РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

М. А. ГОРЕЛОВ

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР РАН
МОСКВА 2012

УДК 519.8, 517.2

Ответственный редактор
доктор технических наук Ф.И. Ерешко

В классической теории оптимизации на решаемую задачу накладываются ограничения геометрического характера, типа дифференцируемости или выпуклости. А на практике задачи чаще всего задаются аналитически (явной формулой, дифференциальным уравнением и т.п.). В данной работе предлагается метод решения оптимизационных задач, использующий способ их аналитического задания. Если условие задачи сформулировано просто, то ее решение может быть доведено до конца. Идея метода состоит в использовании специальных вариаций переменных. В общем случае эти вариации не могут быть заданы алгебраически. В их основе лежат некоторые геометрические конструкции. Возможности метода демонстрируются на большом числе примеров.

Ключевые слова: оптимизация, неравенства, малочлены, симметрические многочлены.

Рецензенты: И.А. Копылов,
А.Ф. Кононенко

Научное издание

1. Введение

Данная брошюра продолжает серию работ [1–3] с тем же общим названием. Смысл этого названия подробно объясняется в [1] и в общих словах заключается в следующем.

Предлагаются методы решения оптимизационных задач заданных аналитическими формулами. Если эти формулы не слишком сложные, то задачи удается эффективно решить. Сложность задачи может определяться по-разному. Отсюда и различные методы решения, применимые к несовпадающим классам задач.

Данная брошюра непосредственно продолжает работу [3]. В [3] рассматриваются задачи задаваемые полиномами, или задачи сводящиеся к таким. В качестве меры сложности рассматривается степень оптимизируемого многочлена. При этом решаются только симметрические задачи, то есть такие задачи, которые не меняются при любых перестановках переменных.

Ниже предлагается несколько модификаций и обобщений метода из [3], позволяющих существенно расширить класс решаемых задач. По-прежнему в качестве меры сложности задачи рассматривается степень оптимизируемого многочлена. При этом также предполагается наличие у задачи довольно высокой степени симметрии, хотя рассматриваются не только симметрические задачи.

Кроме того, в [3] рассматриваются задачи с двумя или тремя переменными. Ниже показывается, как эти идеи могут быть применены при решении более сложных задач со многими переменными.

Наконец, в данной работе рассматривается несколько примеров того, как предлагаемые методы могут быть использованы при решении задач условной оптимизации.

Возможности предлагаемых методов демонстрируются на большом числе примеров. При этом почти все необходимые вычисления выполняются достаточно подробно «вручную», хотя следует отметить, что при использовании данных методов очень эффективна вычислительная техника. С ее применением решения получаются довольно короткими и прозрачными.

Напомним некоторые факты, которые будут применяться далее. Их доказательства можно найти, например, в [3].

Будем рассматривать симметрические многочлены от n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Важный пример симметрических многочленов представляют многочлены

$$p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)= x_1+x_2+\ldots+x_n,$$
$$p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)= x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,$$
$$p_3(x_1,x_2,\ldots,x_n)= x_1x_2\, x_3+x_1x_2\, x_4+\ldots+ x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$
$$\ldots$$
$$p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)= x_1x_2\ldots x_n.$$

(во второй строчке стоит сумма всевозможных попарных произведений, в третьей – сумма всех произведений по три и так далее). Эти многочлены называются элементарными симметрическими.

Непосредственно проверяется, что если

$$f(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_n),$$

то

$$f(t)=t^n-p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)t^{n-1}+p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)t^{n-2}-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}p_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n)t+(-1)^n\, p_{n-1}(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

Справедливы следующие две теоремы.

Теорема о симметрических многочленах. Для всякого симметрического многочлена $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ существует такой многочлен от n переменных Ф, что при всех значениях $x_1,x_2,\ldots,x_n$ выполняется равенство

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi(p_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),p_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,p_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)).$$

Теорема Безу. Пусть c – корень многочлена $F(t)$. Тогда найдется такой многочлен $G(t)$, что $F(t)=G(t)(t-c)$.

Дальнейший текст написан так, что его можно читать независимо от [3], хотя знакомство с [3], значительно облегчит чтение.

При оценке возможностей любого метода естественно встает вопрос о тестовых задачах. Большое число подходящих задач содержится в книгах по теории неравенств (см., например, [4–9]). Понятно, что для доказательства, например, неравенства $F(x,y,z)\geq 0$ достаточно найти минимум функции $F(x,y,z)$. Если это неравенство точное, то поиск минимума является и необходимым. Поэтому большинство тестовых примеров ниже формулируется именно в форме задач на доказательство неравенств, хотя решение этих задач каждый раз представляет собой поиск максимального или минимального значения некоторой функции.

Большинство этих примеров заимствованные, но установить первоисточники не представляется возможным. Ссылки указаны для тех задач, которые предлагались на различных олимпиадах, поскольку соответствующие источники наиболее доступны, а «олимпиадные» решения естественно считать наиболее элементарными и красивыми. Читатель получает возможность сравнить их с приводимыми ниже. Ссылки даются после номера задачи в фигурных скобках, где указывается название олимпиады и год ее проведения. При этом используются сокращения, приведенные в приложении.

2. Неравенства для элементов треугольника

В [3] предложен метод решения экстремальных задач с тремя переменными. Большое число таких задач дает геометрия треугольника. Приведем несколько примеров их решения.

Задача 1. Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите неравенство $a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)\le 3abc$.

Решение. Идея, предложенная в [3] подходит для решения этой задачи с минимальными изменениями.

Длины сторон треугольника удовлетворяют условиям $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$. Докажем, что нужное неравенство справедливо, если выполняются более слабые неравенства $a\le b+c$, $b\le a+c$, $c\le a+b$.

Рассмотрим многочлен

$$f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+ac+bc)t-abc.$$

Согласно теореме о симметрических многочленах левая часть доказываемого неравенства может быть записана как многочлен от его коэффициентов $a+b+c$, $ab+ac+bc$ и abc. Поскольку доказываемое неравенство имеет третью степень, коэффициент abc может входить в такую запись лишь в первой степени (в дальнейшем это использоваться не будет, но в данном случае нетрудно проверить, что

$$a(b^2+c^2-a^2)+b(a^2+c^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)=$$
$$=-(a+b+c)^3+4(a+b+c)(ab+ac+bc)-6abc\ ).$$

Поэтому доказываемое неравенство может быть записано в виде $F(a+b+c, ab+ac+bc)\le\lambda abc$, где F – некоторый многочлен, а λ – число (в нашем случае $\lambda=9$).

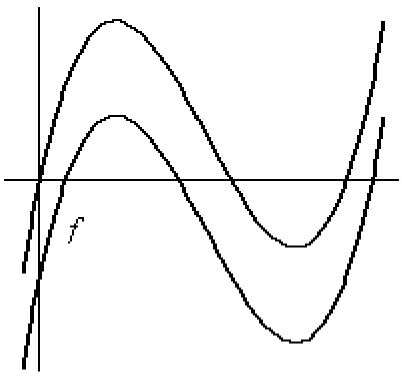

Рис.1

Будем сдвигать график многочлена $f(t)$ вдоль оси ординат (см. рисунок 1). При этом числа a, b, c будут меняться, но так, что выражения $a+b+c$ и $ab+ac+bc$ будут оставаться постоянными, а произведение abc будет увеличиваться при сдвиге вниз, и уменьшаться при сдвиге вверх. Но в таком случае левая часть неравенства $F(a+b+c, ab+ac+bc)\le\lambda abc$ меняться не будет, и при положительном λ неравенство будет усиливаться при сдвиге вверх, а при отрицательном – при сдвиге вниз.

Помешать усилению неравенства могут два обстоятельства: либо два из чисел a, b, c совпадут (и график «зацепится» за ось абсцисс вершиной), либо одно из неравенств $a\le b+c$, $b\le a+c$, $c\le a+b$ обратится в равенство, и при дальнейшем сдвиге оно будет нарушаться. В этих двух случаях и достаточно доказать наше неравенство.

В первом случае в силу симметрии можно, не ограничивая общности, считать, что $b=c$. Тогда неравенство запишется в виде $2ab^2-a^3+2a^2b\le 3ab^2$ или $-ab^2-a^3+2a^2b\le 0$. Нетрудно видеть, что это неравенство обращается в равенство при $a=b$. Значит, его левая часть делится на $a-b$. Но если доказываемое неравенство верно, то при $a=b$ выражение $-ab^2-a^3+2a^2b$ не должно менять знака. А потому оно должно делиться на $a-b$ в четной степени. Поскольку $-ab^2-a^3+2a^2b$ – многочлен третьей степени, приходим к выводу, что он должен делиться на $(a-b)^2$. Теперь уже нетрудно непосредственно проверить, что $-ab^2-a^3+2a^2b=-a(a-b)^2\le 0$. В этом случае неравенство установлено.

Во втором случае можно считать, что $c=a+b$. Тогда неравенство примет вид $-ab(a+b)\le 0$, что уже очевидно.

Задача решена. В данном случае решение можно было бы записать и покороче, но хотелось отказаться от использования специфики конкретного неравенства, чтобы продемонстрировать общий метод.

Если в неравенстве фигурируют не стороны треугольника, а какие-то другие его элементы, то часто бывает полезно выразить их все через стороны (это всегда можно сделать, поскольку три стороны задают треугольник однозначно) и доказывать получившееся неравенство стандартным образом. Следующая задача представляет собой довольно сложный пример такого рода.

Задача 2. Пусть R – радиус описанной окружности, а r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство $\frac{3}{2}R \le \sqrt{\frac{r_a^2 + r_b^2 + r_c^2}{3}}$.

Решение. Выразим фигурирующие в условии задачи радиусы через стороны a, b, c треугольника. Пусть S – площадь треугольника, а p – его полупериметр. Тогда по известным формулам $S = \frac{abc}{4R}$, и $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$. Поэтому доказываемое неравенство перепишется в виде $\frac{3abc}{8S} \le \sqrt{\frac{S^2}{3} \cdot \left(\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \right)}$.

После возведения в квадрат придем к неравенству

$$27(abc)^2 \le 64S^4 \left(\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \right)$$

или

$$27(abc)^2 \le 64S^4 \left(\frac{(p-a)^2(p-b)^2 + (p-a)^2(p-c)^2 + (p-b)^2(p-c)^2}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2} \right).$$

Теперь выразим площадь через стороны с помощью формулы Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Получим

$$27(abc)^2 \le 64p^2 \left((p-a)^2(p-b)^2 + (p-a)^2(p-c)^2 + (p-b)^2(p-c)^2 \right)$$

или

$$27(abc)^2 \le 64p^2\Big[\big((p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)\big)^2 - \\ -2(p-a)(p-b)(p-c)(p-a+p-b+p-c)\Big]. \qquad (1)$$

Многочлены p и $(p-a)(p-b)+(p-a)(p-c)+(p-b)(p-c)$ являются симметрическими многочленами первой и второй степеней соответственно. Следовательно, по теореме о симметрических многочленах они могут быть выражены через элементарные симметрические многочлены $a+b+c$ и $ab+ac+bc$. Кроме того,

$$(p–a)(p–b)(p–c)=p^3–(a+b+c)p^2+(ab+ac+bc)p–abc.$$

Поэтому доказываемое неравенство может быть переписано в виде

$$27(abc)^2–16(a+b+c)^3abc\le\Phi(a+b+c,ab+ac+ac),$$

где Φ – некоторый многочлен.

Сдвигая график многочлена

$$f(t)=(t–a)(t–b)(t–c)=t^3–(a+b+c)t^2+(ab+ac+bc)t–abc$$

вдоль оси ординат можно менять левую часть этого неравенства, не меняя правой.

Но в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен относительно переменной abc с положительным старшим коэффициентом. А такой трехчлен не может достигать наибольшего значения во внутренней точке области значений. Следовательно, усиливая неравенство, график многочлена можно сдвигать до тех пор, пока не произойдет одно из двух: две стороны треугольника станут равными или треугольник выродится так, что одна из сторон станет равной сумме двух других.

При $c=b$ неравенство (1) запишется в виде

$$27a^2b^4\le(a+2b)^2(2(2b–a)^2a^2+a^4).$$

Разложив разность правой и левой частей неравенства на множители, получим $a^2(3a^2+10ab+5b^2)(a–b)^2$. Поскольку числа a и b положительны, эта величина, очевидно, неотрицательна.

А при $c=a+b$ получим неравенство $27a^2b^2(a+b)^2\le64\ a^2b^2(a+b)^2$, что уже очевидно.

В [10] этот результат приведен без доказательства, поскольку доказательство «довольно сложно». Из приведенного выше решения видно, что использование нашей идеи довольно значительно меняет понятие «сложности».

Все проблемы в решении предыдущей задачи были связаны с подготовительной работой по записи доказываемого неравенства в подходящей форме. Это несколько трудоемкий, но стандартный процесс. Во многих случаях этот процесс осуществляется короче, и тогда решение выглядит совсем просто. Вот пример.

Задача 3. Пусть α, β, γ – углы произвольного треугольника. Докажите неравенство $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta} + \dfrac{1}{\sin\gamma} \geq 2\sqrt{3}$.

Решение. Здесь новым является наличие тригонометрических функций от углов треугольника. Но от них легко избавиться, используя формулы для площади S треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами α, β, γ:

$$2S = bc\sin\alpha = ac\sin\beta = ab\sin\gamma.$$

Тогда доказываемое неравенство перепишется в виде

$$ab + ac + bc \geq 4\sqrt{3}S.$$

Выразив площадь через стороны с помощью формулы Герона запишем неравенство в виде $ab + ac + bc \geq 4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p – полупериметр треугольника.

В левой части неравенства стоит элементарный симметрический многочлен, а под корнем – симметрический многочлен четвертой степени. В силу теоремы о симметрических многочленах его можно выразить через элементарные симметрические многочлены $a+b+c$, $ab+ac+bc$ и abc, причем произведение abc будет входить в соответствующее выражение в первой степени. Следовательно, подкоренное выражение, а, значит, и вся правая часть последнего неравенства будет зависеть от этого произведения монотонно.

Поэтому, меняя это произведение, можно усиливать доказываемое неравенство до тех пор, пока не произойдет одно из двух: либо два из трех чисел a, b, c станут равными, либо треугольник выродится, и одно из неравенств $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ превратится в равенство. Для этих случаев и достаточно доказать неравенство.

В первом случае можно считать, что $b=c$. Тогда неравенство примет вид $b(2a+b) \geq \sqrt{3(2b+a)(2b-a)a^2}$. Возводя его в квадрат и раскладывая на множители, получим очевидное неравенство

$$(3a^2+6ab+b^2)(a-b)^2 \geq 0.$$

Во втором случае в правой части получится ноль, а в левой – неотрицательное число и неравенство станет очевидным.

Задача полностью решена.

Довольно часто вспомогательные вычисления заметно упрощаются, если с самого начала произвести некоторую стандартную замену переменных. Это демонстрируется в решении следующей задачи (попробуйте решить ее не прибегая к этой замене).

Задача 4. Пусть r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей некоторого треугольника, R – радиус его описанной окружности. Докажите неравенство $\frac{r_a + r_b + r_c}{3} \leq \frac{3}{2}R$.

Решение. Пусть a, b, c – стороны, а p – полупериметр рассматриваемого треугольника. Введем переменные $u=p-a$, $v=p-b$, $w=p-c$. Числа u, v, w выражают отрезки, на которые делятся стороны треугольника точками касания вписанной окружности. Непосредственно проверяется, что числа a, b, c удовлетворяют неравенствам треугольника тогда и только тогда, когда числа u, v, w положительны.

Формулы $S = \frac{abc}{4R}$ и $S = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$ в новых переменных примут вид $S = \frac{(u+v)(u+w)(v+w)}{4R}$ и $S = ur_a = vr_b = = wr_c$, а формула Герона запишется в виде $S = \sqrt{(u+v+w)uvw}$.

Поэтому доказываемое неравенство приведется к виду

$$8(u+v+w)(uv+uw+vw) \leq 9(u+v)(u+w)(v+w).$$

Докажем, что оно справедливо для всех неотрицательных значений u, v, w.

Левая часть уже выражена через элементарные симметрические многочлены $u+v+w$, $uv+uw+vw$ и uvw и не зависит от произведения uvw. Правую часть тоже можно выразить через элементарные симметрические многочлены, причем uvw будет входить в это выражение в первой степени.

Сдвигами графика многочлена $f(t)=(t-u)(t-v)(t-w)$ мы можем менять правую часть неравенства, не меняя левой. Поэтому неравенство достаточно доказать в двух случаях: когда среди чисел u, v, w есть равные, и когда одно из этих чисел равно нулю.

