Как придумать задачу?

Михаил Горелов

В свое время на вопрос «Как решать задачу?» пытался ответить Дьердь Пойа [5] (более современный вариант ответа на вопрос Пойа и дальнейшие ссылки см. [3]). Я попытаюсь ответить на аналогичный вопрос: «Как придумать задачу?». Такого рода вопросы относятся к числу вечных: многие стремились ответить на них, но никому это пока не удалось. Я полагаю, что окончательного ответа попросту не существует, но все же делаю очередную попытку.

Рамки данной статьи не позволяют обсудить поднятый вопрос столь же подробно, как Пойа обсуждает свой. Ниже описывается лишь одно из возможных направлений, следуя которым можно прийти к созданию целой серии новых задач. Впрочем, это направление весьма типично: оно довольно часто приводит к успеху.

1. Производящий многочлен

Начнем со следующей задачи.

Задача 1. (*Ленинградская олимпиада, 1986*) Дано

$$\begin{aligned} u_1 &= ax+by+cz,\ v_1 = ax+bz+cy,\\ u_2 &= ay+bz+cx,\ v_2 = az+by+cx,\\ u_3 &= az+bx+cy,\ v_3 = ay+bx+cz, \end{aligned} \qquad (1)$$

где a, b, c, x, y, z — вещественные числа. Известно, что $u_1u_2u_3=v_1v_2v_3$. Докажите, что перестановкой чисел в тройке (u_1,u_2,u_3) можно получить тройку (v_1,v_2,v_3).

Решение. По сути в задаче требуется доказать совпадение множеств $\{u_1,u_2,u_3\}$ и $\{v_1,v_2,v_3\}$. Сравнивать два множества, когда заранее неизвестно, какой элемент совпадает с каким, не очень удобно. Поэтому рассмотрим многочлены

$$f(t)=(t-u_1)(t-u_2)(t-u_3) \text{ и } g(t)=(t-v_1)(t-v_2)(t-v_3).$$

Множества их корней совпадают тогда и только тогда, когда совпадают сами многочлены. А многочлены совпадают в том и только том случае, когда попарно равны их коэффициенты. Поэтому достаточно доказать, что равны соответствующие коэффициенты многочленов

$$f(t)=t^3-(u_1+u_2+u_3)t^2+(u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3)t-u_1u_2u_3$$

и

$$g(t)=t^3-(v_1+v_2+v_3)t^2+(v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3)t-v_1v_2v_3,$$

то есть доказать равенства

$$\begin{gathered} u_1+u_2+u_3=v_1+v_2+v_3,\\ u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3,\\ u_1u_2u_3=v_1v_2v_3. \end{gathered}$$

Первое из них доказывается совсем просто. Коэффициент при x в его левой части равен $a+b+c$. В силу симметрии задачи коэффициенты при y и z будут такими же, и левая часть равна $(a+b+c)(x+y+z)$. Аналогично, и правая часть равна $(a+b+c)(x+y+z)$, откуда и следует нужное равенство.

Докажем второе. Коэффициент при x^2 в его левой части равен $ab+bc+ac$. В силу симметрии, такие же коэффициенты будут при y^2 и z^2. Коэффициенты при xy, равен $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$. Аналогично находятся коэффициенты при xz и yz. Поэтому левая часть равна

$$(x^2+y^2+z^2)(ab+bc+ac)+(xy+xz+yz)(ab+bc+ac)+\\+(a^2+b^2+c^2)(xy+xz+yz).$$

Такое же значение имеет и правая часть.

Третье равенство дано в условии задачи, значит, коэффициенты многочленов совпадают и задача решена.

На самом деле, получено даже больше: если корни многочленов f и g задаются формулами (1), то их графики получаются один из другого параллельным переносом вдоль оси ординат.

Упражнения.

1. (*Всероссийская олимпиада, 2004 г.*) Найдите все углы a, для которых набор чисел $\sin a$, $\sin 2a$, $\sin 3a$ совпадает с набором $\cos a$, $\cos 2a$, $\cos 3a$.

