4

На отрезке *BM* отметим точку *M*' так, что $\angle M'CN = \beta$ (см. рис. 4). Тогда точки *B*, *N*, *M*' и *C* лежат на одной окружности. Так как $\angle M'CB = \beta + \gamma. > 2\beta$, то *BM*' > *CN* (больший вписанный угол опирается на большую хорду). Следовательно *BM* > *CN*, то есть исходное предположение неверно, значит, *AB* = *AC*.

Обратим внимание, что все геометрические доказательства (и не только рассмотренные) так или иначе используют метод «от противного». Наиболее короткое алгебраическое доказательство также без него не обходится.

4. Введём обозначения так, как показано на рис. 5, и докажем, что $l_a = \dfrac{2bc\cos 0{,}5\alpha}{b+c}$. Действительно, так как $S_{ABC} = S_{ABL} + S_{ACL}$, то $bc\cdot\sin\alpha = b\cdot l_a\cdot\sin 0{,}5\alpha + c\cdot l_a\cdot\sin 0{,}5\alpha$. Учитывая, что $\sin\alpha = 2\sin 0{,}5\alpha\cdot\cos 0{,}5\alpha$, получим требуемое, выразив l_a.

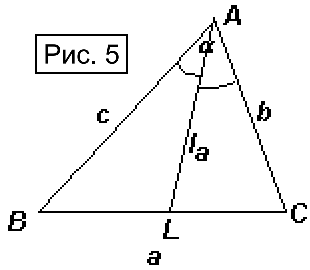


Рис. 5

Используя полученную формулу, докажем теорему.

Пусть $l_b = l_c$, *но* $b \neq c$. Рассмотрим $l_b = \dfrac{2ac\cdot\cos 0{,}5\beta}{a+c}$ и $l_c = \dfrac{2ab\cdot\cos 0{,}5\gamma}{a+b}$. Без ограничения общности можно считать, что *c* > *b*, тогда $\gamma > \beta \Leftrightarrow 0{,}5\gamma > 0{,}5\beta \Rightarrow \cos 0{,}5\gamma < \cos 0{,}5\beta$, при этом оба косинуса положительны, так как эти углы — острые.

Сравним: $\frac{ac}{a+c}-\frac{ab}{a+b}=\frac{a^2(c-b)}{(a+c)(a+b)}>0 \Rightarrow \frac{ac}{a+c}>\frac{ab}{a+b}$. Таким образом, $l_b>l_c$, что противоречит условию. Следовательно, $b = c$, что и требовалось доказать.

Отметим, что существует другой способ вывода использованной формулы биссектрисы (см. рис. 5): $BL^2 = c^2 + l_a^2 - 2c\cdot l_a\cdot\cos 0{,}5\alpha$; $CL^2 = b^2 + l_a^2 - 2b\cdot l_a\cdot\cos 0{,}5\alpha$. Так как $\frac{BL^2}{CL^2}=\frac{c^2}{b^2}$, то $b^2(c^2 + l_a^2 - 2c\cdot l_a\cdot\cos 0{,}5\alpha) = c^2(b^2 + l_a^2 - 2b\cdot l_a\cdot\cos 0{,}5\alpha) \Leftrightarrow l_a = \frac{2bc\cos 0{,}5\alpha}{b+c}$.

Заметим также, что $\cos 0{,}5\gamma < 1$, то $l_c<\frac{2ab}{a+b}$, то есть биссектриса треугольника меньше среднего гармонического сторон, между которыми она проведена. Вспомним, что медиана треугольника, проведенная к той же стороне, оценивается так: $m_c<\frac{a+b}{2}$, то есть она меньше среднего арифметического этих же сторон. Разница верхних границ соответствует известному неравенству $h_c \le l_c \le m_c$.

Возникает вопрос: существуют ли доказательства теоремы, не использующие метод «от противного»? Да, но все такие способы алгебраические, то есть используют какие-либо формулы. Чаще всего используется формула $l_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)bc}}{b+c}$. Вывод этой формулы довольно громоздкий, а дальнейшие выкладки ещё более громоздкие, поэтому обозначим их конспективно, а желающие могут восполнить пробелы самостоятельно.

5. Из свойства биссектрисы треугольника: $BL = \frac{ac}{b+c}$ (см. рис. 5). По теореме косинусов для треугольника ABC: $\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, тогда по теореме косинусов для треугольника ABL: $l_a^2 = c^2 + BL^2 - 2c\cdot BL\cdot\cos\beta = c^2 + \frac{a^2c^2}{(b+c)^2} - \frac{c(a^2+c^2-b^2)}{b+c} = \ldots = \frac{4p(p-b)bc}{(b+c)^2}$.

После этого записываются аналогичные формулы для биссектрис, проведённых к сторонам b и c, эти выражения приравниваются, и после очень громоздких преобразований это равенство приводится к виду: $(b - c)\,((b + c)\,(a^2 + ab) + 3abc + a^3) = 0$. Так как вторая скобка принимает только положительные значения, то $b = c$, что и требуется.

6. В заключение рассмотрим ряд задач, продолжающих идеи рассмотренной теоремы.

Задача 1 (*А. Шаповалов*). Выписаны 9 чисел – длины биссектрис, высот и медиан некоторого треугольника. Известно, что среди этих чисел не более четырех различных. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.