В случае $v=w$ неравенство легко приводится к виду $0\le v(u-v)^2$.

А в случае $w=0$ получаем очевидное неравенство

$$8(u+v)uv\le 9(u+v)uv.$$

Вот и все.

Результат последней задачи, а также доказанное выше неравенство $\frac{3}{2}R\le\sqrt{\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{3}}$ позволяют воспользоваться идеями из [1], чтобы получить бесконечную серию неравенств.

Рассмотрим функцию $f(t)=\frac{1}{3}r_a^t+\frac{1}{3}r_b^t+\frac{1}{3}r_c^t-\left(\frac{3}{2}R\right)^t$. Она имеет столько же корней, сколько функция

$$g(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{2r_a}{3R}\right)^t+\frac{1}{3}\left(\frac{2r_b}{3R}\right)^t+\frac{1}{3}\left(\frac{2r_c}{3R}\right)^t-1.$$

Но последняя, очевидно, выпукла, а потому имеет не более двух корней. Значит, и функция $f(t)$ имеет не больше двух корней.

Один из них ($t=0$) очевиден. В силу полученных неравенств $f(1)\le 0$ и $f(2)\ge 0$. Следовательно, второй корень заключен между 1 и 2. Поэтому функция $f(t)$ не меняет знака на каждом из интервалов $(-\infty,0)$, $(0,1)$ и $(2,+\infty)$. Отсюда получаем, что $f(t)\ge 0$ при $t\le 0$ и при $t\ge 2$ и $f(t)\le 0$ при $0\le t\le 1$.

Кроме того, при $t=0$ эта функция меняет знак с плюса на минус, а, значит, ее производная при $t=0$ не положительна. Откуда получим неравенство $r_ar_br_c\le\left(\frac{3}{2}R\right)^3$.

Приведем еще пару примеров такого рода.

Хорошо известны следующие факты. Среди всех треугольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный треугольник. А среди всех треугольников, описанных около данной окружности, равносторонний треугольник имеет наименьший периметр.

Эти факты могут быть записаны следующим образом. Пусть a, b, c – стороны треугольника, r и R радиусы его вписанной и описанной окружностей соответственно. Тогда

$$2\sqrt{3}r \le \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{3}R\,.$$

Задача 5. Пусть a, b, c – стороны треугольника, R радиус его описанной окружности. Докажите, что $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}} \le \sqrt{3}R$.

Решение. Возведем доказываемое неравенство в квадрат: $a^2+b^2+c^2\le 9R^2$. Из теоремы синусов следует, что $R=\dfrac{abc}{4S}$, где S – площадь треугольника. Поэтому неравенство запишется в виде $16S^2(a^2+b^2+c^2)\le 9(abc)^2$. Вспомнив формулу Герона придем к неравенству $(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)(a^2+b^2+c^2)\le 9(abc)^2$.

В ходе решения задачи 2 было доказано, что в разложение произведения $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$ через элементарные симметрические многочлены произведение abc входит с отрицательным коэффициентом. А в разложение выражения $a^2+b^2+c^2$ это произведение вовсе не входит. Поэтому при уменьшении abc и неизменных $a+b+c$ и $ab+ac+bc$ левая часть неравенства возрастает, а правая убывает.

Следовательно, самое сильное неравенство получится, когда уменьшать этот произведение уже нельзя. А это может быть только в двух случаях: когда два из трех чисел a, b, c равны, и когда треугольник вырождается, то есть одно из чисел a, b, c становится равным сумме двух других.

При $b=c$ придем к неравенству $(a+2b)a^2(2b-a)(a^2+2b^2)\le 9a^2b^4$ или $a^2(a-b)^2(a+b)^2\ge 0$. А при $c=a+b$ неравенство очевидно, поскольку в его левой части стоит ноль.

Задача решена. В силу известного неравенства $\dfrac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ доказанное неравенство сильнее упомянутого классического результата.

Более того, в [1] показано, что функция $f(t)=\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}$ не убывает, поэтому $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}} \le \sqrt{3}R$ для всех $t \le 2$.

Естественно возникает вопрос, а нельзя ли усилить этот результат, доказав последнее неравенство для некоторого $t>2$? Ответ на этот вопрос можно усмотреть из анализа приведенного решения.

В самом деле, равенство в доказанном неравенстве достигается, если $b=c$ и выражение $a^2(a-b)^2(a+b)^2$ обращается в ноль, то есть при $a=b$ (правильный треугольник), или при $a=0$ (вырожденный равнобедренный треугольник).

Рассмотрим вырожденный треугольник, у которого $a=0$ и $b=c=2R$. Для него $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}=2R\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{t}}$. А при $t>\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$ выполняется неравенство $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}>\sqrt{3}R$. Поскольку $\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 4-\ln 3}\approx 2.8188<3$, уже среднее кубическое чисел *a, b*, *c* не всегда меньше $\sqrt{3}R$.

Чтобы понять, что происходит при больших значениях *t*, решим следующую задачу.

Задача 6. Пусть *a*, *b*, *c* – стороны треугольника, *R* радиус его описанной окружности. Докажите, что $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{2}}<2R$.

Решение. Как в решении предыдущей задачи выразим все через стороны треугольника и площадь *S*: $4S\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{2}}\le 2abc$. Избавимся от радикалов, возведя неравенство в шестую степень:

$$((4S)^2)^3(a^3+b^3+c^3)^2 \le 256(abc)^6.$$

Обозначим $x=a+b+c$, $y=ab+ac+bc$, $z=abc$. Воспользовавшись формулой Герона и тождествами

$$a^3+b^3+c^3=x^3-3xy+3z,\ (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=-x^3+4xy-8z,$$

приведем неравенство к виду

$$x^3(-x^3+4xy-8z)^3(x^3-3xy+3z)^2\le 256z^6.$$

Докажем, что функция $f(z)=(-x^3+4xy-8z)^3(x^3-3xy+3z)^2$ не возрастает. Для этого найдем ее производную

$$f'(z)=6(-x^3+4xy-8z)^3(x^3-3xy+3z)-24(-x^3+4xy-8z)^2(x^3-3xy+3z)^2=$$
$$=6(-x^3+4xy-8z)^2(x^3-3xy+3z)(-5x^3+16xy-20z).$$

Так как $x^2-3y=(a+b+c)^2-3(ab+ac+bc)\ge 0$, то $x^3-3xy+3z\ge 0$. Поэтому достаточно доказать, что $5x^3-16xy+20z\ge 0$.

Удобнее доказать более сильное неравенство $5x^3-16xy+9z\ge 0$. Здесь мы имеем дело с симметрическим неравенством третьей степени, уже выраженным через элементарные симметрические многочлены. Докажем, что оно справедливо для всех неотрицательных a, b и c. Рассуждая обычным образом убедимся, что его достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел a, b, c равно нулю и когда два из этих трех чисел равны. При $c=0$ получим легкопроверяемое неравенство $(a+b)(5(a+b)^2-16ab)\ge 0$. А при $b=c$ придем к неравенству $(5a+8b)(a-b)^2\ge 0$.

Вернемся к доказательству исходного неравенства. Из доказанной монотонности следует, что если, не меняя x и y уменьшать z, то неравенство будет только усиливаться. Поэтому его достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных.

При $b=c$ получим неравенство

$$a^8(a^{10}-12a^8b^2+4a^7b^3+48a^6b^4-48a^5b^5-60a^4b^6+$$
$$+192a^3b^7-48a^2b^8-256ab^9+192b^{10})\ge 0.$$

Разделим его на a^8b^{10} и обозначим $u=a/b$. В силу неравенства треугольника $a<2b$, поэтому $0<u<2$. Итак, достаточно убедиться, что многочлен

$$h(u)=u^{10}-12u^8+4u^7+48u^6-48u^5-60u^4+192u^3-48u^2-256u+192$$

неотрицателен при $0<u<2$.

Для этого достаточно показать, что на отрезке [0,2] он не имеет корней. Это можно сделать с помощью теоремы Штурма[1] [11,12].

---

[1] Штурм Жак Шарль Франсуа (1803–1855) – французский математик.

Конечно, вручную это несколько хлопотно, но с помощью компьютера проверка занимает считанные секунды. Эта проверка завершает рассмотрение случая равнобедренных треугольников.

А для вырожденных треугольников неравенство очевидно.

Теперь уже нетрудно доказать, что и при $t>3$ выполняется неравенство $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}<2R$.

Рассмотрим функции $g(t)=\frac{1}{2}\left(a^t+b^t+c^t\right)-(2R)^t$ и $G(t)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{2R}\right)^t+\left(\frac{b}{2R}\right)^t+\left(\frac{c}{2R}\right)^t\right)-1$. Поскольку сторона треугольника не может превышать диаметр описанной окружности, функция $G(t)$ убывает. Поэтому при возрастании t она может менять знак не более одного раза, причем, только с плюса на минус. А так как $g(t)=(2R)^tG(t)$, то же относится и к функции $g(t)$. Но в силу результата задачи 6, $g(3)<0$, значит и при $t>3$ выполняется неравенство $g(t)<0$, откуда и следует нужный результат.

Подведем итоги. Установлено, что при $t\le 2$ выполняется неравенство $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}\le\sqrt{3}R$, а при $t\ge 3$ справедливо неравенство $\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{2}\right)^{\frac{1}{t}}<2R$, причем оба они не улучшаемы. Открытым остается вопрос о том, выполняются ли эти неравенства для $2<t<3$. Можно предположить, что при $t<\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$ выполняется первое из них, а при $t>\frac{\ln 9-\ln 4}{\ln 4-\ln 3}$ – второе. Но для того, чтобы разобраться в этом, видимо, нужны другие идеи.

Аналогичные результаты можно получить и для верхней оценки радиуса вписанной окружности (см. упражнения 14–16 ниже).

Упражнения

1. {A.1971} Докажите, что если a,b,c – длины сторон некоторого треугольника и $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$, то

$$xyz(ab+bc+ac)\le abc(xy+yz+xz).$$

2. Докажите, что если a,b,c – длины сторон треугольника и $x=b+c-a$, $y=c+a-b$, $z=a+b-c$, то $xyz(xy+yz+xz)\le abc(ab+bc+ac)$.

3. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника, составленного из медиан остроугольного треугольника, больше 5/6 радиуса окружности, описанной около исходного треугольника.

4. Пусть a, b и c – длины сторон произвольного треугольника. Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le 2$.

5. {A. 1965} Пусть h_a,h_b,h_c – высоты, а r_a,r_b,r_c – соответствующие радиусы вневписанных окружностей треугольника. Докажите неравенство $\frac{r_a}{h_a}+\frac{r_b}{h_b}+\frac{r_c}{h_c}\ge 3$.

6. Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, a,b,c – его стороны. Докажите неравенство

$$20Rr-4r^2\le ab+bc+ac.$$

7. Пусть a,b,c – длины сторон, а r_a,r_b,r_c – радиусы вневписанных окружностей треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)\le r_a+r_b+r_c.$$

8. Пусть r_a,r_b,r_c – радиусы вневписанных окружностей треугольника, а S – его площадь. Докажите, что $\sqrt[4]{3}\sqrt{S}\le\sqrt[3]{r_ar_br_c}$.

9. Пусть a,b,c – длины сторон, а r_a,r_b,r_c – радиусы вневписанных окружностей треугольника. Докажите неравенство

$$3\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)\ge 4\left(\frac{r_a}{a}+\frac{r_b}{b}+\frac{r_c}{c}\right).$$

10. {S.1997} Докажите неравенство

$$\frac{1}{h_a-2r}+\frac{1}{h_b-2r}+\frac{1}{h_c-2r}\ge\frac{3}{r},$$

где h_a, h_b, h_c – высоты некоторого треугольника, а r – радиус вписанной в этот треугольник окружности.

11. Пусть h_a, h_b, h_c – высоты некоторого треугольника, а r – радиус вписанной в него окружности. Докажите, что выполняется неравенство $\frac{h_a + r}{h_a - r} + \frac{h_b + r}{h_b - r} + \frac{h_c + r}{h_c - r} \geq 6$.

12. Пусть a, b, c – стороны, а h_a, h_b, h_c – высоты некоторого треугольника. Докажите, что выполняется неравенство

$$4(h_a h_b + h_b h_c + h_a h_c) \leq 3(ab + bc + ac).$$

13. Пусть a, b, c – стороны, R и r – радиусы вписанной и описанной окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$8r(R-2r) \leq (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2.$$

14. Пусть a, b, c – стороны, а r – радиус вписанной окружности некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$2\sqrt{3}r \leq \frac{3abc}{ab + ac + bc}.$$

15. Пусть a, b, c – стороны, а r – радиус вписанной окружности некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$2\sqrt{3}r \leq \sqrt{\frac{3a^2b^2c^2}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

16. Пусть a, b, c – стороны, а r – радиус вписанной окружности некоторого треугольника. Докажите, что для $t \geq -2$ справедливо неравенство $2\sqrt{3}r \leq \left(\frac{a^t + b^t + c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}$, а при $t < -2$ выполняется неравенство $2r < \left(a^t + b^t + c^t\right)^{\frac{1}{t}}$.

3. Не только перенос

В предыдущем разделе параллельный перенос графика вспомогательного многочлена использовался для того, чтобы задать некоторый специальный способ вариации аргументов оптимизируемой функции. При этом, фактически менялся свободный член вспомогательного многочлена, а остальные коэффициенты оставались неизменными. Иногда это бывает невозможно или неудобно. В таких случаях стоит поискать способ, который позволил бы менять какой-то другой коэффициент вспомогательного многочлена, оставляя другие неизменными. Иногда это приводит к успеху. Вот как это можно сделать.

Задача 7. {h1597.1997} Пусть $a>0$, $b>0$ и $abc=1$. Докажите неравенства

а) $\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{1}{1+2b}+\dfrac{1}{1+2c}\geq 1$;

б) $\dfrac{1}{1+a+b}+\dfrac{1}{1+a+c}+\dfrac{1}{1+b+c}\leq 1$.

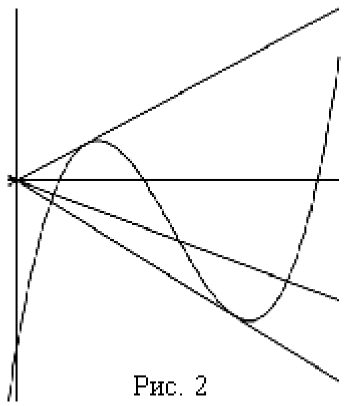

Рис. 2

Решение. Начнем с пункта а). Умножив неравенство на $(1+2a)(1+2b)(1+2c)$ и собрав все члены в левой части, приведем его к виду $F(a,b,c)\geq 0$, где $F(a,b,c)$ – симметрический многочлен третьей степени. В силу теоремы о симметрических многочленах его можно записать в виде $\Phi(a+b+c,ab+ac+bc,abc)\geq 0$, где Φ – некоторый многочлен. Так как многочлен F имеет третью степень, переменная $ab+ac+bc$ входит в многочлен Φ в степени не большей, чем первая. Значит, многочлен Φ зависит от этой переменной монотонно.

Покажем, что можно менять переменную $ab+ac+bc$, не меняя значений суммы $a+b+c$ и произведения abc. Для этого рассмотрим многочлен $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)=t^3-(a+b+c)t^2+(ab+ac+bc)t-abc$.

Чтобы получить требуемое, нужно менять числа a, b и c так, чтобы менялся коэффициент при t в этом многочлене, а остальные коэффициенты оставались неизменными. Рассмотрим точки пересечения графика многочлена $f(t)$ с прямой $l_\alpha(t)=\alpha t$. Они будут корнями многочлена $f_\alpha(t)=t^3(a+b+c)t^2+(ab+ac+bc-\alpha)t-abc$, у которого все коэффициенты, кроме коэффициента при t, такие же, как соответствующие коэффициенты у многочлена $f(t)$.

Следовательно, меняя α, мы можем увеличивать или уменьшать значение коэффициента при t, не меняя остальных. Менять значение этого коэффициента можно до тех пор, пока два из корней соответствующего многочлена не станут равными (см. рис. 2).

Поскольку, как уже говорилось выше, многочлен $\Phi(a+b+c,ab+ac+bc,abc)$ зависит от второй переменной монотонно, неравенство $\Phi(a+b+c,ab+ac+bc,abc)\geq 0$ достаточно доказать для случая, когда две из трех переменных равны. Но это неравенство равносильно исходному, поэтому и исходное неравенство можно доказывать, считая, что значения, по крайней мере, двух переменных совпадают.