2. (*Московская олимпиада, 1952 г.*) Докажите тождество

$$(ax+by+cz)^2+(bx+cy+az)^2+(cx+ay+bz)^2=\\=(cx+by+az)^2+(bx+ay+cz)^2+(ax+cy+bz)^2.$$

3. (*Московская олимпиада, 1952 г.*) Докажите тождество

$$(ax+by+cz+du)^2+(bx+cy+dz+au)^2+\\+(cx+dy+az+bu)^2+(dx+ay+bz+cu)=\\=(dx+cy+bz+au)^2+(cx+by+az+du)^2+\\+(bx+ay+dz+cu)^2+(ax+dy+cz+bu)^2.$$

2. ПЕРЕСТАНОВОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА

Естественно, возникает вопрос: какой из графиков многочленов f или g лежит выше? Глядя на рисунок, легко понять, что выше лежит график того многочлена, у которого наибольший корень меньше. Таким образом, нужно выяснить, какое из чисел, заданных условиями (1), самое большое.

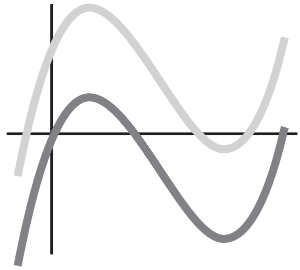
Чтобы сформулировать соответствующий результат, удобно ввести следующие два термина.

Подстановкой элементов конечного множества X называют взаимнооднозначное отображение s множества X на себя.

Одинаковые по длине последовательности действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называют одинаково упорядоченными, если для любой пары индексов i и j неравенство $x_i \geq x_j$ выполняется тогда и только тогда, когда $y_i \geq y_j$.

Следующий результат, активно применявшийся П.Л. Чебышевым, оказывается полезным очень часто.

Рис. 1



Теорема. Если последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ одинаково упорядочены, то для любой подстановки s элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \geq x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)}.$$

Из этой теоремы следует, что если последовательности a,b,c и x,y,z одинаково упорядочены, то из шести чисел u_1,u_2,u_3,v_1,v_2,v_3, заданных условием (1), наибольшим является число u_1. Поэтому график многочлена f лежит ниже графика многочлена g. В частности, $f(0) \leq g(0)$. Но, очевидно, $f(0) = -u_1u_2u_3$, а $g(0) = -v_1v_2v_3$. Поэтому справедлива

Теорема. Если последовательности a,b,c и x,y,z одинаково упорядочены, то

$$\begin{gathered}(ax+by+cz)(ay+bz+cx)(az+bx+cy) \geq \\ \geq (ax+bz+cy)(az+by+cx)(ay+bx+cz).\end{gathered}$$

Взглянем еще раз на рисунок. Из него хорошо видно, что когда график кубического многочлена с тремя действительными корнями поднимается, его средний корень увеличивается. Поэтому неравенство из последней теоремы довольно тонкое.

Еще одно замечание для знатоков. Из того же рисунка видно, что при параллельном переносе графика кубического многочлена вдоль оси ординат больший и меньший корни многочлена сдвигаются в одну сторону. Следовательно, ни одна из троек u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 не мажорирует другую.

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы Чебышева.

Доказательство проведем индукцией по длине последовательностей n. Случай $n = 1$ тривиален.

Пусть $n = 2$. В этом случае имеется всего две подстановки. Одна из них — тождественная, и для нее доказываемое неравенство превращается в очевидное равенство. Для другой доказываемое неравенство запишется в виде $x_1y_1+x_2y_2 \geq x_1y_2+x_2y_2$ или $(x_1-x_2)(y_1-y_2) \geq 0$. Так как последовательности одинаково упорядочены, числа в скобках в последнем неравенстве имеют один знак и неравенство справедливо. Это дает базу индукции.

Предположим теперь, что теорема уже доказана для всех последовательностей длины, меньшей n, и пусть последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ одинаково упорядочены.

Заметим, прежде всего, что существует такой номер i, что $x_i=\max\limits_{1\le k\le n} x_k$ и одновременно $y_i=\max\limits_{1\le k\le n} y_k$. Действительно, в противном случае выбрав l так, что $x_l=\max\limits_{1\le k\le n} x_k$ и m, удовлетворяющее условию $y_m=\max\limits_{1\le k\le n} y_k$, мы получили бы $x_l>x_m$, но $y_l<y_m$, что противоречит одинаковой упорядоченности последовательностей. Зафиксируем любое такое i.

