РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ: ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ И МАТЕМАТИКА

В первой части лекции будет показано, как в качестве тренировки преобразований выражений научиться решать уравнения 3-й и 4-й степени. Будет разобран, с методическими указаниями, п. 2.2 из книги автора о разрешимости уравнений в радикалах. Для понимания этой части достаточно школьной программы.

Во второй части будет показано, как, развивая идею сопряжения, можно подойти к базовым идеям теории Галуа. При помощи них будет дано простое доказательство неразрешимости кубических уравнений в вещественных радикалах. Определение разрешимости в радикалах будет приведено; для понимания решений достаточно знакомства с многочленами и, в конце — умения извлекать корни из комплексных чисел.

Многие из приведенных задач — удачные темы для исследовательских работ школьников.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.
(b) Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ сводится к уравнению $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ заменой переменной.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.
(b) Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ сводится к уравнению $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ заменой переменной.

(a) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = -2x^3 - 6x^2 + 4$.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.
(b) Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ сводится к уравнению $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ заменой переменной.

(a) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = -2x^3 - 6x^2 + 4$.
(b) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.
(b) Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ сводится к уравнению $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ заменой переменной.

(a) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = -2x^3 - 6x^2 + 4$.
(b) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

В следующих двух задачах можно пользоваться без доказательства теоремой о промежуточных значениях многочлена: *для многочлена P если $P(a) > 0$ и $P(b) < 0$, то существует такое $c \in [a, b]$, что $P(c) = 0$.*

Сколько (вещественных) корней имеет уравнение
(a) $x^3 + 2x + 7 = 0$? (b) $x^3 - 4x - 1 = 0$?

ИССЛЕДОВАНИЕ ГРАФИКОВ

(a) Уравнение $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ сводится к уравнению $x^3 + px + q = 0$ заменой переменной.
(b) Уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ сводится к уравнению $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ заменой переменной.

(a) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = -2x^3 - 6x^2 + 4$.
(b) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

В следующих двух задачах можно пользоваться без доказательства теоремой о промежуточных значениях многочлена: *для многочлена P если $P(a) > 0$ и $P(b) < 0$, то существует такое $c \in [a, b]$, что $P(c) = 0$.*

Сколько (вещественных) корней имеет уравнение
(a) $x^3 + 2x + 7 = 0$?   (b) $x^3 - 4x - 1 = 0$?

Найдите количество решений уравнения $x^3 + px + q = 0$ (в зависимости от параметров p, q).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения
$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.

(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте 'решить уравнение' означает 'найти *все* его *вещественные* решения'.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.
(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения
$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.
Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.
(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте 'решить уравнение' означает 'найти *все* его *вещественные* решения'.

(a) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.
(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения
$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.
Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.
(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте ‘решить уравнение’ означает ‘найти *все* его *вещественные* решения’.

(a) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Когда достигается равенство?

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.
(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения
$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.
Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.
(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте 'решить уравнение' означает 'найти *все* его *вещественные* решения'.

(a) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Когда достигается равенство?
(c) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ при $a, b, c > 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.

(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.

Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3 + c^3) = 0$.

(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте 'решить уравнение' означает 'найти *все* его *вещественные* решения'.

(a) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Когда достигается равенство?

(c) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ при $a, b, c > 0$.

(d) Разложите выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на линейные множители с комплексными коэффициентами.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод дель Ферро.

(a) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$.
(b) Найдите хотя бы одно решение уравнения
$x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$.
Указание. Так как $(b+c)^3 = b^3 + c^3 + 3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3 - 3bcx - (b^3+c^3) = 0$.
(c) Решите уравнение $x^3 - 3\sqrt[3]{2}x + 3 = 0$. В этом пункте ‘решить уравнение’ означает ‘найти *все* его *вещественные* решения’.

(a) Разложите на множители выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.
(b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Когда достигается равенство?
(c) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ при $a, b, c > 0$.
(d) Разложите выражение $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на линейные множители с комплексными коэффициентами.

Напишите формулу для решения уравнения $x^3 + px + q = 0$ методом дель Ферро. При каком условии применим этот метод, если квадратные корни разрешается извлекать только из положительных чисел?