В силу симметрии можно считать, что $a=b$, и тогда $c=\dfrac{1}{a^2}$. В таком случае неравенство перепишется в виде $\dfrac{2}{1+2a}+\dfrac{1}{1+2/a^2}\geq 1$ или $\dfrac{2}{1+2a}+\dfrac{a^2}{a^2+2}\geq 1$. Перенеся второе слагаемое вправо, получим $\dfrac{2}{1+2a}\geq\dfrac{2}{a^2+2}$ или $a^2+2\geq 1+2a$. Последнее эквивалентно очевидному неравенству $(a-1)^2\geq 0$.

Обратимся к пункту б). Дословно повторяя рассуждения из решения пункта а) придем к выводу, что неравенство достаточно доказать для случая, когда две из трех переменных a, b, c равны.

Предполагая, что $a=b$ и $c=\dfrac{1}{a^2}$, приведем неравенство к виду $\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{2}{1+a+1/a^2}\leq 1$ или $\dfrac{1}{1+2a}+\dfrac{2a^2}{a^2+a^3+1}\leq 1$. Перенеся первое слагаемое вправо, получим $\dfrac{2a^2}{a^2+a^3+1}\leq\dfrac{2a}{1+2a}$, или $a(1+2a)\leq a^3+a^2+1$. Последнее эквивалентно неравенству $0\leq(a-1)^2(a+1)$, что очевидно.

Рассмотрим еще один пример.

Задача 8. {S.1996} Докажите, что для произвольных $x>0$, $y>0$, $z>0$ выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{xy}{z^2}}+\sqrt{\frac{xz}{y^2}}+\sqrt{\frac{yz}{x^2}}\le\frac{xy}{z^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{yz}{x^2}.$$

Решение. Здесь применению рассматриваемого метода мешает наличие радикалов. Напрашивается замена переменных $a=\sqrt{\frac{xy}{z^2}}$, $b=\sqrt{\frac{xz}{y^2}}$, $c=\sqrt{\frac{yz}{x^2}}$. Тогда неравенство принимает вид $a+b+c\le a^2+b^2+c^2$. Нетрудно видеть, что для всех значений переменных это неравенство выполняться не может (оно заведомо не верно, если положительные a, b, c близки к нулю). Но новые переменные очевидно удовлетворяют условию $abc=1$.

Поскольку теперь произведение чисел abc задано, переносить график, как обычно, мы не можем. Попробуем поэтому поменять правую часть нашего неравенства, не меняя ни левой части, ни этого произведения. Для этого, наряду со знакомым многочленом $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ рассмотрим многочлен $f_\alpha(t)=f(t)-\alpha t$. Если α не слишком велико, то он тоже будет иметь три корня a',b',c', и эти корни будут абсциссами точек пересечения графика многочлена $f(t)$ с прямой $l(t)_\alpha=\alpha t$. Мы можем увеличивать или уменьшать α до тех пор, пока две из трех точек не сольются.

Но левая часть доказываемого неравенства не зависит от элементарного симметрического многочлена $ab+ac+bc$. А правая имеет вторую степень, следовательно, в ее разложение по элементарным симметрическим многочленам $ab+ac+bc$ входит в первой степени. Значит, минимального значения правая часть достигает, когда наша прямая касается графика многочлена $f(t)$.

Таким образом, нам достаточно доказать неравенство в случае $a=b$, $c=\frac{1}{a^2}$. В этом случае неравенство стандартными преобразованиями сводится к очевидному $(a-1)^2(2a^4+2a^2+2a^2+2a+1)\ge 0$.

В следующем примере использовать параллельный перенос можно, но не удобно. Гораздо проще воспользоваться нашим новым приемом.

Задача 9. Пусть a,b,c – стороны, а h_a,h_b,h_c – высоты некоторого треугольника. Докажите, что выполняется неравенство

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Решение. Используя популярные формулы для площади треугольника $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$, перепишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2S}\geq\frac{ab+ac+bc}{abc}$$

или

$$\sqrt{3}(a+b+c)abc\geq 4S(ab+ac+bc).$$

Теперь воспользуемся формулой Герона. Получим

$$\sqrt{3}(a+b+c)abc\geq$$

$$\geq\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}(ab+ac+bc).$$

Левая часть уже выражена через элементарные симметрические многочлены от переменных a, b, c. Сделаем то же с подкоренным выражением. Имеем

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)=$$

$$=(a+b+c)^3-2(a+b+c)(a+b+c)^2+4(ab+ac+bc)(a+b+c)-8abc$$

(важно, что член, содержащий $ab+ac+bc$, входит со знаком «плюс»).

Очевидно, что подкоренное выражение в последнем неравенстве возрастает при росте $ab+ac+bc$ и неизменных $a+b+c$ и abc. Значит, то же относится и ко всей правой части этого неравенства.

Поскольку имеется способ менять переменные a, b, c так, чтобы значение $ab+ac+bc$ росло, а $a+b+c$ и значения abc не менялись, неравенство достаточно доказать для предельных случаев. Помешать увеличению значения $ab+ac+bc$ могут два обстоятельства: либо два из чисел a, b, c станут равными, либо треугольник выродится в отрезок.

В последнем случае площадь обратиться в ноль и неравенство станет очевидным. Остается рассмотреть случай равнобедренных треугольников.

В случае $b=c$ неравенство приведется к виду

$$\sqrt{3}(a+2b)ab^2 \geq \sqrt{(a+2b)(2b-a)a^2}\,(2ab+b^2)\,.$$

после возведения в квадрат будем иметь

$$3(a+2b)^2a^2b^4 \geq a^2(4b^2-a^2)(2ab+b^2)^2.$$

Разложив разность левой и правой частей на множители, получим очевидное неравенство $4a^2b^2(a+2b)(a+b)(a-b)^2 \geq 0$.

Задача решена.

В геометрических задачах бывает важно правильно выбрать независимые переменные. Приведем пример.

Задача 10. Пусть r, r_a, r_b, r_c и R – радиусы вписанной, вневписанных и описанной окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенства $\sqrt[3]{r\cdot r\cdot\frac{R}{2}} \leq \frac{1}{3}\sqrt[3]{r_ar_br_c} \leq \sqrt[3]{r\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}}$.

Решение. Приведем неравенство к виду $54r^2R \leq 4r_ar_br_c \leq 27rR^2$.

Треугольник определяется тремя параметрами, а у нас имеется пять переменных. Исключим две из них, используя известные тождества $r_a+r_b+r_c=4R+r$ и $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$ (см, например, [10]). Придем к неравенствам

$$\frac{27}{2}\cdot\frac{(r_ar_br_c)^2}{(r_ar_b+r_ar_c+r_br_c)^2}\cdot\left(r_a+r_b+r_c-\frac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}\right) \leq 4r_ar_br_c \leq$$

$$\leq \frac{27}{16}\cdot\frac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}\cdot\left(r_a+r_b+r_c-\frac{r_ar_br_c}{r_ar_b+r_ar_c+r_br_c}\right)^2.$$

Докажем, что эти неравенства справедливы для любых неотрицательных чисел r_a, r_b, r_c (не хочется, да в данном случае и не нужно разбираться, какими дополнительными условиями могут быть связаны радиусы вневписанных окружностей).

Эти неравенства уже записаны в виде, учитывающем разложение через элементарные симметрические многочлены от переменных r_a, r_b, r_c. Причем видно, что средняя часть не зависит от элементарного симметрического многочлена $r_a+r_b+r_c$, а левая и правая части зависят от него монотонно.

Рассмотрим многочлен $f_\varepsilon(t)=(t-r_a)(t-r_b)(t-r_c)+\varepsilon t^2$. Меняя ε, можно менять левую и правую части неравенства, не меняя средней. Поэтому, неравенства достаточно доказать для случая, когда два из трех чисел совпадают (нарисуйте графики многочленов $f_0(t)$ и $-\varepsilon t^2$).

При $r_b=r_c$ левое и правое неравенство примут вид $\frac{r_a r_b^2(5r_a+4r_b)(r_a-r_b)^2}{(2r_a+r_b)^3} \geq 0$ и $\frac{r_a r_b(27r_a^2+34r_a r_b+11r_b^2)(r_a-r_b)^2}{4(2r_a+r_b)^3} \geq 0$ соответственно. Задача решена.

Иногда полезно использовать чуть более хитрые преобразования графиков. Вот один пример.

Задача 11. (Олимпиада США, 2001 г.) Неотрицательные числа a,b,c удовлетворяют условию $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Докажите, что

$$0 \leq ab+bc+ac-abc \leq 2.$$

Решение. Перепишем условие задачи в виде

$$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)+abc=4.$$

Если корни многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ удовлетворяют условию задачи, то ему удовлетворяют и корни многочлена $f_\alpha(t)=f(t)+\alpha(t-2)$. Меняя α, мы можем менять значение выражения $ab+bc+ac-abc$, не нарушая данного условия.

Причем понятно, что произведения корней многочленов $f(t)$ и $f_\alpha(t)$ отличаются на величину α. Поэтому, желая сделать любое из двух доказываемых неравенств максимально сильным, нужно изменять значение α «до упора». Предел изменению α может быть положен одним из двух обстоятельств: либо два из трех чисел a, b, c станут равными (и при дальнейшем изменении α многочлен уже не будет иметь трех действительных корней), либо одно из этих чисел обратится в нуль (и при дальнейшем изменении α одно из чисел станет отрицательным).

Поэтому неравенства достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из чисел равно нулю и когда значения двух из трех чисел совпадают.

При c=0 неравенства принимают вид $0\le ab\le 2$, а условие задачи примет вид $a^2+b^2=4$. Левое неравенство очевидно, а правое может быть записано в виде $2ab\le a^2+b^2$ или $0\le(a-b)^2$.

При $b=c$ условие перепишется в виде $a^2+2b^2+ab^2-4=0$, или $(a+2)(b^2+a-2)=0$. Отсюда имеем $a=2-b^2$, и нужно доказать неравенства $0\le b^4-2b^3-b^2+4b\le 2$ при условии $b\le\sqrt{2}$. Левое неравенство следует из тождества $b^4-2b^3-b^2+4b=b^2(b-1)^2+2b(2-b)$ и условия $b\le 2$, а правое – из тождества $b^4-2b^3-b^2+4b-2=(b^2-2)(b-1)^2$ и неравенства $b\le\sqrt{2}$.

Задача решена. В данном случае сыграло свою роль то обстоятельство, что в заданное ограничение два коэффициента вспомогательного многочлена входят в первой степени. Поэтому изменение одного из этих коэффициентов можно компенсировать изменением другого так, что заданное в условии ограничение не нарушится.

Ниже приводится еще один пример того же рода, из которого, кстати, видно, как, вероятно, была придумана предыдущая задача.

Задача 12. {Г.1965} Пусть α,β,γ – углы треугольника. Докажите неравенство $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le 3/2$.

Решение. Эту задачу можно решать, как и выше, выразив косинусы углов треугольника через его стороны с помощью теоремы косинусов. Приводимое ниже решение демонстрирует некоторые дополнительные возможности рассматриваемого метода.

Углы треугольника связаны соотношением $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Как следствие, косинусы этих углов тоже связаны некоторым алгебраическим соотношением. Найдем его.

Так как $\beta+\gamma=\pi-\alpha$, имеем $\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$ и $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)$. Следовательно,

$$-1=\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma)=-\cos^2\alpha-\sin^2(\beta+\gamma)=$$
$$=-\cos^2\alpha-(\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\beta)^2=$$
$$=-\cos^2\alpha-\sin^2\beta\cos^2\gamma-\sin^2\gamma\cos^2\beta-2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)\cos^2\gamma-(1-\cos^2\gamma)\cos^2\beta-2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos^2\beta\cos^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos^2\beta\cos^2\gamma-2(\cos\beta\cos\gamma-\cos(\beta+\gamma))\cos\beta\cos\gamma=$$
$$=-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos(\beta+\gamma)\cos\beta\cos\gamma=$$

$$= -\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Итак, получили полезное тождество

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-2(\cos\alpha\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma+\cos\beta\cos\gamma)+$$
$$+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

Докажем теперь, что неравенство $x+y+z\leq 3/2$ выполняется для всех чисел x, y, z из отрезка $[-1,1]$, удовлетворяющих условию

$$(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)+2xyz=1. \qquad (2)$$

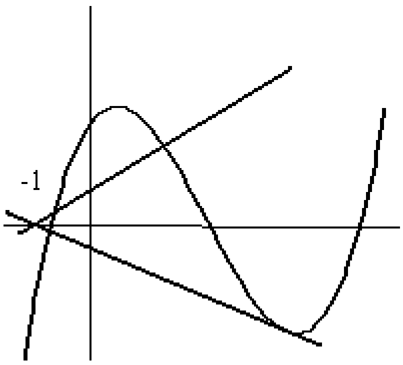

Рис. 3

Рассмотрим многочлены $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)$ и $f_\varepsilon(t)=f(t)+\varepsilon(t-1)$. Если корни многочлена $f(t)$ удовлетворяют условию (2), то этому условию будут удовлетворять и корни многочлена $f_\varepsilon(t)$. Поэтому, меняя значение ε, можно менять числа x, y, z, не нарушая условия (2). Сумма $x+y+z$ при этом меняться не будет.

Корни многочлена $f_\varepsilon(t)$ – это точки пересечения графика кубического многочлена $f(t)$ с прямой $l_\varepsilon(t)= -\varepsilon(t-1)$. Из рис. 3 видно, что значение ε можно увеличить так, что либо два из трех корней многочлена $f_\varepsilon(t)$ совпадут, либо один из корней попадет в конец отрезка $[-1,1]$.

В первом случае в силу симметрии можно считать, что $y=z$. Тогда условие (2) примет вид $x^2+2y^2+2xy^2=1$ или $2y^2(1+x)=(1-x)(1+x)$. Отсюда, либо $x= -1$, либо $x=1-2y^2$.

Если $x= -1$, то $x+y+z= -1+y+z\leq 1<3/2$.

Если $x=1-2y^2$, то $x+y+z=1-2y^2+2y=3/2-2(y-1/2)^2\leq 3/2$.

Остается рассмотреть случай $x=1$. Тогда условие (2) примет вид $y^2+z^2+2yz=0$, или $y+z=0$. Поэтому $x+y+z=1<3/2$. Задача решена.

Сочетание использованных выше идей позволяет решать некоторые задачи вообще без вычислений. Приведем пример.

Задача13. {А.1961} Пусть a, b, c – стороны треугольника, p – его полупериметр. Докажите, что тогда $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$, и равенство достигается лишь для правильного треугольника.

Решение. Докажем, что утверждение задачи справедливо для любых неотрицательных чисел a,b,c, в сумме дающих $2p$.

Выясним, при каких значениях переменных a, b c, удовлетворяющих условиям $a+b+c=2p$, $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$ достигает минимума функция $F(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right)$.

При $a=b=c$ эта функция равна нулю. А если, например, $c=0$, то $F(a,b,0)=a^2+b^2-\frac{36}{35}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{36}{35}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq 0$. Поэтому минимум функции F на указанном множестве достигается непременно при положительных значениях a, b, c.

Не ограничивая общности, можно считать, что в искомой точке минимума $a\leq b\leq c$.

Предположим, что $a<b\leq c$. Тогда график многочлена

$$f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$$

можно хоть немножко сдвинуть вниз. При соответствующем изменении переменных a, b, c значение функции $F(a,b,c)$ уменьшится, что противоречит тому, что выбрана точка минимума.

Предположим теперь, что $a\leq b<c$. тогда при достаточно малом положительном α многочлен $f_\alpha(t)=f(t)+\alpha t$ будет по-прежнему иметь три действительных корня. Заменив ими числа a, b, c, мы опять уменьшим значение функции

$$F(a,b,c)=(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)-\frac{36}{35}\left(p^2+\frac{abc}{p}\right),$$

то есть, снова получим противоречие.

Итак, нами установлено, что в точке минимума выполняются равенства $a=b=c$. В таком случае искомое минимальное значение функции F равно нулю, что и доказывает нужное неравенство.

В этом решении мы воспользовались предположением о том, что функция F достигает на рассматриваемом множестве своего минимума. Это предположение не совсем элементарно, но доказывается стандартными средствами анализа, не выходящими за рамки второго курса ВУЗа.

Упражнения

17. {h1913.2004} Пусть $0\le x,y\le 1$. Докажите неравенство $2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \le 2(1-x)(1-y)+1$.

18. {У.2000} Даны действительные числа $a\ge 1$, $b\ge 1$ такие, что $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$. Докажите, что $a=b$.

19. (Московская студенческая олимпиада) Найти множество значений выражения $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c}$ при ограничениях $a>0$, $b>0$, $c>0$, $abc=1$.

20. {S.1998} Докажите, что для произвольных положительных действительных чисел a,b,c, удовлетворяющих условию $abc=1$, выполняется неравенство $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{a^3+c^3+1}\le 1$.