Пусть j таково, что $\sigma(j)=i$ и наряду с подстановкой σ рассмотрим подстановку φ, заданную условиями $\varphi(i)=\sigma(j)$, $\varphi(j)=\sigma(i)$ и $\varphi(k)=\sigma(k)$ для любого $k\ne i, j$. Для завершения шага индукции достаточно доказать два неравенства:

$$x_1y_1+\ldots+x_ny_n\ge x_1y_{\varphi(1)}+\ldots+x_ny_{\varphi(n)}\ge x_1y_{\varphi(1)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)}.$$

Для доказательства левого неравенства нужно заметить, что в обеих его частях есть слагаемое $x_iy_i=x_iy_{\varphi(i)}$. После сокращения неравенство будет следовать из предположения индукции, относящегося к последовательностям $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, которые являются одинаково упорядоченными (убедитесь!).

Правое неравенство сокращается еще более радикально. Оно запишется в виде $x_iy_{\varphi(i)}+x_jy_{\varphi(j)}\ge x_iy_{\sigma(i)}+x_jy_{\sigma(j)}$ или $x_iy_{\sigma(j)}+x_jy_{\sigma(i)}\ge x_iy_{\sigma(i)}+x_jy_{\sigma(j)}$. В силу выбора индексов i и j последовательности x_i, x_j и $y_{\sigma(j)}, y_{\sigma(i)}$ одинаково упорядочены, и все сводится к уже рассмотренному случаю $n=2$.

Особого рассмотрения требует случай $i=j$, но он гораздо проще и рассматривается дословно так, как двумя абзацами выше (проверьте!).

Шаг индукции завершен и теорема доказана.

Упражнения

4. (*Московская олимпиада, 1959 г.*) Имеется два набора чисел: $a_1>a_2>\ldots>a_k$ и $b_1>b_2>\ldots>b_k$. Докажите, что

$$a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_kb_k>a_1b_k+a_2b_{k-1}+\ldots+a_kb_1.$$

5. (*Венгерская олимпиада, 1935 г.*) Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — некоторая подстановка чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Докажите, что

$$\frac{a_1}{c_1}+\frac{a_2}{c_2}+\ldots+\frac{a_k}{c_k}\ge n.$$

6. Две одинаковые по длине последовательности действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ назовем противоположно упорядоченными, если для любой пары индексов i и j неравенство $x_i\ge x_j$ выполняется тогда и только тогда, когда имеет место неравенство неравенство $y_i\le y_j$. Докажите, что если последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ противоположно упорядочены, то для любой подстановки σ элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\le x_1y_{\sigma(1)}+x2y_{\sigma(2)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)}.$$

7. (*Международная олимпиада, 1975 г.*) Пусть a_i, b_i ($i=1, \ldots, k$) — действительные числа, такие, что $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_k$ и $b_1\ge b_2\ge\ldots\ge b_k$.

Докажите, что если $d_1, d_2, \ldots, d_k$ — любая перестановка чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k$, то

$$\sum_{i=1}^{k}\left(a_i-b_i\right)^2\le\sum_{i=1}^{k}\left(a_i-d_i\right)^2.$$

8. (*Московская олимпиада, 1971 г.*) Даны два набора чисел $a_1, a_2, ..., a_k$ и $b_1, b_2, ..., b_k$. Расположим числа a_i в возрастающем порядке, а числа b_i — в убывающем порядке. Получатся наборы $a_{(1)} \le a_{(2)} \le \ldots \le a_{(k)}$, $b_{[1]} \ge b_{[2]} \ge \ldots \ge b_{[k]}$. Докажите, что

$$\max\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ ...,\ a_k+b_k\}$$
$$\ge \max\{a_{(1)}+b_{[1]},\ a_2+b_{[2]},\ ...,\ a_{(k)}+b_{[k]}\}.$$

9. (*Ленинградская олимпиада, 1991 г.*) Даны неотрицательные числа a, b, c и d. Докажите неравенство

$$\max\{a^2-b,\ b^2-c,\ c^2-d,\ d^2-a\} \ge \max\{a^2-a,\ b^2-b,\ c^2-c,\ d^2-d\}.$$

11. Докажите, что если для любой подстановки σ элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется неравенство

$$x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n \ge x_1y_{\sigma(1)}+x_2y_{\sigma(2)}+\ldots+x_ny_{\sigma(n)},$$

то последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ одинаково упорядочены.