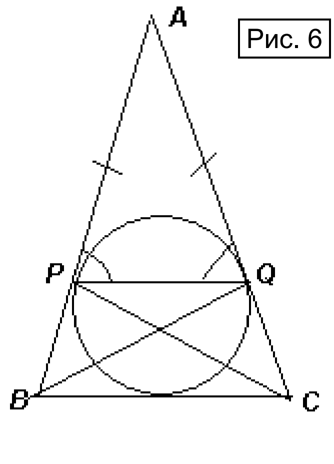
Решение. Рассмотрим неравенства: $h_a \le l_a \le m_a$; $h_b \le l_b \le m_b$; $h_c \le l_c \le m_c$. Если хотя бы в одном из неравенств стоит знак равенства, то, по признаку треугольник равнобедренный. Предположим, что все неравенства – строгие и $a > b > c$. Тогда, $h_a < h_b < h_c < l_c < m_c$ – противоречие с условием.

Задача 2. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что $BQ = CP$ тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

Решение. По свойству касательных к окружности $AP = AQ$ и $\angle APQ = \angle AQP$ (см. рис. 6). Тогда:

а) если $AB = AC$, то треугольники ABQ и ACP равны (по двум сторонам и углу между ними), откуда $BQ = CP$;

Рис. 6



б) если $BQ = CP$, то из равенства $\angle APQ = \angle AQP$ следует равенство углов с ними смежных, которые оба тупые. Тогда треугольники BQP и CPQ равны (по «четвертому» признаку), откуда $BP = CQ$. Следовательно, $AB = AC$.

<u>Задача 3</u>. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM и CN, которые пересекаются в точке I . Обязательно ли треугольник является равнобедренным, если:
а) $\angle ANL = \angle AML$; б) $IN = IM$; в) $LN = LM$.

<u>Ответ</u>: а) да; б) нет; в) нет.

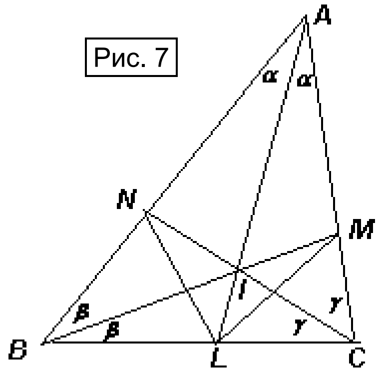


Рис. 7

<u>Решение</u>. См. рис. 7. а) Из условия следует равенство треугольников ANL и AML (по стороне и прилежащим углам), откуда $AN = AM$. Тогда равны треугольники ANI и AMI (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно $\angle ANI = \angle AMI$. Эти углы – внешние для треугольников BNC и CMB соответственно, значит, $2\beta + \gamma = 2\gamma + \beta$, то есть $\beta = \gamma$. Значит, $AB = AC$.

б) *Казалось бы, всё опять сведётся к равенству треугольников ANI и AMI, но в силу вступает «четвёртый признак равенства треугольников»: углы ANI и AMI могут быть неравными, а их сумма может быть равна 180°. Тогда строится контрпример.*

Пусть $AB \neq AC$ и $\angle BAC = 2\alpha = 60°$. Тогда $\angle NIM = \angle BIC = 90° + \alpha = 120°$. Следовательно, четырёхугольник $AMIN$ – вписанный, тогда $IN = IM$ (хорды, стягивающие равные дуги).

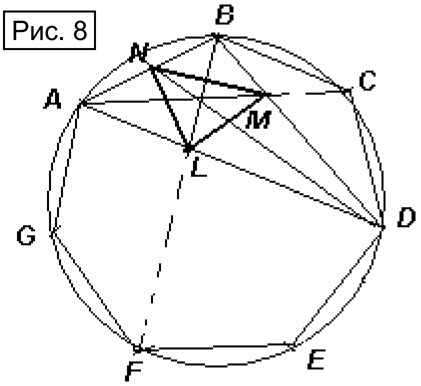


Рис. 8

в) В этом случае построить контрпример достаточно сложно. И.Ф. Шарыгин доказал, что для каждого тупого угла A, косинус которого лежит в интервале $\left(-\frac{1}{4};\frac{\sqrt{17}-5}{4}\right)$, такой неравнобедренный треугольник существует, причём единственный (с точностью до подобия). Приближённые значения угла лежат в интервале (102°40’; 104°28’). Это доказательство он опубликовал в своей книжке (см. [7]). Конкретные примеры таких треугольников были найдены гораздо позже. Приведём наиболее наглядный. Рассмотрим правильный семиугольник $ABCDEFG$, вписанный в окружность. Тогда треугольник ABD – искомый. Действительно, его угол B равен $\frac{720°}{7} = 102\frac{6}{7}°$, то есть лежит в данном диапазоне. Оказывается, что треугольник MLN, вершинами которого являются основания биссектрис, действительно равнобедренный ($LM = LN$)!

Компьютерным перебором также найден треугольник Шарыгина с наименьшими целыми сторонами: 1 481 089 , 18 800 081 , 19 214 131.

Для желающих углубиться в предложенную тему, приведём список литературы.

Литература

1. Г. Дегтярёва, Д. Максимов. Снова теорема Штейнера – Лемуса. «Квант», №2/2021.
2. Г.С.М. Коксетер, С.Л. Грейтцер. Новые встречи с геометрией – М:., «Наука», ГРФМЛ, 1978.
3. А. Коробов. Семь решений задачи Штейнера. «Квант», №4/1996.
4. И. Кушнир. Триумф школьной геометрии. – К:., «Наш час», 2005.
5. Сборник задач Московских математических олимпиад. Составитель А.А. Леман, редактор В.Г. Болтянский. – М:., Просвещение, 1965
6. Ч. Тригг. Задачи с изюминкой. – М:., Мир, 1975.
7. И.Ф. Шарыгин. Задачи по геометрии (планиметрия). – М:., «Наука», 1982.
8. И. Шарыгин. Вокруг биссектрисы. «Квант», №8/1983.
9. Л. Штейнгарц. Новый взгляд на теорему Штейнера – Лемуса. «Квант», №1/2013.