21. {Л.2010} Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $\frac{3}{abc}\ge a+b+c$. Докажите неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c$.

22. Пусть a,b,c – длины сторон, а r_a,r_b,r_c – радиусы вневписанных окружностей треугольника. Докажите неравенство

$$\frac{3\sqrt{3}}{8}abc \ge r_a r_b r_c .$$

23. Пусть h_a,h_b,h_c – высоты треугольника, а S – его площадь. Докажите неравенство $\sqrt[3]{h_a h_b h_c} \le \sqrt[4]{3}\sqrt{S}$.

24. Пусть α,β,γ – углы произвольного треугольника. Докажите неравенство $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

25. Докажите, что периметр остроугольного треугольника больше учетверенного радиуса описанной около него окружности.

26. Пусть α,β,γ – углы произвольного треугольника. Докажите неравенство $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

27. Пусть a,b,c – стороны, R и r – радиусы вписанной и описанной окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\le 8R(R-2r).$$

28. Пусть r и R – радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, а p – его полупериметр. Докажите, неравенства

$$16Rr-5r^2\le p^2\le 4R^2+4Rr+3r^2.$$

29. Пусть r, r_a, r_b, r_c и R – радиусы вписанной, вневписанных и описанной окружностей некоторого треугольника. Докажите неравенство $7R^2 \le r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2$.

30. {A.1960} Пусть a,b,c – стороны, а h_a,h_b,h_c – высоты треугольника. Докажите, что выполняется неравенство

$$h_a + h_b + h_c \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

31. Пусть a,b,c – стороны некоторого треугольника, α,β,γ – противолежащие им углы. Докажите, что выполняется неравенство

$$a\sin\beta + b\sin\gamma + c\sin\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c).$$

32. Докажите, что для положительных чисел a,b,c, удовлетворяющих условию $ab+bc+ac\le 3abc$, выполняется неравенство $a^3+b^3+c^3\ge a+b+c$.

33. {W.1973} Найдите минимальное значение a^2+b^2, где a и b действительные числа, для которых уравнение $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ имеет, по крайней мере, один действительный корень.

4. Знакопеременные неравенства

До сих пор рассматривались исключительно симметрические неравенства, то есть такие неравенства, которые не меняются при всех перестановках переменных. Это обусловлено тем, что активно использовалась теорема о симметрических многочленах и выражение коэффициентов многочлена через его корни, что также приводит к симметрическим многочленам. Но иногда представляют интерес и менее симметричные неравенства. Они, как правило, доказываются заметно сложнее. Тем не менее в ряде случаев наш метод удается модифицировать так, что он позволит доказать и такие неравенства.

Приведем пример.

Задача 14. {h840.1983} а) Докажите, что если a, b, c – длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0.$$

б) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполнено неравенство $a^3b+b^3c+c^3a\geq a^2bc+b^2ca+c^2ab$.

Решение. Начнем с пункта б). Перепишем неравенство в виде

$$a^3b+b^3c+c^3a\geq abc(a+b+c).$$

Теперь умножим это неравенство на 2 и запишем его в такой форме:

$$a^3b+b^3c+c^3a-ab^3-bc^3-ca^3\geq 2abc(a+b+c)-(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3).$$

Займемся левой частью неравенства. Имеем

$$\begin{gathered}a^3b+b^3c+c^3a-ab^3-bc^3-ca^3=(a^3b-ab^3)+(b^3c-bc^3)+(c^3a-ca^3)=\\ =ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)=\\ =ab(a+b)(a-b)+bc(b+c)(b-c)+ca(c+a)(c-a)=\\ =ab(a+b)(a-b)+bc(b+c)(b-c)+ca(c+a)(c-b)+ca(c+a)(b-a)=\\ =[ab(a+b)-ca(c+a)](a-b)+[bc(b+c)-ca(c+a)](b-c)=\\ =a[ab+b^2-c^2-ac](a-b)+c[b^2+bc-ac-a^2](b-c)=\\ =a[a(b-c)+(b+c)(b-c)](a-b)+c[(b-a)(b+a)+c(b-a)](b-c)=\\ =[a^2+a(b+c)](a-b)(b-c)-[c(b+a)+c^2](a-b)(b-c)=\\ =[a^2+ab+ac-bc-ac-c^2](a-b)(b-c)=[(a-c)(a+c)+b(a-c)](a-b)(b-c)=\\ =(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c).\end{gathered}$$

Теперь видно, что левая часть неравенства меняет знак при перестановке любых двух переменных (отсюда и термин «знакопеременное»), а правая часть неравенства при этом не меняется.

Для правой части неравенства выполняется тождество

$$\begin{gathered}2abc(a+b+c)-(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3)=\\ =3abc(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=\\ =3abc(a+b+c)-(a+b+c)^2(ab+ac+bc)+2(ab+ac+bc)^2.\end{gathered}$$

Поэтому доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$(a-b)(b-c)(a-c) \geq$$
$$\geq \frac{3abc(a+b+c)-(a+b+c)^2(ab+ac+bc)+2(ab+ac+bc)^2}{a+b+c}. \qquad (3)$$

При параллельном переносе вдоль оси абсцисс графика многочлена $f(t)=(t–a)(t–b)(t–c)$ каждая из переменных a, b, c изменяется на одну и туже величину. Поэтому левая часть неравенства (3) при этом меняться не будет. Выясним, как будет меняться правая часть.

Обозначим
$$p(t)=(a+t)+(b+t)+(c+t),\ q(t)=(a+t)(b+t)+(a+t)(c+t)+(b+t)(c+t),$$
$$r(t)=(a+t)(b+t)(c+t).$$
В этих обозначениях правая часть последнего неравенства равна
$$\frac{3p(0)r(0)-(p(0))^2q(0)+2(q(0))^2}{p(0)}.$$

Продифференцируем функцию
$$\varphi(t)=\frac{3p(t)r(t)-(p(t))^2q(t)+2(q(t))^2}{p(t)}.$$
При этом полезно иметь в виду, что $p'(t)=3$, $q'(t)=6t+2(a+b+c)$ и $q'(0)=2p(0)$ и, аналогично, $r'(0)=q(0)$. С учетом этого
$$\varphi'(0)=2\frac{4(p(0))^2q(0)-(p(0))^4-3(q(0))^2}{(p(0))^2},$$
или
$$\varphi'(0)=2\frac{2abc(a+b+c)-(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}{(a+b+c)^2}.$$

Чуть ниже будет доказано, что это значение не положительно. А сейчас заметим, что отсюда следует, что правая часть неравенства (3) не возрастает, когда график многочлена $f(t)$ параллельно переносится вправо вдоль оси абсцисс. Значит, если мы будем сдвигать этот график влево, наше неравенство будет только усиливаться. Сдвигать график можно до тех пор, пока один из корней многочлена $f(t)$ не обратится в ноль. Следовательно, наше неравенство достаточно доказать в случае, когда значение одной из переменных a, b или c равно нулю.

Но при $c=0$ неравенство (3), умноженное на $a+b$ примет вид $(a^2-b^2)ab \geq -(a+b)^2 ab+2(ab)^2$ или $a^2-b^2 \geq -(a^2+b^2)$, что уже очевидно.

Осталось доказать неравенство

$$a^4+b^4+c^4+a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \geq 2abc(a+b+c).$$

Но это уже симметрическое неравенство четвертой степени. Используя уже привычный перенос графика многочлена $f(t)$ вдоль оси ординат, можно убедиться, что его достаточно доказать в двух случаях: когда одна из переменных равна нулю, и когда две из трех переменных равны между собой. В первом случае неравенство очевидно. При $b=c$ оно примет вид $(a^2+2ab+3b^2)(a-b)^2 \geq 0$, что справедливо.

Задача полностью решена. Решение оказалось связанным с некоторыми громоздкими выкладками, но сейчас их уже вполне можно поручить компьютеру. В остальном решение вполне естественно.

Результаты типа неравенства (3) представляют особый интерес в следующем контексте. Стандартным образом можно показать, что максимум величины

$$3abc(a+b+c)-(a+b+c)^2(ab+ac+bc)+2(ab+ac+bc)^2$$

равен нулю и достигается, когда значения переменных совпадают. Иногда бывает нужно знать, насколько сильно отличается значение этого выражения от максимального, когда значения переменных a, b, c «немного не совпадают». Естественной мерой несовпадения этих переменных может служить величина $((a-b)(b-c)(a-c))^2$. Эта величина во многих случаях важна. Она имеет даже специальное название. Ее называют дискриминантом многочлена $(t-a)(t-b)(t-c)$. Полученный результат как раз и отвечает на поставленный вопрос. К сожалению, такого рода результаты весьма немногочисленны, и простых методов для их получения нет.

Обсудим некоторые общие факты, которые скрыты в приведенном решении. Очевидно, что доказываемое неравенство поменяется, если мы переставим любые две переменные (например, если мы заменим a на b, а b на a, то оно примет вид

$$b^3a+a^3c+c^3b \geq a^2bc+b^2ca+c^2ab).$$

Но оно не изменится, если мы проделаем две такие перестановки (и, значит, оно не будет меняться при четном числе перестановок).

Пусть $\Phi(a,b,c)$ – произвольный многочлен, обладающий таким свойством. Представим его в виде $\Phi(a,b,c)=\Sigma(a,b,c)+\Psi(a,b,c)$, где

$$\Sigma(a,b,c)=\frac{\Phi(a,b,c)+\Phi(b,a,c)}{2},\ \Psi(a,b,c)=\frac{\Phi(a,b,c)-\Phi(b,a,c)}{2}.$$

Многочлен $\Sigma(a,b,c)$ будет симметрическим, поскольку в силу свойств многочлена $\Phi(a,b,c)$ при перестановке любых переменных $\Phi(a,b,c)$ перейдет в $\Phi(b,a,c)$, а $\Phi(b,a,c)$ перейдет в $\Phi(a,b,c)$, следовательно, сумма $\Phi(a,b,c)+\Phi(b,a,c)$ не изменится.

По тем же соображениям многочлен $\Psi(a,b,c)$ при перестановке любых двух переменных сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак (например, $\Psi(a,b,c)=-\Psi(b,a,c)$). Такие многочлены называют антисимметрическими.

Пусть $\Psi(a,b,c)$ – любой антисимметрический многочлен. Так как при $a=b$ равенство $\Psi(a,b,c)=-\Psi(b,a,c)$ превращается в равенство $\Psi(a,a,c)=-\Psi(a,a,c)$ или $\Psi(a,a,c)=0$, многочлен $\psi(a)=\Psi(a,b,c)$ равен нолю при $a=b$, а значит должен делиться на $a-b$. Следовательно, $\Psi(a,b,c)$ делится на $a-b$. Но то же относится к любой другой паре переменных, поэтому $\Psi(a,b,c)$ делится на произведение $(a-b)(b-c)(a-c)$, то есть $\Psi(a,b,c)=\Theta(a,b,c)(a-b)(b-c)(a-c)$. Поскольку и левая часть этого равенства, и произведение $(a-b)(b-c)(a-c)$ сохраняют абсолютную величину и меняют знак при любых перестановках двух переменных, частное $\Theta(a,b,c)$ не меняется при любых перестановках переменных, то есть является симметрическим многочленом.

Если теперь $\Psi(a,b,c)$ – антисимметрический многочлен четвертой степени, то частное $\Theta(a,b,c)$ – это симметрический многочлен первой степени. А тогда $\Theta(a,b,c)=\gamma(a+b+c)$, где γ – константа, которую можно найти, подставив в равенство

$$\Psi(a,b,c)=\Theta(a,b,c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

конкретные значения переменных (например, $a=0$, $b=1$, $c=2$).

С этим багажом обратимся к решению пункта а). Умножив доказываемое неравенство на 2, перепишем его в виде

$$2(a^3b+b^3c+c^3a)\geq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2).$$

Выделим симметрическую и антисимметрическую части:

$$a^3b+b^3c+c^3a-ab^3-bc^3-ca^3\geq$$
$$\geq 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3).$$

Антисимметрическая часть, как мы уже видели, равна

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c),$$

а симметрическая равна

$$4(ab+ac+bc)^2-3(a+b+c)abc-(a+b+c)^2(ab+ac+bc).$$

Таким образом, неравенство переписывается в виде

$$(a-b)(b-c)(a-c) \geq$$

$$\geq \frac{4(ab+ac+bc)^2-3abc(a+b+c)-(a+b+c)^2(ab+ac+bc)}{a+b+c}.$$

Чтобы понять, как меняется правая часть неравенства при горизонтальных сдвигах графика многочлена $f(t)$, продифференцируем функцию

$$\varphi(t)=\frac{4(q(t))^2-3p(t)r(t)-(p(t))^2q(t)}{p(t)}$$

(сохраняем обозначения из решения пункта б)). Получим

$$\varphi'(0)=2\frac{5(p(0))^2q(0)-(p(0))^4-6(q(0))^2}{(p(0))^2}.$$

Покажем, что $5(p(0))^2q(0) \leq (p(0))^4+6(q(0))^2$ или

$$5(a+b+c)^2(ab+ac+bc) \leq (a+b+c)^4+6(ab+ac+bc)^2$$

при всех неотрицательных значениях переменных a, b, c.

Это неравенство уже выражено через элементарные симметрические многочлены, причем произведение abc в это выражение не входит. Поэтому значения левой и правой частей неравенства не будут меняться при сдвигах графика кубического многочлена с корнями a, b и c вдоль оси ординат. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что этот график сдвинут «до предела» вниз и два из трех чисел a, b, c совпадают. А при $b=c$ неравенство принимает вид $a^4-2a^3b+3a^2b^2-4ab^3+2b^4 \geq 0$ или $(a^2+2b^2)(a-b)^2 \geq 0$.

Таким образом, при сдвиге графика многочлена $f(t)$ влево вдоль оси абсцисс неравенство только усиливается. Сдвигать этот график можно до тех пор, пока одно из неравенств $c<a+b$, $b<a+c$ или $a<b+c$ не обратится в равенство. Но, например, при $c=a+b$ неравенство непосредственно приводится к виду $2a^3b \geq 0$. Задача решена.

Задачи, аналогичные рассмотренным в данном разделе, часто бывают очень трудными. Поэтому наличие метода их решения, пусть сопряженного с выкладками, но естественного, представляется весьма важным.

Упражнения

34. (Вьетнамская олимпиада, 2008 г.) Пусть a, b, c – различные неотрицательные числа. Докажите, что

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(a-c)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}\geq\frac{4}{ab+ac+bc}.$$

35. {У.1992} Докажите, что если $a>b>c$, то

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

36. {h1834 б).2002} Докажите неравенство

$$x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\geq2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3).$$

37. Докажите для неотрицательных a, b, c неравенство

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2\geq2(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

5. Метод Штурма

До сих пор рассматривались задачи с малым числом переменных. В случае, когда переменных много, изучаемый в данной работе метод можно сочетать с идеей последовательного приближения к экстремуму. В простых случаях можно ограничиться манипуляциями с графиками квадратных трехчленов.

В литературе эквивалентный метод называется методом Штурма. Мне не удалось выяснить, с чем связано такое название. Не понятно даже, какой математик имеется в виду (в энциклопедии [13] упоминаются два математика с этой фамилией[2]). Но поскольку термин укоренился, он использован в названии данного раздела.

С использованием наших наглядных соображений метод Штурма выглядит примерно так.

Задача 15. Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_k$, $b_1,b_2,\ldots,b_k$ – положительные числа. Докажите, что

$$\left(\frac{1}{a_1b_1}+\frac{1}{a_2b_2}+\ldots+\frac{1}{a_kb_k}\right)\left((a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_k+b_k)^2\right)\geq4k^2.$$

---

[2] Жак Шарль Франсуа Штурм (Sturm Jacques Charles Francois, 1803–1855) – французский математик, Иоганн Кристофер Штурм (Sturm Johann Christopher, 1635–1703) – немецкий математик, астроном и физик.

Решение. Для произвольного i рассмотрим квадратный трехчлен $f_i(t)=(t-a_i)(t-b_i)$. Сдвигая график этого квадратного трехчлена вверх, мы будем увеличивать произведение a_ib_i, не меняя суммы a_i+b_i. Поэтому первая скобка в доказываемом неравенстве будет уменьшаться, а вторая останется неизменной. Сдвинем этот график так, что его корни сольются, и каждый из них станет равным $\frac{a_i+b_i}{2}$.