12. Пусть последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ одинаково упорядочены. Докажите, что

$$\frac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n}{n} \ge \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \cdot \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}.$$

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Первая теорема предыдущего раздела находит многочисленные приложения благодаря тому, что последовательности, о которых идет там речь, можно разными способами конкретизировать. Видимо, то же относится и ко второй теореме.

Например, очевидно, что одинаково упорядочены последовательности x, y, z и x, y, z. Отсюда немедленно получаем отнюдь не простое неравенство:

$$(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+xz)^2 \ge (x^2+2yz)(y^2+2xz)(z^2+2xy).$$

Скрыв все предыдущие рассуждения, можно попросить кого-нибудь доказать это неравенство. Получится новая задача, причем довольно трудная. Скорее всего, «с двумя звездочками». А ведь это самый простой вариант.

Если числа a, b, c положительны, то последовательности a, b, c и $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$ упорядочены противоположно, откуда

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \le \left(1+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

Если числа a, b, c положительны, то последовательности a, b, c и a^2, b^2, c^2 одинаково упорядочены, следовательно,

$$(a^3+b^3+c^3)(a^2b+b^2c+c^2a)(a^2c+b^2a+c^2b) \ge$$
$$\ge \left(a^3+bc(b+c)\right)\left(b^3+ac(a+c)\right)\left(c^3+ab(a+b)\right).$$

Уже отмечалось, что использовать мажорирование для доказательства этого неравенства нельзя. Еще один естественный подход к его доказательству состоит в применении неравенства Мюрхеда после раскрытия скобок. Но и это не получается!

Теперь мы имеем способ генерирования новых неравенств, как простых, так и экзотических.

Упражнения

12. Числа a, b, c положительны. Докажите, что последовательности a, b, c и $\frac{1}{1+a^2}$, $\frac{1}{1+b^2}$, $\frac{1}{1+c^2}$ упорядочены противоположно.

13. Числа a, b, c положительны. Докажите, что последовательности a, b, c и ab, bc, ca упорядочены противоположно.

14. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — противолежащие им углы. Тогда последовательности a, b, c и α, β, γ упорядочены одинаково.

15. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — противолежащие им углы. Тогда последовательности a, b, c и $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ упорядочены противоположно.

16. Пусть a, b, c — стороны остроугольного треугольника, а α, β, γ — противолежащие им углы. Тогда последовательности a, b, c и $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ упорядочены одинаково.

4. ВОЗВРАЩЕНИЕ К ИСТОКАМ

Попробуем разобраться, на чем основаны полученные результаты. Центральным элементом доказательства основного неравенства была проверка тождеств. Доказательство путем раскрывания скобок, конечно, вполне естественно и универсально, но именно поэтому мало что дает для понимания существа дела в каждом конкретном случае. Поэтому имеет смысл поискать какую-то другую идею.

И такая идея есть. Проще всего объяснить ее на примере доказательства уже установленного тождества

$$u_1u_2+u_1u_3+u_2u_3=v_1v_2+v_1v_3+v_2v_3,$$

где числа u_i и v_i определяются условиями (1).

Считая b, c, x, y, z параметрами, рассмотрим разность левой и правой частей этого равенства как многочлен от переменной a:

$$\begin{aligned}F(a)=&(ax+by+cz)(ay+bz+cx)+(ax+by+cz)(az+bx+cy)+\\&+(ay+bz+cx)(az+bx+cy)-(ax+bz+cy)(az+by+cx)-\\&-(ax+bz+cy)(ay+bx+cz)-(az+by+cx)(ay+bx+cz).\end{aligned} \qquad (2)$$

Очевидно, что степень этого многочлена не превосходит двух. На самом деле она не превосходит единицы. Действительно, чтобы получить коэффициент при a^2, нужно из каждой скобки выбрать слагаемое, содержащее a. Поскольку в формулах (1) в левом и правом столбцах коэффициентами при a встречаются по одному разу все параметры x, y и z, коэффициент при a^2 у многочлена $F(a)$ будет равен $xy+xz+yz-(xz+xy+yz)=0$. Таким образом, $F(a)$ — это линейная функция.