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

(a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

(a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Указание: используйте без доказательства равенства $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ и $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

(a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Указание: используйте без доказательства равенства
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ и
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

(b) Решите уравнение $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

(a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.
Указание: используйте без доказательства равенства
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ и
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
(b) Решите уравнение $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.
(c) Решите уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 3-Й СТЕПЕНИ. Метод Виета.

При решении некоторых кубических уравнений методом дель Ферро в формулах неожиданным образом возникают комплексные числа — как раз тогда, когда все корни исходного уравнения вещественны. Такие уравнения можно также решать следующим «чисто вещественным» методом. Он также интересен тем, что подводит к *трансцендентным методам* решения уравнений [PS].

(a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Указание: используйте без доказательства равенства
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ и
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.

(b) Решите уравнение $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

(c) Решите уравнение $x^3 - 3x - 1 = 0$.

(d) Используя функции cos и arccos, напишите общую формулу для решения уравнения $x^3 + px + q = 0$ методом, намеченным в этой задаче. При каком условии уравнение $x^3 + px + q = 0$ решается этим методом?

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2 + 2)^2 = 18(x - 1)^2$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2 + 2)^2 = 18(x - 1)^2$.

(b) $x^4 + 4x - 1 = 0$.

(c) $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2 + 2)^2 = 18(x - 1)^2$.

(b) $x^4 + 4x - 1 = 0$.

(c) $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$.

Указание к (b). Метод Феррари. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4 + 4x - 1 = (x^2 + \alpha)^2 - (bx + c)^2$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2+2)^2 = 18(x-1)^2$.

(b) $x^4+4x-1=0$.

(c) $x^4+2x^2-8x-4=0$.

Указание к (b). Метод Феррари. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$.

Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2 + 2)^2 = 18(x - 1)^2$.

(b) $x^4 + 4x - 1 = 0$.

(c) $x^4 + 2x^2 - 8x - 4 = 0$.

Указание к (b). Метод Феррари. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4 + 4x - 1 = (x^2 + \alpha)^2 - (bx + c)^2$.

Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2 + \alpha)^2 - (x^4 + 4x - 1)$ является полным квадратом.

Найдите формулу для корней уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ методом Феррари, использующую корень α вспомогательного кубического уравнения. Не забудьте разобрать все случаи!

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ 4-Й СТЕПЕНИ

Решите уравнение

(a) $(x^2+2)^2 = 18(x-1)^2$.

(b) $x^4+4x-1=0$.

(c) $x^4+2x^2-8x-4=0$.

Указание к (b). Метод Феррари. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$.

Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

Найдите формулу для корней уравнения $x^4+px^2+qx+r=0$ методом Феррари, использующую корень α вспомогательного кубического уравнения. Не забудьте разобрать все случаи!

Замечание. Уравнение $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ можно также решить, подобрав такие α, A, B, что

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=\left(x^2+\frac{ax}{2}+\alpha\right)^2-(Ax+B)^2.$$

ТЕОРЕМА О НЕРАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ

Рассмотрим калькулятор с кнопками

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{} \quad \text{для любого } n.$$

Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку. Калькулятор *вещественный*, т.е. оперирует с вещественными числами и при извлечении корня четной степени из отрицательного числа выдает ошибку.

ТЕОРЕМА О НЕРАЗРЕШИМОСТИ В РАДИКАЛАХ

Рассмотрим калькулятор с кнопками

$$1, \quad +, \quad -, \quad \times, \quad : \quad \text{и} \quad \sqrt[n]{\ } \quad \text{для любого } n.$$

Калькулятор вычисляет числа с абсолютной точностью и имеет неограниченную память. При делении на 0 он выдает ошибку. Калькулятор *вещественный*, т.е. оперирует с вещественными числами и при извлечении корня четной степени из отрицательного числа выдает ошибку.
Например, на калькуляторе можно получить числа

$$\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt[3]{3}}, \quad \sqrt{2} + \sqrt[5]{3}, \quad \frac{1}{1+\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \cos 3^\circ.$$

Про последние два числа это не совсем очевидно.