Если сделать такую процедуру со всеми парами a_i и b_i, то получим неравенство

$$\left(\frac{1}{a_1b_1}+\ldots+\frac{1}{a_kb_k}\right)\left((a_1+b_1)^2+\ldots+(a_k+b_k)^2\right)\geq$$

$$\geq\left(\frac{4}{(a_1+b_1)^2}+\ldots+\frac{4}{(a_k+b_k)^2}\right)\left((a_1+b_1)^2+\ldots+(a_k+b_k)^2\right).$$

Поэтому достаточно доказать неравенство

$$\left(\frac{1}{(a_1+b_1)^2}+\ldots+\frac{1}{(a_k+b_k)^2}\right)\left((a_1+b_1)^2+\ldots+(a_k+b_k)^2\right)\geq k^2.$$

Воспользуемся естественной заменой переменных, положив $c_i=(a_i+b_i)^2$, $i=1,2,\ldots,k$. В этих переменных доказываемое неравенство примет вид $\left(\frac{1}{c_1}+\ldots+\frac{1}{c_k}\right)(c_1+\ldots+c_k)\geq k^2$.

Для его доказательства используем ту же идею. Пусть $c=\frac{c_1+c_2+\ldots+c_k}{k}$ – среднее арифметическое чисел $c_1, c_2, \ldots, c_k$, c_i – наибольшее, а c_j – наименьшее из этих k чисел. Тогда $c_i\leq c\leq c_j$.

Рассмотрим многочлен $g(t)=(t-c_i)(t-c_j)$. Будем постепенно сдвигать его график вверх. Тогда величина $\frac{1}{c_i}+\frac{1}{c_j}=\frac{c_i+c_j}{c_ic_j}$ будет уменьшаться. Следовательно, будет уменьшаться и левая часть доказываемого неравенства.

В начальный момент число c лежит между числами c_i и c_j, а когда корни трехчлена почти сольются, оно будет лежать вне отрезка, ограниченного корнями трехчлена. Значит, найдется момент, когда один из корней будет равен c. В этот момент и кончим сдвигать график трехчлена вверх.

Получим новое, более сильное неравенство того же типа. С ним проделаем ту же процедуру и т.д. На каждом шаге количество чисел в множестве $\{c_1, c_2,\ldots,c_k\}$, отличных от c, будет уменьшаться. Поэтому в какой-то момент все числа в этом множестве станут одинаковыми, а неравенство превратится в очевидное равенство.

Задача решена.

Вот немножко другой способ использования той же идеи.

Задача 16. {W(Ж).1998} Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_k$ – действительные числа, большие 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\ldots+\frac{1}{1+a_k}\geq\frac{k}{1+\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}}$$

Решение. Пусть $a=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}$ – среднее геометрическое чисел $a_1, a_2,\ldots,a_k$, a_i – наибольшее, а a_j – наименьшее из этих чисел. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-a_i)(t-a_j)$. Точки пересечения его графика с прямой $l_\alpha(t)=\alpha t$ являются корнями многочлена $f_\alpha(t)=(t-a_i)(t-a_j)-\alpha t$.

При уменьшении α уменьшается сумма корней многочлена $f_\alpha(t)$, а их произведение остается неизменным. Поэтому величина

$$\frac{1}{1+a_i}+\frac{1}{1+a_j}=\frac{2+a_i+a_j}{1+a_i+a_j+a_ia_j}=$$

$$=\left(\frac{2+a_i+a_j}{1+a_i+a_j+a_ia_j}-1\right)+1=\frac{1-a_ia_j}{1+a_i+a_j+a_ia_j}+1$$

будет уменьшаться с уменьшением α (так как $1-a_ia_j\leq 0$). Следовательно, при уменьшении α левая часть доказываемого неравенства будет уменьшаться, а правая останется неизменной.

При $\alpha=0$ число a лежит между корнями многочлена $f_\alpha(t)$. При непрерывном уменьшении α прямая $y=l_\alpha(t)$ будет поворачиваться по часовой стрелке. Поэтому корни многочлена $f_\alpha(t)$ будут сближаться и в какой-то момент сольются. Значит, немного раньше один из корней многочлена $f_\alpha(t)$ станет равным a (см. рис. 4). Зафиксируем это

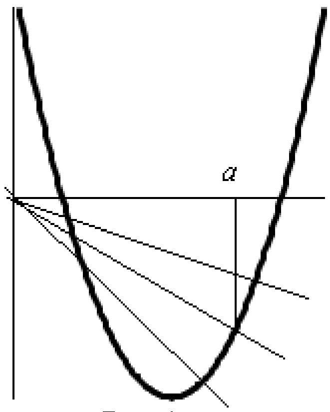

Рис. 4.

значение α и заменим числа a_i и a_j корнями соответствующего многочлена $f_\alpha(t)$.

Неравенство с новым набором чисел, аналогичное доказываемому, будет сильнее исходного. Проделаем с новым набором ту же процедуру и. т. д. На каждом шаге количество чисел в рассматриваемом наборе, которые отличны от a, будет уменьшаться. Поэтому за конечное число шагов придем к набору, в котором все числа равны a. А для такого набора доказываемое неравенство обращается в очевидное равенство. Задача решена.

Те же идеи можно оформить несколько иначе, если имеются средства установить существование каких-то максимумов или минимумов. Приведем пример.

Задача 17. (Балканиада, 1984 г.) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, сумма которых равна 1, справедливо неравенство $\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \ldots + \frac{a_k}{2-a_k} \ge \frac{k}{2k-1}$.

Решение. Докажем чуть больше. А именно, покажем, что данное неравенство выполняется для всех *неотрицательных* чисел в сумме дающих единицу. В таком случае стандартными средствами анализа устанавливается, что функция

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \ldots + \frac{a_k}{2-a_k}$$

достигает минимума на указанном множестве. Пусть это минимальное значение равно $F(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.

Пусть b_i – наименьшее, а b_j – наибольшее из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Допустим, что $b_i < b_j$. Рассмотрим многочлен $f(t)=(t-b_i)(t-b_j)$. Сдвинем его график немного вверх так, чтобы новый график по-прежнему пересекал ось абсцисс в двух точках. Корни многочлена при этом поменяются, но их сумма останется прежней, а произведение немного увеличится.

При этом величина

$$\frac{b_i}{2-b_i}+\frac{b_j}{2-b_j}=\left(\frac{b_i}{2-b_i}+1\right)+\left(\frac{b_j}{2-b_j}+1\right)-2=\frac{2}{2-b_i}+\frac{2}{2-b_j}-2=$$

$$=\frac{8-2(b_i+b_j)}{4-2(b_i+b_j)+b_ib_j}-2$$

уменьшится. Поэтому уменьшится и значение функции F. Но этого не может быть, так как $F(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ – уже минимальное значение.

Полученное противоречие доказывает, что $b_i=b_j$. Но тогда, в силу выбора чисел b_i и b_j все числа $b_1,b_2,\ldots,b_k$ равны между собой и равны $\frac{1}{k}$. А тогда минимальное значение функции F равно $\frac{k}{2k-1}$, откуда непосредственно следует нужное неравенство.

Упражнения

38. (Неравенство Серпиньского[3]) Пусть a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – положительные числа, A – их среднее арифметическое, а G – среднее геометрическое. Докажите неравенство

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)\le k^2\left(\frac{A}{G}\right)^k.$$

39. (Неравенство Фань Цзы) Пусть $0<a_i\le 1/2$ ($i=1,2,\ldots,k$). Докажите неравенство

$$\frac{a_1a_2\ldots a_k}{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^k}\le\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)}{((1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_k))^k}.$$

40. (Неравенство Гюйгенса[4]) Докажите, что если a_1, $a_2,\ldots,a_k$ – неотрицательные числа, то справедливо неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)\ge\left(1+\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\right)^k.$$

[3] Вацлав Серпиньский (Sierpinski Waclaw, 1882–1969) – польский математик.
[4] Христиан Гюйгенс (Huygens Christian, 1629–1695) – голландский механик, физик и математик.

41. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ выполняется неравенство сумма $a_1+a_2+\ldots+a_k$ не превосходит

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2}{(k-1)a_k}+\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-2}^2+a_k^2}{(k-1)a_{k-1}}+\ldots+\frac{a_2^2+a_3^2+\ldots+a_k^2}{(k-1)a_1}.$$

42. {W.2004} Пусть $k\geq 3$ – натуральное число. Пусть $a_1, a_2,\ldots,a_k$ – положительные действительные числа такие, что $k^2+1>(a_1+a_2+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)$. Докажите, что a_i, a_j, a_l являются сторонами треугольника при всех i, j, l таких, что $1\leq i<j<l\leq k$.

6. Задачи со многими переменными

Метод Штурма работает в относительно простых задачах. В случаях посложнее приходится сочетать идею последовательного приближения к экстремуму и манипуляции с графиками многочленов более высоких степеней. Вот несколько примеров.

Задача 18. {Г.1970} Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}\leq\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

Решение. Будем доказывать неравенство для неотрицательных чисел. В силу однородности неравенства можно считать, что сумма $a+b+c+d=1$. В этом случае можно доказать что существует максимум разности левой и правой частей неравенства (обозначим эту разность $F(a,b,c,d)$). Получим необходимое условие того, что точка (a,b,c,d) является точкой максимума.

Будем считать, что a, b, c – переменные, а d – параметр задачи. Тогда под корнем в левой части доказываемого неравенства стоит симметрический многочлен третьей степени, а под корнем в правой части этого неравенства стоит симметрический многочлен второй степени.

Поэтому, если мы рассмотрим многочлен $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$ и будем сдвигать его график вниз, то левая часть неравенства будет увеличиваться, а правая останется неизменной. Значит, при таком сдвиге функция $F(a,b,c,d)$ возрастает. Следовательно, если (a,b,c,d) – точка максимума, то сдвигать график многочлена $f(t)$ вниз нельзя. А это означает, что два меньших корня многочлена $f(t)$ совпадают.

Но то же самое можно сказать о любой другой тройке чисел из множества $\{a,b,c,d\}$. Итак, в точке максимума выполняется следующее условие: если мы из множества $\{a,b,c,d\}$ выберем любые три числа, то два меньших из них совпадут. А значит, три из чисел a, b, c, d равны между собой, а четвертое не меньше этих трех.

Таким образом приходим к выводу, что неравенство достаточно доказать в случае, когда $a=b=c\le d$. Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+3a^2d}{4}} \le \sqrt{\frac{3a^2+3ad}{6}}\ .$$

Возведя это неравенство в шестую степень и упростив, придем к неравенству $a(a+3d)^2\le 2(a+d)^3$ или $(a+2d)(a-d)^2\ge 0$.

Задача решена.

Использовать метод Штурма в данном случае неудобно, поскольку при изменении пары переменных меняются и левая и правая части доказываемого неравенства, и понять будет ли оно более сильным или более слабым непросто. Манипулировать с графиком многочлена четвертой степени можно, но при этом придем к необходимости доказывать неравенство с тремя переменными, а это слишком сложная задача. А сдвиг графика многочлена третьей степени – в самый раз.

Вот более сложный пример применения той же идеи.

Задача 19. Докажите, что для произвольных неотрицательных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ выполняется неравенство[5]

$$(k-1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)+k\sqrt[k]{a_1^2a_2^2\ldots a_k^2}\ge(a_1+a_2+\ldots+a_k)^2\ .$$

Решение. Будем искать минимум левой части неравенства при фиксированной правой. Пусть этот минимум достигается в точке

[5] Частный случай этого неравенства (для n=4) предлагался в 1979 г. в «Задачнике Кванта»» (задача М506). После решения этой задачи было сформулировано (без доказательства) общее неравенство.

$a_{1*},a_{2*},\ldots,a_{k*}$[6]. Если хотя бы одно из чисел равно нулю, то доказываемое неравенство сведется к неравенству между средним арифметическим и средним квадратическим, и задачу можно считать решенной. Поэтому остается рассмотреть случай, когда среди этих чисел нет нулевых.

Предположим, что для некоторых i,j,l выполняются условия $a_{i*} \geq a_{j*} > a_{l*}$. Будем считать эти три числа переменными, а все остальные – параметрами задачи. Тогда мы придем к хорошо знакомой задаче с тремя переменными. Сдвигая вверх график многочлена $f(t)=(t-a_{i*})(t-a_{j*})(t-a_{l*})$, можно уменьшить произведение чисел a_{i*},a_{j*},a_{l*}, не меняя ни их сумму, ни сумму их квадратов, а это противоречит сделанному предположению.

Поэтому неравенство достаточно доказать для случая $a_1=a$, $a_2=a_3=\ldots=a_k=b$. В этом случае имеем

$$(k-1)(a^2+(k-1)b^2)+k\sqrt[k]{a^2b^{2k-2}} \geq (a+(k-1)b)^2$$

или $(k-2)a^2+k\sqrt[k]{a^2b^{2k-2}} \geq (2k-2)ab$. Разделив неравенство на a^2 и обозначив $\frac{b}{a}=t^k$, получим $kt^{2k-2}-(2k-2)t^k+k-2 \geq 0$. Преобразуем левую часть:

$$kt^{2k-2}-(2k-2)t^k+k-2= k(t^{2k-2}-t^k)-(k-2)(t^k-1)=$$
$$=(t-1)[kt^k(t^{k-3}+\ldots+1)-(k-2)(t^{k-1}+\ldots+1)].$$

В квадратных скобках стоит $k(k-2)$ положительных слагаемых и $(k-2)k$ отрицательных. Собрав их в пары так, чтобы в каждую входило одно положительное слагаемое и одно отрицательное, и, вынеся за скобку $(t-1)$, получим в скобках сумму положительных слагаемых, что и завершает доказательство.

Результат предыдущей задачи усиливает неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим. Такие уточнения классических результатов начали появляться сравнительно недавно – в середине прошлого века. Они часто бывают полезными, а

---

[6] Конечно, нужно доказывать, что такая точка существует. В школе этого «не проходят», но любой грамотный второкурсник проведет это доказательство «в уме». Можно довести наше решение до конца и элементарными средствами, но это приводит к неоправданному удлинению.

общих методов их получения пока немного. Несколько примеров такого рода результатов можно найти в упражнениях ниже.

Вот другой пример, в котором используется та же идея.

Задача 20. {W.1971} Докажите, что утверждение «Для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выполняется неравенство

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_k)+(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_k)+\ldots$$
$$\ldots+(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})\geq 0\text{»}$$

выполняется при $k=3$ и $k=5$ и не выполняется ни при каком другом значении k.

Решение. При $k=3$ имеем симметрическое неравенство второй степени. Как в предыдущем разделе, сдвигая графики многочленов $f_{ij}(t)=(t-x_i)(t-x_j)$ убеждаемся, что его достаточно доказать в случае, когда все переменные равны между собой, а тогда все очевидно.

При $k=5$ будем считать x_1, x_2, x_3 переменными, а x_4 и x_5 – параметрами. Получим симметрическое неравенство четвертой степени относительно переменных x_1, x_2, x_3 (с параметрами x_4 и x_5, что совершенно не существенно!). Сдвигая график кубического многочлена $f(t)=(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)$, приходим к выводу, что достаточно доказать в случае $x_2=x_3$.

Рассмотрим получившееся неравенство как неравенство с переменными x_1, x_4, x_5 и параметром $x_2=x_3$. В него переменные x_1, x_4, x_5 входят симметрично! Используя аналогичные рассуждения можно убедиться, что его достаточно доказать для случая, когда $x_4=x_5$.

Рассмотрим многочлен $g(t)=(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)(t-x_4)(t-x_5)$. Нас интересует знак величины $g'(x_1)+g'(x_2)+g'(x_3)+g'(x_4)+g'(x_5)$. В случае $x_2=x_3$ и $x_4=x_5$ только слагаемое $g'(x_1)$ отлично от нуля. Многочлен $g(t)$ имеет три разных корня, но в точках $t=x_2$ и $t=x_4$ он не меняет знака. А при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ он меняет знак с отрицательного на положительный. Значит, в точке $t=x_1$ он меняет знак с минуса на плюс. Поэтому в этой точке $g(t)$ возрастает, а $g'(t)$ положительно.

Эти же рассуждения подсказывают контрпример при больших k. Если выбрать значения переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ так, что

$$x_1=\ldots=x_{k-4}<x_{k-3}<x_{k-2}=x_{k-1}=x_k,$$

то многочлен $h(t)=(t-x_1)(t-x_2)\ldots(t-x_k)$ будет иметь три различных корня, причем при $k>5$ два из них кратные. При больших значениях t значение $h(t)$ положительно, а в точке $x_{k-2}=x_{k-1}=x_k$ он меняет знак.

Значит на интервале (x_{k-3},x_{k-2}) он отрицателен, а потому в точке x_{k-3} меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в точке x_{k-3} многочлен $h(t)$ убывает и его производная отрицательна. В точках $x_1,\ldots$ $\ldots,x_{k-4}$, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k производная равна нулю, а потому сумма $h'(x_1)+h'(x_2)+\ldots+h'(x_k)$ отрицательна, что и дает нужный результат.