Перепишем формулы (1) в следующем виде

$$\begin{aligned} u_1&=ax+by+cz, & v_3&=bx+ay+cz,\\ u_2&=ay+bz+cx, & v_2&=by+az+cx,\\ u_3&=az+bx+cy, & v_1&=bx+ax+cy \end{aligned}$$

(я переставил местами два уравнения и поменял порядок суммирования). Но теперь видно, что при $a=b$ каждое из чисел в левом столбце равно соответствующему числу в правом. Поэтому, $F(b)=0$.

Аналогично доказывается, что $F(c)=0$ (выпишите соответствующую перестановку самостоятельно).

Как мы установили, $F(a)$ — линейная функция. Известно, что ее график — это прямая. Кроме того, мы нашли две общие точки (b и c) у этой прямой с осью абсцисс. По известной аксиоме геометрии эта прямая совпадает с осью абсцисс, то есть $F(a)\equiv 0$, что и требуется доказать.

Строго говоря, рассуждения предыдущего абзаца не применимы к случаю, когда $b=c$. Но тогда те же рассуждения можно провести, рассматривая разность левой и правой частей равенства как функцию переменной b. Таким образом, неисследованным останется случай $a=b=c$, в котором все очевидно.

Упражнения

17. Докажите, что

$$x^n+(x+3)^n+(x+5)^n+(x+6)^n+(x+9)^n+(x+10)^n+(x+12)^n+(x+15)^n=$$
$$=(x+1)^n+(x+2)^n+(x+4)^n+(x+7)^n+(x+8)^n+(x+11)^n+(x+13)^n+(x+14)^n$$

при $n=0, 1, 2, 3$.

18. Докажите тем же методом тождество

$$u_1+u_2+u_3=v_1+v_2+v_3.$$

19. Почему те же рассуждения не проходят при доказательстве тождества

$$u_1u_2u_3=v_1v_2v_3\,?$$

20. Решите новым методом упражнения ***1*** и ***2***.

5. НА ЧЕМ ОСНОВАНО ОСНОВНОЕ НЕРАВЕНСТВО?

Попытаемся понять, как устроены выражения в формулах (1). Очевидно, они отличаются лишь подстановками переменных x, y, z. Всего таких подстановок $3!=6$, поэтому использованы все возможности. Все они поделены на два класса: «левый» и «правый». Чтобы понять принцип такого деления, воспользуемся неким инвариантом.

Рассмотрим многочлен от трех переменных

$$\Phi(x,y,z)=(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2$$

(для знатоков: это дискриминант кубического многочлена с корнями x, y, z).

Очевидно, он не меняется при любых подстановках переменных. А значит, при любой подстановке переменных значение другого многочлена

$$\Psi(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)$$

либо не меняется, либо умножается на -1.

Легко видеть, что выражениям, стоящим в формулах (1) слева соответствуют перестановки, не меняющие значения многочлена $\Psi(x,y,z)$, а выражениям, стоящим справа, — подстановки, при которых многочлен $\Psi(x,y,z)$ меняет знак. Подстановки первого типа называют четными, а второго — нечетными. Теперь у нас есть как минимум способ запомнить задачу 1.

Рассмотрим подстановку специального вида, при которой две переменные меняются местами, а остальные остаются на своих местах. Такие подстановки называются транспозициями. Очевидно, любая транспозиция меняет знак многочлена $\Psi(x,y,z)$.

Рассмотрим теперь любую подстановку σ и применим к ней какую-то транспозицию. Получим новую подстановку φ. При этом, если подстановка σ — четная, то подстановка φ будет нечетной и наоборот. Итак, каждая транспозиция отображает множество четных подстановок в множество нечетных.