Утверждение о разрешимости в вещественных радикалах. *Если многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе. (Стандартная терминология: уравнение разрешимо в вещественных радикалах.)*

Утверждение о разрешимости в вещественных радикалах. *Если многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе. (Стандартная терминология: уравнение разрешимо в вещественных радикалах.)*

Теорема о неразрешимости в вещественных радикалах. *Существует многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами (например, $x^3 - 3x + 1$), ни один из корней которого невозможно получить на вещественном калькуляторе.*

Утверждение о разрешимости в вещественных радикалах. *Если многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе. (Стандартная терминология: уравнение разрешимо в вещественных радикалах.)*

Теорема о неразрешимости в вещественных радикалах. *Существует многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами (например, $x^3 - 3x + 1$), ни один из корней которого невозможно получить на вещественном калькуляторе.*

Следствие. *Трисекция угла невозможна на вещественном калькуляторе. Или, формально, число $\cos(\alpha/3)$ невозможно получить на нем, имея число $\cos\alpha$ (например, для $\alpha = 2\pi/3$).*

Утверждение о разрешимости в вещественных радикалах. *Если многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами имеет ровно один вещественный корень, то этот корень можно получить на вещественном калькуляторе. (Стандартная терминология: уравнение разрешимо в вещественных радикалах.)*

Теорема о неразрешимости в вещественных радикалах. *Существует многочлен 3-й степени с рациональными коэффициентами (например, $x^3 - 3x + 1$), ни один из корней которого невозможно получить на вещественном калькуляторе.*

Следствие. *Трисекция угла невозможна на вещественном калькуляторе. Или, формально, число* $\cos(\alpha/3)$ *невозможно получить на нем, имея число* $\cos\alpha$ *(например, для $\alpha = 2\pi/3$).*

Доказательство. По формуле косинуса тройного угла каждое из чисел $\cos(2\pi/9)$, $\cos(8\pi/9)$, $\cos(14\pi/9)$ удовлетворяет уравнению $8y^3 - 6y + 1 = 0$. Замена $x = 2y$ превращает его в уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$. Значит, то теореме ни одно из них невозможно получить на вещественном калькуляторе. QED

Одно извлечение квадратного корня

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; ‘многочлен с рациональными коэффициентами’ коротко называется многочленом.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; 'многочлен с рациональными коэффициентами' коротко называется многочленом.

Следующие задачи интересны в связи с неразрешимостью в радикалах, поскольку нам нужно придумать многочлен, корни которого невозможно получить на калькуляторе, а числа из этих задач являются корнями многочленов (подумайте, каких).

Представимо ли следующее число в виде $a+\sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; (a') $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; (b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; ‘многочлен с рациональными коэффициентами’ коротко называется многочленом.

Следующие задачи интересны в связи с неразрешимостью в радикалах, поскольку нам нужно придумать многочлен, корни которого невозможно получить на калькуляторе, а числа из этих задач являются корнями многочленов (подумайте, каких).

Представимо ли следующее число в виде $a+\sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; (a’) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; (b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;
(d) $\cos(2\pi/5)$; (e) $\sqrt[3]{2}$; (g) $\cos(2\pi/9)$; (h) $\cos(2\pi/7)$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; ‘многочлен с рациональными коэффициентами’ коротко называется многочленом.

Следующие задачи интересны в связи с неразрешимостью в радикалах, поскольку нам нужно придумать многочлен, корни которого невозможно получить на калькуляторе, а числа из этих задач являются корнями многочленов (подумайте, каких).

Представимо ли следующее число в виде $a+\sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; (a’) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; (b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

(d) $\cos(2\pi/5)$; (e) $\sqrt[3]{2}$; (g) $\cos(2\pi/9)$; (h) $\cos(2\pi/7)$.

Число $\cos(2\pi/9)$ является корнем уравнения $8x^3-6x+1=0$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; ‘многочлен с рациональными коэффициентами’ коротко называется многочленом.

Следующие задачи интересны в связи с неразрешимостью в радикалах, поскольку нам нужно придумать многочлен, корни которого невозможно получить на калькуляторе, а числа из этих задач являются корнями многочленов (подумайте, каких).

Представимо ли следующее число в виде $a+\sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; (a’) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; (b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

(d) $\cos(2\pi/5)$; (e) $\sqrt[3]{2}$; (g) $\cos(2\pi/9)$; (h) $\cos(2\pi/7)$.