Остается рассмотреть случаи k=2 и k=4, но в этих случаях многочлен, стоящий в левой части интересующего нас неравенства, имеет нечетную степень относительно x_1, и он не может сохранять свой знак. Задача решена.

До сих пор уж очень часто приходилось иметь дело с задачами, в которых оптимум достигался при равных значениях переменных. Покажем, что это не всегда бывает так. Попробуем получить аналог результата задачи М2002 из «Задачника «Кванта» (см. упр. 53 из [3]) для случая четырех переменных. Один из возможных вариантов дает следующая задача.

Задача 21. Докажите, что для всех положительных a, b, c и d, в сумме дающих единицу, выполняется неравенство

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{1620}{27+20000abcd}.$$

Решение. Пожалуй, стоит объяснить, как было получено данное неравенство. Будем искать параметры p и q, для которых справедливо неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq\frac{p}{1+qabcd}$. Запишем его в виде $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)(1+qabcd)\geq p$ и будем искать минимум левой части.

Будем считать d параметром и перепишем ее в виде

$$\left(\frac{ab+ac+bc}{abc}+\frac{1}{d}\right)(1+qabcd).$$

Теперь видно, что при уменьшении $ab+ac+bc$ и неизменных $a+b+c$ и abc уменьшается и значении функции. Значит, в точке оптимума два больших из трех чисел a, b, c должны быть равны.

Но то же относится к любой тройке переменных, поэтому три больших из чисел a, b, c, d должны быть равны между собой. В силу симметрии можно считать, что $a=b=c\geq d=1-3a$. В силу условий $0<d\leq a$, выполняются неравенства $\frac{1}{4}\leq a<\frac{1}{3}$.

Остается найти на рассматриваемом интервале минимум функции $f(a)=\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{1-3a}\right)(1+qa^3(1-3a))$. Ее производная равна

$$f'(a)=\frac{3(4a-1)[q(18a^5-12a^4+2a^3)+2a-1]}{a^2(3a-1)^2}.$$

Минимум может достигаться в одном из корней многочлена $g(a)=q(18a^5-12a^4+2a^3)+2a-1$, лежащих на данном интервале. Беда в том, что найти эти корни в общем случае затруднительно. Поэтому поступим наоборот. Допустим, что $g(a)$ обращается в ноль при $a=0.3$. Тогда должно быть $q=\frac{20000}{27}$. Если в точке $a=0.3$ достигается минимум, то он должен быть равен значению $f(0.3)$ при данном значении q. Таким образом, приходим к гипотезе, что $p=60$. Отсюда и получается неравенство из условия задачи. Остается его доказать.

Как уже установлено, достаточно доказать, что $f(a)-60\geq 0$ (при найденном значении q), или что

$$\frac{(4800a^3-520a^2-144a+9)(10a-3)^2}{a(3a-1)(60000a^4-20000a^3-27)}\geq 0.$$

Для этого нужно установить, что на интервале $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$ выполняются условия $4800a^3-520a^2-144a+9\geq 0$ и $60000a^4-20000a^3-27<0$. Поскольку $a\geq\frac{1}{4}$, удобно ввести переменную $t=a-\frac{1}{4}$. Тогда эти неравенства перепишутся в виде $(9600t^3+6160t^2+992t+31)/2\geq 0$ и $60000t^4+40000t^3+7500t^2-841/8\geq 0$. Первое неравенство очевидно. В левой части второго стоит монотонная функция, и его достаточно проверить при $t=1/12$, а в этом случае оно принимает вид $-27\leq 0$.

Упражнения

43. Докажите, что для неотрицательных чисел a,b,c,d выполняется неравенство

$6(a+b+c+d)abcd \le (ab+ac+ad+bc+bd+cd)(abc+abd+acd+bcd)$.

44. Докажите, что для произвольных положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ выполняется неравенство

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} \ge \frac{1}{k}\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2}{k}} + \frac{k-1}{k}\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\ .$$

45. Докажите, что для произвольных неотрицательных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ выполняется неравенство

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2 \ge k\sqrt[k]{a_1^2a_2^2\ldots a_k^2} + \left(a_1-\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)^2 + \ldots + \left(a_k-\frac{a_1+\ldots+a_k}{k}\right)^2 .$$

46. Числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ($k \ge 3$) удовлетворяют равенствам $x_1+x_2+\ldots+x_k=0$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=1$. Какое наибольшее и наименьшее значение может иметь сумма $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_k^3$?

47. Числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$ ($k \ge 4$) удовлетворяют равенствам $x_1+x_2+\ldots+x_k=0$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2=1$ и $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_k^3=0$. Какое наибольшее значение может иметь сумма $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_k^4$?

48. Найдите наименьшее значение суммы $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+x_5^4$, если $x_1+x_2+\ldots+x_5=0$, $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_5^2=1$ и $x_1^3+x_2^3+\ldots+x_5^3=0$.

49. (Иранская олимпиада, 1998 г.) Пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 положительные действительные числа, такие, что $a_1a_2a_3a_4=1$. докажите, что

$$a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3 \ge \max\left\{a_1+a_2+a_3+a_4, \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}\right\}.$$

7. Указания

1. Произведение abc входит в разность левой и правой частей неравенства линейно. Поэтому максимум этой разности может достигаться либо для вырожденного треугольника, либо для равнобедренного. В случае вырожденного треугольника слева стоит ноль и неравенство очевидно. В случае равнобедренного треугольника получаем неравенство $(2b-a)a^2(2ab+b^2) \le ab^2(4ab-a^2)$, которое после очевидных упрощений приводится к виду $(a-b)^2 \ge 0$.

2. В случае вырожденного треугольника слева стоит ноль и неравенство очевидно. В случае равнобедренного получается неравенство $(2b-a)a^2(4ab-a^2)\le ab^2(b^2+2ab)$, которое тождественными преобразованиями приводится к виду $a(b^4+2ab^3-8a^2b^2+6a^3b-a^4)\ge 0$ или, после разложения на множители, $a(b^2+4ab-a^2)(a-b)^2\ge 0$. Это неравенство справедливо, поскольку в равнобедренном треугольнике $2b\ge a$.

3. Площадь треугольника, составленного из медиан, составляет 3/4 площади исходного треугольника, а радиус описанной окружности R связан с площадью S и длинами сторон a,b,c треугольника формулой $abc=4RS$. Поэтому доказываемое неравенство сводится к виду $8m_am_bm_c\ge 5abc$, где m_a,m_b,m_c – длины медиан треугольника. Используя равенство $m_a^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$ и аналогичные, запишем это неравенство в виде $(2a^2+2b^2-c^2)(2a^2+2c^2-b^2)(2b^2+2c^2-a^2)\ge 25a^2b^2c^2$. Если $u=a^2$, $v=b^2$, $w=c^2$, получим $(2u+2v-w)(2u+2w-v)(2v+2w-u)\ge$ $\ge 25uvw$. Для нетупоугольного треугольника выполняются неравенства $u+v\ge w$, $u+w\ge v$, $v+w\ge u$. Поскольку неравенство имеет третью степень, его достаточно доказать для двух частных случаев: когда одно из последних трех неравенств обращается в равенство и когда значения каких-то двух из трех переменных равны. В случае $w=u+v$ неравенство легко приводится к виду $4u^2+4v^2-8uv\ge 0$, что очевидно справедливо, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $u=v$. В случае $v=w$ получим $4v^3+12u^2v-10uv^2-4u^3\ge 0$, а из рассмотрения предыдущего случая известно, что при $u=2v$ имеет место равенство. Поэтому левая часть неравенства разлагается на множители $2(u-2v)(v^2-2uv+2u^2)\ge 0$ или $2(u-2v)((v-u)^2+u^2)\ge 0$, что очевидно.

4. Рассуждения стандартны. В случае $b=c$ приходим к неравенству $a(a+b)(a-3b)\le 0$, которое следует из неравенства треугольника, а в случае $c=a+b$ получаем очевидное неравенство $ab(a+b)\ge 0$.

5. Если p – полупериметр треугольника, то его площадь $S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)=ah_a/2=bh_b/2=ch_c/2$. Поэтому неравенство приводится к виду $\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge 6$. Если мы умножим неравенство на общий знаменатель, получим симметрическое неравенст-

во третьей степени. Элементарный симметрический многочлен abc не может входить в него в степени, превышающей первую, поэтому неравенство достаточно доказать для случая вырожденных треугольников, у которых одна сторона равна сумме двух других, и для случая равнобедренных треугольников. В первом случае неравенство очевидно, так как справа стоит ноль, а слева – неотрицательное число. В случае $b=c$ получим неравенство $\frac{a}{2b-a}+\frac{2b}{a}\geq 3$, которое эквивалентно $4(a-b)^2\geq 0$.

6. Обозначим S – площадь треугольника. С помощью формул $r=\frac{S}{p}, R=\frac{abc}{4S}$ неравенство приведется к виду $10abc(a+b+c)-16S^2\leq$ $\leq(ab+bc+ac)(a+b+c)^2$. Вспоминая формулу Герона, заметим, что S^2 – симметрический многочлен от a,b,c четвертой степени, зависящий от abc линейно. Поэтому неравенство достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В случае $c=a+b$ площадь обращается в ноль, и неравенство приводится к виду $20ab(a+b)^2\leq 4(ab+(a+b)^2)(a+b)^2$ или $4(a+b)^2(a-b)^2\geq 0$. В случае $b=c$ получаем $(2b-a)(2b+a)(a-b)^2\geq 0$. Это неравенство немедленно следует из неравенства треугольника.

7. Площадь треугольника $S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$, где p – полупериметр треугольника. Поэтому неравенство приводится к виду $\sqrt{3}p\leq S\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right)$. Избавимся от знаменателей:

$$\begin{gathered}\sqrt{3}p(p-a)(p-b)(p-c)\leq\\ \leq S((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)).\end{gathered}$$

Вспомнив формулу Герона и сократив на S, получим $\sqrt{3}S\leq(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-a)(p-c)$. Теперь очевидно, что неравенство достаточно доказать для вырожденных и для равнобедренных треугольников. В первом случае площадь равна нулю, и все очевидно. При $b=c$ будем иметь $\sqrt{3a^2(4b^2-a^2)}\leq 4ab-a^2$. После возведения в квадрат и очевидных преобразований неравенство сведется к виду $(a-b)^2 \geq 0$.

8. С помощью формул $S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$ и формулы Герона наше неравенство приводится к виду $27(p-a)(p-b)(p-c) \leq p^3$. Элементарный симметрический многочлен abc может входить только в левую часть неравенства, причем только в первой степени. В случае, когда одна из сторон «треугольника» равна сумме двух других, слева стоит ноль и неравенство очевидно. В случае $b=c$ получим $27(2b-a)a^2 \leq (2b+a)^3$, или $4(7a+2b)(a-b)^2 \geq 0$.

9. Площадь треугольника $S=r_a(p-a)=r_b(p-b)=r_c(p-c)$, где p – полупериметр треугольника. Поэтому неравенство приводится к виду

$$\frac{3}{S}(a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)) \geq 4S\left(\frac{1}{a(p-a)}+\frac{1}{b(p-b)}+\frac{1}{c(p-c)}\right),$$

или, после умножения на общий знаменатель и применения формулы Герона, к виду

$$3abc(p-a)(p-b)(p-c)[a(p-a)+b(p-b)+c(p-c)] \geq$$
$$\geq 4p(p-a)(p-b)(p-c)[ab(p-a)(p-b)+ac(p-a)(p-c)+bc(p-b)(p-c)].$$

После сокращения получим неравенство пятой степени. Теперь уже видно, что и в левую и в правую части элементарный симметрический многочлен abc входит линейно. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В случае $a=b+c$ получаем очевидное неравенство $6(b+c)b^2c^2 \geq 4(b+c)b^2c^2$. При $b=c$ получим неравенство $3a^2b^2(4b-a) \geq a^2b(a+2b)(5b-2a)$, которое легко приводится к виду $2a^2b(a-b)^2 \geq 0$.

10. Пусть a,b,c – стороны рассматриваемого треугольника. Тогда $ah_a=bh_b=ch_c=(a+b+c)r$. С помощью этих равенств можно исключить высоты и радиус вписанной окружности из доказываемого неравенства, после чего задача решается стандартным способом.

11. Эта задача решается так же как предыдущая с единственным отличием. Получающееся неравенство удобнее доказывать для произвольных неотрицательных чисел a,b,c, а не только для таких, которые являются длинами сторон треугольника.

12. Пусть S – площадь рассматриваемого треугольника. Используя равенства $2S=ah_a=bh_b=ch_c$, приведем доказываемое неравенство

к виду $16S^2(a+b+c)\leq 3abc(ab+bc+ac)$. Вспоминая формулу Герона замечаем, что элементарный симметрический многочлен abc входит в левую и правую части линейно. Поэтому неравенство достаточно доказать для двух частных случаев: когда треугольник вырожденный и когда он равнобедренный. В первом случае неравенство очевидно, так как площадь равна нулю. При $b=c$ неравенство приводится к виду $(a+2b)a^2(4b^2-a^2)\leq 3ab^2(2ab+b^2)$, или $a(a+b)(a+3b)(a-b)^2\geq 0$.

13. Если S – площадь треугольника, то $2S=(a+b+c)r$ и $4RS=abc$. Поэтому неравенство переписывается в виде

$$4abc(a+b+c)-64S^2\leq(a+b+c)^2[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2].$$

Вспомнив формулу Герона увидим, что в левой части стоит симметрический многочлен четвертой степени от переменных a,b,c. Поэтому неравенство достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В первом случае в левой части исходного неравенства стоит ноль, поэтому оно очевидно. При $b=c$ неравенство стандартным образом приводится к виду $2(a-2b)(a+2b)(a-b)^2\leq 0$, что справедливо, поскольку в силу неравенства треугольника $a<2b$.

14. Если S – площадь треугольника, то $2S=(a+b+c)r$. Поэтому неравенство примет вид $4\sqrt{3}S(ab+ac+bc)\leq 3abc(a+b+c)$. Выше показано, что S^2 – симметрический многочлен от переменных a, b, c, в разложение которого по элементарным симметрическим многочленам произведение abc входит с отрицательным коэффициентом. Поэтому при уменьшении abc левая часть последнего неравенства увеличивается, а правая уменьшается. Значит, неравенство достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В первом случае оно очевидно. А при $b=c$ после возведения в квадрат оно записывается в виде $12a^2b^2(a+2b)(a+b)(a-b)^2\geq 0$.

15. Поскольку $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)$, при увеличении abc и неизменных $a+b+c$ и $ab+ac+bc$ левая часть неравенства возрастает, а как показано выше, правая – убывает (опять нужно воспользоваться выражением радиуса вписанной окружности через площадь треугольника и формулой Герона). Поэтому неравенство достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В первом случае оно очевидно. При $b=c$ получим после возведения в квадрат неравенство $2a^3b^2(a+2b)(a-b)^2\geq 0$. Равен-

ство здесь достигается при $a=b$, т.е. для равносторонних треугольников и почти достигается, когда a стремится к нулю. Последнему случаю соответствуют равнобедренные треугольники с очень маленькими углами при вершине. Для таких треугольников длина меньшей стороны почти равна $2r$, а две другие очень велики, по сравнению с r.

16. В [1] показано, что функция $F(t)=\left(\frac{a^t+b^t+c^t}{3}\right)^{\frac{1}{t}}$ не убывает. Из результата предыдущего упражнения следует, что $2\sqrt{3}r \le F(-2)$. Отсюда и следует первый результат. Чтобы доказать второе неравенство, рассмотрим функцию $G(t)=\left(\frac{a}{2r}\right)^t+\left(\frac{b}{2r}\right)^t+\left(\frac{c}{2r}\right)^t$. Так как сторона треугольника больше диаметра вписанной окружности, функция возрастает. Из результата предыдущего упражнения следует, что $G(-2)\le 1$. Значит $G(t)<1$ при $t<-2$, что и требуется.

17. Сделаем замену переменных $a=1-x$, $b=1-y$. Неравенство преобразуется к виду $2\sqrt{(2-a)(2-b)ab} \le 2ab+1$. Теперь очевидно, что элементарный симметрический многочлен $a+b$ первой степени входит только в левую часть неравенства, причем подкоренное выражение зависит от него линейно. Заменяя корни уравнения $(t-a)(t-b)=0$ на корни уравнения $(t-a)(t-b)=\varepsilon t$, можно менять сумму $a+b$, не меняя произведения ab. Следовательно, неравенство достаточно проверить в трех частных случаях: при $a=b$, при $b=0$ и при $b=2$. Во всех трех случаях это нетрудно сделать.