Если теперь мы возьмем подстановку φ и применим к ней ту же транспозицию, то получим исходную подстановку σ. Поэтому рассмотренное отображение множества четных подстановок в множество нечетных взаимно однозначно. В частности, количества четных и нечетных подстановок одинаковы.

Теперь взглянем на формулу (2). Допустим, $a=b$. Тогда, переставив слагаемые с числами a и b в верхней строчке формулы, мы по сути ничего не поменяем. А с другой стороны, при этом из четной подстановки мы получим нечетную. Поэтому слагаемые в верхней строчке формулы сократятся со слагаемыми в нижней строчке, то есть значение многочлена $F(b)$ равно нулю. По аналогичным причинам $F(c)=0$.

Упражнения

21. (*Московская олимпиада, 1967 г.*) Испанский король решил перевесить по-своему портреты своих предшественников в круглой башне замка. Однако он хочет, чтобы за один раз меняли местами только два портрета, висящие рядом, причем это не должны быть портреты двух королей, один из которых царствовал сразу после другого. Кроме того, ему важно лишь взаимное расположение портретов (два положения отличающиеся поворотом круга, считаются одинаковыми). Доказать, что, как бы сначала ни висели портреты, король может по этим правилам добиться любого нового их положения.

22. Докажите, что любую подстановку можно получить последовательным применением нескольких транспозиций.

23. Докажите, что если некая подстановка получена двумя способами последовательным применением транспозиций, то количества использованных транспозиций в обоих способах имеют одинаковую четность.

24. Докажите, что если $x+y+z=0$, то при $n=0, 1, 2, 4$

$$(ax-by)^n+(ay-bz)^n+(az-bx)^n=(ay-bx)^n+(az-by)^n+(ax-bz)^n.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Попробуем проанализировать, что же привело в данном случае к получению нового результата.

Во-первых, профессиональный подход: ни один серьезный математик не бросит задачу сразу после получения ее решения.

Во-вторых, некая широта кругозора: при исследовании пришлось пользоваться чебышевскими идеями [4] и концепциями теории групп [1]. Никогда заранее не знаешь, какие математические знания окажутся полезными в той или иной задаче. Поэтому образование никогда не повредит.

И в-третьих, удача: когда мне на глаза попалась задача 1, статья [2] уже была написана, то есть идея параллельного переноса графика уже была в «оперативной памяти».

Кстати, некоторые вопросы, поднятые в данной статье, до сих пор остаются открытыми. Сформулирую некоторые из них.

1. Кубические многочлены вроде тех, что мы рассматривали, могут быть заданы четырьмя параметрами, например корнями одного из них и (*постоянной*) разностью многочленов. А у нас их было шесть: u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 и v_3. Один «лишний» параметр угадывается легко: если мы умножим u_1, u_2, u_3 на какое-то число и поделим v_1, v_2, v_3 на то же число, то получим ту же пару многочленов. А где второй?

2. Обратный вопрос: любые ли два кубических многочлена, разность которых постоянна, можно задать использованным выше способом?

3. Рассмотренные выше частные случаи довольно сложны. А в математике наиболее полезными являются простые результаты. Поэтому интересно поискать те частные случаи, где получающиеся неравенства особенно просты.

4. Нельзя ли получить что-то интересное из следующей задачи. Пусть

$$u_1=b+c+d,\ u_2=-(a+b+c),\ u_3=a-d,$$
$$v_1=a+c+d,\ v_2=-(a+b=d),\ v_3=b-c.$$

Пусть далее t^3+pt+q и t^3+rt+s — многочлены с корнями u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3 соответственно. Докажите, что $p=r$ тогда и только тогда, когда $ab=bc$.

Подумайте!

ЛИТЕРАТУРА

1.*Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Наука, 1980.*

2.*Горелов М.А. Неравенства и… параллельный перенос // Квант. 2009. № 2. С. 41—45.*

3.*Иванов О.А. Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. М.: МЦНМО, 2009.*

4.*Пинтер Л., Хегедыш Й. Упорядоченные наборы чисел и неравенства // Квант. 1985. № 12. С. 14—16.*

5.*Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1959.*