Число $\cos(2\pi/9)$ является корнем уравнения $8x^3-6x+1=0$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a+b\sqrt{2}$ — корень многочлена, то $a-b\sqrt{2}$ — тоже его корень.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Далее через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел; ‘многочлен с рациональными коэффициентами’ коротко называется многочленом.

Следующие задачи интересны в связи с неразрешимостью в радикалах, поскольку нам нужно придумать многочлен, корни которого невозможно получить на калькуляторе, а числа из этих задач являются корнями многочленов (подумайте, каких).

Представимо ли следующее число в виде $a+\sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; (a’) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; (b) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;
(d) $\cos(2\pi/5)$; (e) $\sqrt[3]{2}$; (g) $\cos(2\pi/9)$; (h) $\cos(2\pi/7)$.

Число $\cos(2\pi/9)$ является корнем уравнения $8x^3-6x+1=0$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если $a, b \in \mathbb{Q}$ и $a+b\sqrt{2}$ — корень многочлена, то $a-b\sqrt{2}$ — тоже его корень.

(b) **Лемма о линейной независимости.** Если $a+b\sqrt{2}=0$ для некоторых $a, b \in \mathbb{Q}$, то $a=b=0$.

(c) **Утверждение.** Если многочлен степени выше второй неприводим над $\mathbb{Q}$, то ни один из его корней не представим в виде $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.
Многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{Q}$, если он не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени.

(c) **Утверждение.** Если многочлен степени выше второй неприводим над $\mathbb{Q}$, то ни один из его корней не представим в виде $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.
Многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{Q}$, если он не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем второй степени, имеет вид $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ и $b > 0$.

(c) **Утверждение.** Если многочлен степени выше второй неприводим над $\mathbb{Q}$, то ни один из его корней не представим в виде $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.
Многочлен называется *неприводимым* над $\mathbb{Q}$, если он не раскладывается в произведение многочленов меньшей степени.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем второй степени, имеет вид $a \pm \sqrt{b}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$ и $b > 0$.

Из утверждения и леммы о калькуляторе вытекает, что *если многочлен степени выше второй неприводим над $\mathbb{Q}$, то ни один из его корней невозможно получить на вещественном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем второй степени*. Это — наше первое продвижение к теоремам о неразрешимости в радикалах.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

(e) наименьший положительный корень уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

(e) наименьший положительный корень уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.

Лемма о сопряжении. Если $1 + \sqrt[3]{2}$ — корень многочлена, то $1 + (i\sqrt{3} - 1)2^{-2/3}$ — тоже его корень.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

(e) наименьший положительный корень уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.

Лемма о сопряжении. Если $1 + \sqrt[3]{2}$ — корень многочлена, то $1 + (i\sqrt{3} - 1)2^{-2/3}$ — тоже его корень.

Пусть $\varepsilon := \varepsilon_3 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^3, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $a + br + cr^2$, то корнями этого многочлена являются также числа $a + b\varepsilon r + c\varepsilon^2 r^2$ и $a + b\varepsilon^2 r + c\varepsilon r^2$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

(e) наименьший положительный корень уравнения $x^3 - 4x + 2 = 0$.

Лемма о сопряжении. Если $1 + \sqrt[3]{2}$ — корень многочлена, то $1 + (i\sqrt{3} - 1)2^{-2/3}$ — тоже его корень.

Пусть $\varepsilon := \varepsilon_3 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^3, a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $a + br + cr^2$, то корнями этого многочлена являются также числа $a + b\varepsilon r + c\varepsilon^2 r^2$ и $a + b\varepsilon^2 r + c\varepsilon r^2$.

(b) Если $a + br + cr^2 = 0$, то $a = b = c = 0$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/9)$; (c) $\sqrt[5]{3}$; (d) $\sqrt[3]{3}$.

(e) наименьший положительный корень уравнения $x^3-4x+2=0$.

Лемма о сопряжении. Если $1+\sqrt[3]{2}$ — корень многочлена, то $1+(i\sqrt{3}-1)2^{-2/3}$ — тоже его корень.

Пусть $\varepsilon:=\varepsilon_3=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}$, $r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ и $r^3,a,b,c\in\mathbb{Q}$.

(a) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $a+br+cr^2$, то корнями этого многочлена являются также числа $a+b\varepsilon r+c\varepsilon^2r^2$ и $a+b\varepsilon^2r+c\varepsilon r^2$.