18. Докажем, что $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$, причем равенство достигается только при $a=b$. Для этого преобразуем левую часть: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=\frac{2+a+b}{1+a+b+ab}=1+\frac{1-ab}{1+a+b+ab}$. Фиксируем произведение ab, и будем менять сумму $a+b$. Тогда очевидно, что левая часть неравенства минимальна, когда $a=b$, а в этом случае неравенство обращается в равенство.

19. При фиксированных сумме $a+b+c$ и произведении abc выражение $ab+ac+bc$ принимает наибольшее и наименьшее значения в том случае, когда значения двух из трех переменных совпадают. Считая, что $a=b,\ c=1/a^2$, приведем выражение к виду $\frac{a^4+2a}{2a^3+1}$. Очевидно, что это выражение принимает все значения на интервале $(0,+\infty)$, а отрицательных значений исходное выражение принимать не может.

20. Обозначим $a^3=A$, $b^3=B$, $c^3=C$. Тогда $ABC=1$ и нужно доказать, что $\frac{1}{A+B+1}+\frac{1}{B+C+1}+\frac{1}{A+C+1}\le 1$.Избавившись от знаменателя и собрав все члены в левой части, получим неравенство вида $F(A,B,C)\le 0$, где F – симметрический многочлен третьей степени. В его разложение по элементарным симметрическим многочленам выражение $AB+BC+AC$ входит не более чем в первой степени. Поэтому неравенство достаточно доказать в случае, когда $A=B,\ C=1/A^2$. А в этом случае неравенство легко приводится к виду $A(A-1)^2(A+1)\ge 0$.

21. Оба неравенства только усилятся, если все переменные умножить на число $t>1$. Поэтому задачу достаточно решить в случае, когда данное неравенство обращается в равенство. Если, не меняя $a+b+c$ и abc уменьшать $ab+ac+bc$, то это равенство нарушаться не будет, а доказываемое неравенство будет усиливаться. Поэтому его достаточно доказать при условии, когда две из трех переменных равны. Если $b=c$, то с учетом положительности a рассматриваемое равенство будет эквивалентно $a=\frac{-b^3+\sqrt{b^6+3b^2}}{b^2}$. Подставив это значение в доказываемое неравенство, после естественных преобразований придем к неравенству $b^4+3b^2\le 2b^2\sqrt{b^4+3}$. Возведя в квадрат, получим $3b^4(b^2-1)^2\ge 0$.

22. Выражая радиусы окружностей через площадь треугольника S , его полупериметр p и стороны, приведем неравенство к виду $\frac{3\sqrt{3}}{8}abc\ge\frac{S^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}$, или, вспоминая формулу Герона

$\frac{3\sqrt{3}}{8}abc \geq \sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}$. Теперь видно, что элементарный симметрический многочлен $ab+ac+bc$ может входить только в подкоренное выражение, причем не более чем в первой степени. Поэтому неравенство достаточно доказать для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В первом случае справа стоит ноль, и неравенство очевидно. Во втором случае неравенство приведется к виду $3\sqrt{3}ab^2 \geq \sqrt{(a+2b)^3(2b-a)a^2}$. После возведения в квадрат и преобразований, получим очевидное неравенство

$$(a-b)^2(a^2+6ab+11b^2)\geq 0.$$

23. С помощью формул $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ приведем неравенство к виду $S^3 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3 (abc)^2$. Вспоминая формулу Герона, замечаем, что от элементарного симметрического многочлена $ab+bc+ac$ зависит только левая часть неравенства, причем эта зависимость монотонна. Для вырожденных треугольников это неравенство очевидно, так как слева стоит ноль. Остается доказать его для равнобедренных треугольников. При $b=c$ имеем $\left(\sqrt{\frac{1}{16}a^2(4b^2-a^2)}\right)^3 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^3 a^2b^4$. После возведения в квадрат и сокращения получим $a^2(4b^2-a^2)^3\leq 27b^8$, что приводится к виду $(a^2-b^2)^2(27b^4-10a^2b^2+a^4)\geq 0$. Это неравенство справедливо, так как дискриминант квадратного трехчлена $t^2-10t+27$ отрицателен.

24. С помощью формул $2S=bc\sin\alpha=ac\sin\beta=ab\sin\gamma$ неравенство сводится к виду $2S(a+b+c)\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}abc$. По формуле Герона зависимость левой части этого неравенства от элементарного симметрического многочлена $ab+ac+bc$ монотонна, а для вырожденных треугольников доказываемое неравенство очевидно. Поэтому его достаточно доказать для случая равнобедренного треугольника. При $b=c$ неравенство стандартным образом сводится к виду $(a-b)^2(a^2+6ab+11a^2)\geq 0$, что для положительных чисел справедливо.

25. Пусть a,b,c – стороны, α,β,γ – углы, а R – радиус описанной окружности треугольника. Поскольку $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$ утверждение задачи равносильно неравенству $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$. Дословно повторяя рассуждения предыдущего решения убеждаемся, что неравенство достаточно доказать в двух случаях: для равнобедренных и для прямоугольных треугольников. В случае $b=c$, после возведения в квадрат придем к неравенству $a(16b^3-a^3-4a^2b)>0$. Последнее неравенство легко следует из того, что в остроугольном равнобедренном треугольнике $a<b\sqrt{2}$. В случае, когда угол γ – прямой, получаем неравенство $\sin\alpha+\sin\beta>1$, которое справедливо, так как $\sin\alpha+\sin\beta=\sin\alpha+\cos\alpha>\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

26. Дословно повторяя рассуждения решения упр. 24, неравенство можно свести к виду $\frac{1}{8}\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(4-\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^3}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$. После замены переменных $t=(a/b)^2$ это неравенство сводится к виду $t(4-t)^3\le 27$ или $(t-1)^2(t^2-10t+27)=(t-1)^2((t-5)^2+2)\ge 0$.

27. Пусть p – полупериметр треугольника, $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$. Тогда $a=x+y$, $b=x+z$, $c=y+z$, $p=x+y+z$, площадь $S=\sqrt{(x+y+z)xyz}$, $r=S/p$, $R=\frac{(x+y)(x+z)(y+z)}{4S}$. Определим элементарные симметрические функции $u=x+y+z$, $v=xy+xz+yz$, $w=xyz$. В этих переменных $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=2(p^2-3q)$, $(x+y)(x+z)(y+z)=$ $=(u-z)(u-y)(u-x)=u^3-u^3+uv-w=uv-w$. С учетом этого доказываемое неравенство переписывается в виде $u^2v^2+2uwv-4u^3w+9w^2\ge 0$. Теперь очевидно, что левая часть последнего неравенства зависит от v монотонно. Значит, неравенство достаточно доказать для случая, когда две из трех переменных x, y, z совпадают. Но при $y=z$ доказываемое неравенство приводится к виду $4y^4(x-y)^2\ge 0$.

28. Заменим среднюю часть неравенства, используя тождество $r_ar_b+r_ar_c+r_br_c=p^2$, где r_a, r_b, r_c – радиусы вневписанных окружностей рассматриваемого треугольника. Практически дословно повторяя рассуждения из решения задачи 10 убедимся, что неравенства достаточно доказать для случая, когда две из трех переменных r_a, r_b, r_c

совпадают. При $r_b=r_c$ левое неравенство приведется к виду $\dfrac{r_b^2(r_a-r_b)^2}{(2r_a+r_b)^2}\ge 0$, а правое примет вид $\dfrac{r_a^2(r_a-r_b)^2}{(2r_a+r_b)^2}\ge 0$.

29. Рассмотрим элементарные симметрические многочлены $u=r_a+r_b+r_c$, $v=r_ar_b+r_ar_c+r_br_c$, $w=r_ar_br_c$. С помощью тождеств из решения задачи 10 доказываемое неравенство приводится к виду $\dfrac{9u^2v^2+14uvw-32v^3+9w^2}{16v^2}\ge 0$. Отсюда видно, что левая часть неравенства зависит от u монотонно. Поэтому рассуждениями, аналогичными решению задачи 10 , можно убедиться, что неравенство достаточно доказать в случае, когда два из трех чисел r_a, r_b, r_c равны. При $r_b=r_c$ неравенство приводится к виду $\dfrac{(3r_a+r_b)^2(r_a-r_b)^2}{4(2r_a+r_b)^2}\ge 0$.

30. Пусть S – площадь рассматриваемого треугольника. Используя равенства $2S=ah_a=bh_b=ch_c$ приведем доказываемое неравенство к виду $2S(ab+bc+ac)\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}abc(a+b+c)$. По формуле Герона $S=\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)[4(a+b+c)(ab+bc+ac)-(a+b+c)^3-8abc]}$. Отсюда видно, что левая часть неравенства монотонно возрастает с ростом величины $ab+bc+ac$. Поэтому неравенство достаточно доказать в двух частных случаях: для вырожденных треугольников и для равнобедренных. В первом случае неравенство очевидно, так как площадь обращается в ноль. В случае $b=c$ неравенство, после возведения в квадрат, приведется к виду $a^2(4b^2-a^2)(2ab+b^2)^2\le 3a^2b^4(a+2b)^2$, или $4a^2b^2(a+2b)(a+b)(a-b)^2\ge 0$.

31. Заменой $h_c=a\sin\beta$, $h_a=b\sin\gamma$, $h_b=c\sin\alpha$ неравенство сводится к предыдущему.

32. Не ограничивая общности, можем считать, что $ab+bc+ac=3abc$. В самом деле, неравенство только усилится, если мы заменим числа a,b,c на числа αa, αb, αc, где $\alpha=\dfrac{ab+bc+ac}{3abc}<1$.

Теперь заметим, что если равенство $ab+bc+ac=3abc$ выполняется для корней многочлена $f(t)=(t-a)(t-b)(t-c)$, то оно выполняется и для корней многочлена $f(t)-\beta(3t-1)$. Тождество $(a^3+b^3+c^3)=(a+b+c)^3-3(ab+ac+bc)(a+b+c)+3abc$ показывает, что левая часть неравенства тем больше, чем больше значение β, поэтому неравенство достаточно доказать для случая $b=c$ (при увеличении β меньший корень многочлена $f(t)-\beta(3t-1)$ либо возрастает, либо остается больше 1/3). Но тогда имеем $a=\dfrac{b}{3b-2}$. Подставляя эти значения в доказываемое неравенство, после естественных преобразований получим неравенство $6b(9b^3-6b+2)(b-1)^2\geq 0$. Остается заметить, что согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $9b^3+2=9b^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{9b^3}=3\sqrt[3]{9}b>6b$, ибо $\sqrt[3]{9}>2$.

33. Если все корни рассматриваемого уравнения различны, то мы можем увеличить b, не меняя a. Для этого нужно заменить корни многочлена $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ на абсциссы точек пересечения графика этого многочлена с параболой $g_\varepsilon(x)=\varepsilon x^2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда, по крайней мере, один корень уравнения – кратный. Но уравнение симметрично, поэтому если x – корень уравнения, то $1/x$ тоже корень этого уравнения, причем той же кратности. Поэтому, если x отлично от $1/x$, уравнение можно записать в виде $(x^2+tx+1)^2=0$, где t – некоторый параметр, который должен удовлетворять условию $|t|\geq 2$, чтобы уравнение имело действительные корни. Коэффициенты a и b выражаются через параметр t следующим образом: $a=2t$, $b=t^2+2$. Таким образом, надо найти минимум функции $4t^2+(t^2+2)^2=t^4+8t^2+4$ при условии $|t|\geq 2$. Нетрудно проверить, что этот минимум достигается при $t=\pm 2$ и равен 52.

Эти рассуждения не проходят, когда значения x и $1/x$ совпадают, то есть $x=\pm 1$. В этом случае должно выполняться равенство $(\pm 1)^4+a(\pm 1)^2+b(\pm 2)^2+a(\pm 1)+1=0$ и значение a^2+b^2 равно $5a^2\pm 4a+4$. Минимум последнего выражения равен 4/5 и достигается при $a=\pm 4/5$. Непосредственно проверяется, что в этом случае корень $x=\pm 1$ действительно кратный.

34. Левая часть не меняется, а правая увеличивается, если сдвигать график кубического многочлена с корнями a, b, c влево. Поэтому неравенство достаточно доказать в случае, когда одно из данных чисел равно нулю. При c=0 оно примет вид $\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{4}{ab}$.

Два раза выделив квадраты, получим $\frac{1}{(a-b)^2}-\frac{2}{ab}+\frac{(a-b)^2}{(ab)^2}\geq 0$ или $\left(\frac{1}{a-b}-\frac{a-b}{ab}\right)^2\geq 0$. Чтобы выяснить, когда достигается равенство, запишем его в виде $\left(a-\frac{3+\sqrt{5}}{2}b\right)^2\left(a-\frac{3-\sqrt{5}}{2}b\right)^2\geq 0$. Отсюда видно, что равенство достигается, если одно из данных чисел равно нулю, а отношение двух других в том или ином порядке равно $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

35. Пусть $\Phi(a,b,c)$ – разность левой и правой частей данного неравенства. Производная функции $f(t)=\Phi(a+t,b+t,c+t)$ при t=0 равна $\frac{2a}{a-b}+\frac{2b}{b-c}-4=\frac{2b}{a-b}+\frac{2c}{b-c}\geq 0$. Поэтому неравенство достаточно доказать для случая c=0. В этом случае получим неравенство $\frac{a^2}{a-b}>a+b$, что с учетом условия $a>b$ эквивалентно $0>-b^2$.

36. Неравенство только усилится, если числа x, y, z заменить их модулями. Поэтому его достаточно доказать для неотрицательных x, y, z. Пусть $\Phi(x,y,z)$ – разность левой и правой частей данного неравенства. Производная функции $f(t)=\Phi(x+t,y+t,z+t)$ при t=0 равна $6(x^5+y^5+z^5+(xy+yz+zx)xyz-(x^2y^3+x^3y^2+y^2z^3+y^3z^2+z^2x^3+z^3x^2))$. Докажем, что она неотрицательна. Последнее выражение – симметрический многочлен пятой степени. Значит, доказать неотрицательность достаточно в двух случаях: когда одно из чисел x, y, z равно нулю, и когда среди них есть равные. При z=0 получим $x^5+y^5-x^2y^3-x^3y^2=$ $=(x^3-y^3)(x^2-y^2)\geq 0$. При $y=z$ будем иметь $x^5+xy^4-2x^3y^2=x(x^2-y^2)^2\geq 0$. Поскольку производная неотрицательна, исходное неравенство доста-

точно доказать для случая, когда одно из чисел x, y, z равно нулю. При z=0 получим $x^6+y^6-2x^3y^3=(x^3-y^3)^2\geq 0$.

37. В решении предыдущего упражнения установлено, что данное неравенство достаточно доказать для случая, когда одно из чисел a, b, c равно нулю. При c=0 получим $a^6+b^6\geq 2a^3b^3+9a^2b^2(a-b)^2$, $(a^3-b^3)^2\geq 9a^2b^2(a-b)^2$, $(a-b)^2[(a^2+ab+b^2)^2-9a^2b^2]\geq 0$, или

$$(a-b)^2(a^2+4ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)^4(a^2+4ab+b^2)\geq 0.$$

38. Избавившись от знаменателей, перепишем неравенство в виде $k^{k-2}(a_1a_2\ldots a_{k-1}+a_1\ldots a_{k-2}a_k+\ldots+a_2a_3\ldots a_k)\leq(a_1+a_2+\ldots+a_k)^{k-1}$. Если мы соберем в левой части этого неравенства все члены, содержащие произведение a_ia_j, то коэффициент при a_ia_j окажется равным сумме всевозможных произведений остальных переменных, взятых в количестве k–3. Важно, что этот коэффициент будет положительным. Поэтому сдвигая график квадратного трехчлена $f(t)=(t-a_i)(t-a_j)$ вверх, мы будем усиливать неравенство. Выбрав индексы i и j так, чтобы a_i было наибольшим из данных k чисел, а a_j – наименьшим, можно подобрать такую величину сдвига, при которой один из корней этого многочлена станет равен A. Проделав аналогичную процедуру не более k раз, придем к неравенству, в котором все числа a_1, $a_2,\ldots,a_k$ равны. Такое неравенство очевидно обращается в равенство.

39. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{((1-a_1)+(1-a_2)+\ldots+(1-a_k))^k}{(a_1+a_2+\ldots+a_k)^k}\leq\frac{(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)}{a_1a_2\ldots a_k}.$$

Поскольку $\frac{(1-a_i)(1-a_j)}{a_ia_j}=\frac{1-(a_i+a_j)+a_ia_j}{a_ia_j}=\frac{1-(a_i+a_j)}{a_ia_j}+1$ и $(a_i+a_j)\leq 1$, доказываемое неравенство будет усиливаться, если увеличивать произведение a_ia_j, не меняя суммы a_i+a_j и значений остальных переменных. Такое изменение можно получить, сдвигая вверх график многочлена $f(t)=(t-a_i)(t-a_j)$. Если значения i и j выбрать так, чтобы a_i было наибольшим, а a_j – наименьшим из заданных чисел, то величину сдвига можно подобрать так, чтобы один из корней этого многочлена стал равен среднему арифметическому чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$. Заменив числа a_i и a_j корнями соответствующего многочлена, получим более сильное неравенство, и при этом количество чисел, отличных от среднего арифметического уменьшится. Проделав такую процедуру конечное число раз, придем к неравенству, в котором все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равны. А такое неравенство очевидно выполняется.

40. Из формулы $(1+a_i)(1+a_j)=1+(a_i+a_j)+a_ia_j$ видно, что выражение $(1+a_i)(1+a_j)$ будет уменьшаться, если, не меняя произведения a_ia_j, уменьшать сумму a_i+a_j. Этого можно добиться, увеличивая значение α в многочлене $f_\alpha(t)=(t-a_i)(t-a_j)+\alpha t$ и заменяя числа a_i и a_j корнями получившегося многочлена. Выбрав индексы i и j так, чтобы a_i было больше, а a_j было меньше среднего геометрического чисел a_1, $a_2, \ldots, a_k$, можно подобрать такое значение α, что один из корней соответствующего многочлена станет равным среднему геометрическому, а получившееся неравенство будет сильнее исходного. Проделав такую процедуру конечное число раз, придем к случаю, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ будут равными, а тогда доказываемое неравенство обратится в равенство.

41. После преобразований задача сводится к доказательству неравенства $k(a_1+a_2+\ldots+a_k) \le (a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right)$. Из равенств $a_i^2+a_j^2=(a_i+a_j)^2-2a_ia_j$ и $\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_j}=\frac{a_i+a_j}{a_ia_j}$ видно, что правая часть неравенства будет уменьшаться, если, не меняя суммы a_i+a_j увеличивать произведение a_ia_j. Поскольку левая часть неравенства не изменяется, неравенство достаточно доказать для случая $a_i=a_j$. Но сказанное справедливо для любой пары переменных. Следовательно, неравенство достаточно проверить для случая, когда все переменные равны. А тогда все очевидно.

42. В силу симметрии можно считать, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$. Предположим, что утверждение задачи не верно. Тогда $a_k \ge a_1+a_2$. Пусть b_1, $b_2, \ldots, b_k$ – точка минимума функции $F(a_1,a_2,\ldots,a_k)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}$ на множестве неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, удовлетворяющих условиям $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$. $a_k \ge a_1+a_2$, $a_1+a_2+\ldots+a_k=1$ (последнее равенство можно считать выполненным в силу однородности правой части доказываемого неравенства). Рассмотрим многочлены $f_{ij}(t)=(t-a_i)(t-a_j)$. Сдвигая график многочлена $f_{1k}(t)$, убедимся, что в точке минимума

$b_k=b_1+b_2$. Сдвигая график многочлена $f_{12}(t)$ придем к выводу, что в точке минимума $b_1=b_2$. Наконец, рассматривая многочлены $f_{ij}(t)$ при $i, j\neq 1,2,k$, придем к выводу, что $b_3=b_4=\ldots=b_{k-1}$.

Теперь, используя все полученные необходимые условия, придем к выводу, что неравенство достаточно доказать в случае, когда $a_1=a_2=a$, $a_k=2a$, $a_3=a_4=\ldots=a_{k-1}=(1-4a)/(k-3)$. Тогда неравенство записывается в виде $8(k^2+1)a^2-4(1+3k)a+5\geq 0$. Дискриминант квадратного трехчлена в его левой части равен $-16k^2+96k-144=-16(k-3)^2$. Поскольку дискриминант не положителен, неравенство справедливо.

43. Рассмотрим разность левой и правой частей доказываемого неравенства. Считая одно из чисел параметром, а три других переменными, замечаем, что в точке максимума этой разности два из трех чисел равны между собой. Итак, неравенство достаточно доказать в случае, когда либо одно из чисел равно нулю, либо из любых трех чисел два равны между собой. В первом случае все очевидно. Второй случай разбивается на два подслучая. Либо имеем две пары равных чисел, либо три из четырех чисел равны между собой. Если $a=c,\ b=d$ неравенство приводится к виду $2(ab)(a+b)(a-b)^2\geq 0$. А если $b=c=d$ получим неравенство $3b^3(a-b)^2\geq 0$.

44. Будем считать левую часть неравенства фиксированной, и найдем максимум правой части. Так как мы можем менять второе слагаемое, не меняя первого, максимум правой части достигается в том случае, когда из любых трех чисел два меньших равны между собой. Поэтому неравенство достаточно доказать в случае, когда $a_2=a_3=\ldots=a_k$. В силу однородности можем считать, что $a_2=a_3=\ldots=a_k=1$. Обозначив $a_1=t^k$, приведем неравенство к виду $t^k+(k-1)\geq\sqrt{\dfrac{t^{2k}+(k-1)}{k}}+(k-1)t$. Изолировав радикал и возведя неравенство в квадрат, получим $k[(t^k-(k-1)(t-1))^2-1]\geq t^{2k}-1$ или

$$k[(t^k-1)-(k-1)(t-1)]\,[(t^k+1)-(k-1)(t-1)]-(t^{2k}-1)\geq 0.$$

Разделив на $(t-1)^2$ и преобразовав, получим

$$(k-1)(t-1)^2[t^{2k-2}+2t^{2k-3}\ldots+(k-1)t^k-kt^{k-1}-\ldots-3t^2-2t+k^2(k-2)+1]\geq 0.$$

Остается доказать неотрицательность выражения в квадратных скобках. При $k=2$ имеем $t^2-2t+1=(t-1)^2\geq 0$. А при больших k проходит достаточно грубая оценка. Перепишем это выражение в виде

$(t^{2k-2}-2t+2)+(2t^{2k-3}-3t^2+3)+\ldots+((k-1)t^k-kt^{k-1}+k)+3t^2+k^2(k-2)+1-2-\ldots-k$.

Производная функции $f(t)=(i+1)t^{2k-2-i}-(i+2)t^{i+1}+i+2$ очевидно неотрицательна при $t>1$, а потому функция возрастает при $t>1$. А поскольку при $t\leq1$ выполняется неравенство $f(t)\geq-(i+2)t^{i+1}+i+2\geq0$, имеем $f(t)\geq0$ для всех неотрицательных t.

Остается доказать, что

$$k^2(k-2)+1-2-3-...-k=k^2(k-2)+2-\frac{k(k+1)}{2}\geq0\,.$$

Пренебрегая двойкой и сократив на k получим долее сильное неравенство $2k(k-2)\geq k+1$. Вновь отбросив константу и сократив, получим еще более сильное неравенство $2k\geq5$, что справедливо, поскольку предполагается, что $k\geq3$.

45. Сдвигая график многочлена $f(t)=(t-a_i)(t-a_j)(t-a_l)$ вниз, мы будем только усиливать доказываемое неравенство. Поэтому неравенство достаточно доказать для случая, когда среди любых трех из чисел a_1, $a_2,\ldots,a_k$ два меньших совпадают. Это значит, что $k-1$ из этих чисел равны между собой. Если эти $k-1$ чисел равны a, а оставшееся число равно b, то неравенство приводится к виду $(k-1)a^2+b^2\geq k\sqrt[k]{a^{2k-2}b^2}+\frac{k-1}{k}(a-b)^2$. Разделив его на b^2 и обозначив $a/b=t^k$, придем к неравенству $g(t)=(k-1)^2t^{2k}-k^2t^{2k-2}+(2k-2)t^k+1\geq0$. Согласно правилу Декарта этот многочлен имеет не более двух положительных корней. Непосредственно проверяется, что и сам многочлен, и его производная обращаются в ноль при $t=1$, то есть $t=1$ – двукратный корень этого многочлена. Следовательно, других корней нет, и на положительной полуоси многочлен знака не меняет. Поскольку $g(0)>0$, он неотрицателен при всех положительных t, что и доказывает неравенство.

46. Будем считать, что какие-то три из чисел $x_1,x_2,\ldots,x_k$ являются переменными, а остальные – параметрами задачи. Тогда мы можем, сдвигая график кубического многочлена вверх/вниз, уменьшать/увеличивать значение суммы кубов, не нарушая данных ограничений (это следует из равенства $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+bc+ac)+3abc$). Следовательно, если в точке $x_1,x_2,\ldots,x_k$ сумма кубов достигает минимума/максимума на множестве чисел,

удовлетворяющих данным равенствам, то среди любых трех чисел из множества $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ найдется два равных, причем в точке максимума равны меньшие числа, а в точке минимума – большие. Поэтому в обеих точках экстремума должно выполняться условие $x_1=a$, $x_2=\ldots=x_k=b$, где числа a и b удовлетворяют равенствам $a+(k-1)b=0$, $a^2+(k-1)b^2=1$. Отсюда $a=\sqrt{\frac{k-1}{k}}, b=-\frac{1}{\sqrt{k^2-k}}$ или $a=-\sqrt{\frac{k-1}{k}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{k^2-k}}$. Ответ: $-\frac{k-2}{\sqrt{k^2-k}}$ и $\frac{k-2}{\sqrt{k^2-k}}$.

47. Прежде всего выразим сумму $x^4+y^4+z^4+w^4$ через переменные $p=x+y+z+w$, $q=xy+xz+xw+yz+yw+zw$, $r=xyz+xyw+xzw+yzw$, $s=xyzw$. Имеем $pr=4xyzw+x^2yz+\ldots$ (многоточием обозначены члены, получающиеся из x^2yz перестановками переменных; их всего 12). Далее $q^2=(x^2y^2+\ldots)+2(x^2yz+\ldots)+6xyzw$. Сравнивая эти два равенства, получим $x^2y^2+x^2z^2+x^2w^2+y^2z^2+y^2w^2+z^2w^2=q^2-2pr+2s$. С учетом этого

$$x^4+y^4+z^4+w^4=(x^2+y^2+z^2+w^2)^2-2(x^2y^2+x^2z^2+x^2w^2+y^2z^2+y^2w^2+z^2w^2)=$$
$$=(p^2-2q)^2-2(q^2-2pr+2s)=p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s.$$

Суммы $x+y+z+w$, $x^2+y^2+z^2+w^2$ и $x^3+y^3+z^3+w^3$ также выражаются через p, q и r. Поэтому, если мы будем сдвигать график многочлена $f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)(t-w)=t^4-pt^3+qt^2-rt+s$ вниз, то эти три суммы будут оставаться неизменными, а сумма $x^4+y^4+z^4+w^4$ будет увеличиваться. Такой сдвиг можно осуществлять до тех пор, пока график не «зацепится» за ось абсцисс точкой локального максимума, то есть два средних числа не станут равными.

Поэтому, если при выполнении данных в условии задачи равенств сумма $x_1^4+x_2^4+\ldots+x_k^4$ максимальна, то выбрав из чисел x_1, $x_2,\ldots,x_k$ любые четыре, мы обнаружим, что среди них имеется два равных, причем эти два равных числа лежат между двумя другими.

А такое может быть, только если все числа, кроме двух, равны между собой.

В силу симметрии можно считать, что $x_1=x$, $x_2=\ldots=x_{k-1}=y$, $x_k=z$. Тогда данные в условии равенства примут вид $x+(k-2)y+z=0$, $x^2+(k-2)y^2+z^2=1$, $x^3+(k-2)y^3+z^3=0$. Исключив y, получим симметрическую систему уравнений относительно x и z: $(k-2)(x^2+z^2)+(x+z)^2=k-2$,

$(k–2)^2(x^3+z^3)+(x+z)^3=0$. Введя новые переменные $u=(x+z)$, $v=xz$, перепишем второе уравнение в виде $u[(k–2)^2(u^2–3v)+u^2]=0$. Числа x и z разных знаков, поэтому $v<0$ и в квадратных скобках стоит положительное число. Следовательно $u=0$, или $x+z=y=0$. Тогда из первого уравнения системы имеем $x=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и сумма четвертых степеней равна 1/2.

48. Рассуждая как в решении предыдущего упражнения убедимся, что в точке минимума график многочлена $f(t)=(t–x)(t–y)(t–z)(t–w)$, где x, y, z, w – любые четыре из чисел x_i должен «цепляться» точкой минимума за ось абсцисс. Поэтому в точке минимума только три из пяти данных чисел различны, причем среднее по величине отлично от всех других.

Поэтому возможны три случая: три самых маленьких числа равны между собой, три самых больших числа равны между собой, два самых маленьких числа равны и два самых больших числа равны. Во всех трех случаях данных трех равенств достаточно для нахождения этих чисел.

Первые два случая приводят к рассмотрению частного случая системы, рассмотренной в решении предыдущего упражнения. Как установлено, эта система имеет единственное решение, отвечающее точке максимума (кроме того, в решении этой системы «кратное» значение оказывается средним). Поэтому остается рассмотреть третий случай.

Если $x_1=x_2=x$, $x_3=y$, $x_4=x_5=z$ и $x<y<z$, то получим систему уравнений $2x+y+2z=0$, $2x^2+y^2+2z^2=1$, $2x^3+y^3+2z^3=0$. Эта система решается аналогично системе, рассмотренной в решении предыдущего упражнения. Она имеет два существенно различных решения: $x=-\dfrac{1}{2}$, $y=0$, $z=\dfrac{1}{2}$ и $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{10}}{20}$, $y=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$, $z=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{10}}{20}$, но только первое из них удовлетворяет условиям $x<y<z$. Поэтому искомое наименьшее значение равно 1/4.

49. Докажем неравенство $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3 \geq a_1+a_2+a_3+a_4$. Обозначим любые три из чисел a_1, a_2, a_3, a_4 буквами a, b, c и будем их считать переменными, а четвертую – параметром. Поскольку в выражение $a^3+b^3+c^3$ через элементарные симметрические многочлены выражение $ab+ac+bc$ входит с отрицательным знаком, увеличивая его, мы будем усиливать неравенство. Поэтому неравенство достаточно доказать для случая, когда два больших из трех чисел a, b, c совпадают. А так как сказанное относится к любым трем числам, можно считать, что $a_1=a_2=a_3=a$, $a_4=\dfrac{1}{a^3}$. В таком случае неравенство примет вид $3a^3+\dfrac{1}{a^9} \geq 3a+\dfrac{1}{a^3}$, или $3a^{12}-3a^{10}-a^6+1\geq 0$. Остается преобразовать:

$$3a^{10}(a^2-1)-(a^2-1)(a^4+a^2+1)=(a^2-1)[(a^{10}-a^4)+(a^{10}-a^2)+(a^{10}-1)]=$$
$$=(a^2-1)^2(3a^8+3a^6+3a^4+2a^2+1)\geq 0.$$

Теперь докажем, что $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3 \geq \dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}$. С учетом условия, это неравенство можно переписать в виде $a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3 \geq a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4$. Это неравенство однородно, поэтому можно доказать, что оно справедливо для любых неотрицательных значений переменных. А тогда его можно доказывать методом Штурма. Меняя произведение a_ia_j при неизменной сумме, придем к выводу, что неравенство достаточно доказать в двух случаях: когда числа равны, и когда среди них есть ноль. В первом случае все очевидно. При $a_4=0$ получим неравенство $a_1^3+a_2^3+a_3^3 \geq a_1a_2a_3$, которое слабее неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел.

8. Приложение

W – международная олимпиада;
W(Ж) – из материалов жюри международной олимпиады;
У – Всеукраинская;
Г – олимпиада ГДР;
Л – Ленинградская (Санкт-Петербургская);
h – Задачник «Кванта» (с указанием номера);
S – Соросовская олимпиада на Украине;
A – журнал American Mathematical Monthly.

Литература

1. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта. М.: ВЦ РАН. 2010.

2. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Правило Декарта и мажоризация. М.: ВЦ РАН. 2011.

3. Горелов М.А. Простые задачи оптимизации. Симметрические многочлены. М.: ВЦ РАН. 2011.

4. Седракян Н.М., Авоян А.М. Неравенства. Методы доказательства. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

5. Гомонов С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения. М.: Дрофа, 2005.

6. Харди Г., Литтлвуд Д., Пойа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.

7. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.

8. Mitrinovic D. S. Analytic Inequalities. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1970.

9. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства. М.: Мир, 1965.

10. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970.

11. Понтрягин Л. С. Обобщения чисел. М.: Наука, 1986.

12. Шафаревич И.Р. Избранные главы алгебры. М.: Журнал «Математическое образование», 2000.

13. Математика. Большой энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.