(b) Если $a+br+cr^2=0$, то $a=b=c=0$.

(c) **Лемма о линейной независимости.** Если $k+lr+mr^2=0$ для некоторых $k,l,m\in\mathbb{Q}[\varepsilon]:=\{x+y\varepsilon\ :\ x,y\in\mathbb{Q}\}$, то $k=l=m=0$.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет корень вида $a + br + cr^2$, где $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $a, b, c, r^3 \in \mathbb{Q}$, то степень многочлена равна 3 и он имеет ровно один вещественный корень.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет корень вида $a + br + cr^2$, где $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $a, b, c, r^3 \in \mathbb{Q}$, то степень многочлена равна 3 и он имеет ровно один вещественный корень.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем третьей степени, имеет вид $a + br + cr^2$, где $r \in \mathbb{R}$ и $a, b, c, r^3 \in \mathbb{Q}$.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет корень вида $a+br+cr^2$, где $r \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ и $a,b,c,r^3 \in \mathbb{Q}$, то степень многочлена равна 3 и он имеет ровно один вещественный корень.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем третьей степени, имеет вид $a+br+cr^2$, где $r \in \mathbb{R}$ и $a,b,c,r^3 \in \mathbb{Q}$.

Из утверждения и леммы о калькуляторе вытекает, что *если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней невозможно получить на вещественном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, причем третьей степени*.

Одно извлечение корня простой степени

Представимо ли следующее число в виде

$a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде $a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?

(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

Пусть q нечетное простое, A — многочлен степени меньше q, $\varepsilon_q := \cos\dfrac{2\pi}{q} + i\sin\dfrac{2\pi}{q}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) **Слабая лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

Одно извлечение корня простой степени

Представимо ли следующее число в виде
$a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?
(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

Пусть q нечетное простое, A — многочлен степени меньше q,
$\varepsilon_q := \cos\dfrac{2\pi}{q} + i\sin\dfrac{2\pi}{q}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) **Слабая лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) **Слабая лемма о линейной независимости.** Если $A(r) = 0$, то $A = 0$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде
$a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?
(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

Пусть q нечетное простое, A — многочлен степени меньше q,
$\varepsilon_q := \cos\dfrac{2\pi}{q} + i\sin\dfrac{2\pi}{q}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) **Слабая лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) **Слабая лемма о линейной независимости.** Если $A(r) = 0$, то $A = 0$.

(c) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $A(r)$, то он имеет также корни $A(r\varepsilon_q^k)$ для каждого $k = 1, \dots, q-1$.

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде
$a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?
(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

Пусть q нечетное простое, A — многочлен степени меньше q,
$\varepsilon_q := \cos\dfrac{2\pi}{q} + i\sin\dfrac{2\pi}{q}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) **Слабая лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) **Слабая лемма о линейной независимости.** Если $A(r) = 0$, то $A = 0$.

(c) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $A(r)$, то он имеет также корни $A(r\varepsilon_q^k)$ для каждого $k = 1, \dots, q-1$.

(d) **Лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над

$$\mathbb{Q}[\varepsilon_q] := \{a_0 + a_1\varepsilon_q + a_2\varepsilon_q^2 + \dots + a_{q-2}\varepsilon_q^{q-2} \mid a_0, \dots, a_{q-2} \in \mathbb{Q}\}.$$

ОДНО ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Представимо ли следующее число в виде
$a_0 + a_1\sqrt[7]{2} + a_2\sqrt[7]{2^2} + \dots + a_6\sqrt[7]{2^6}$, где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_6 \in \mathbb{Q}$?
(a) $\sqrt{3}$; (b) $\cos(2\pi/21)$; (c) $\sqrt[11]{3}$; (d) $\sqrt[7]{3}$;

Пусть q нечетное простое, A — многочлен степени меньше q,
$\varepsilon_q := \cos\dfrac{2\pi}{q} + i\sin\dfrac{2\pi}{q}$, $r \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ и $r^q \in \mathbb{Q}$.

(a) **Слабая лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над $\mathbb{Q}$.

(b) **Слабая лемма о линейной независимости.** Если $A(r) = 0$, то $A = 0$.

(c) **Лемма о сопряжении.** Если многочлен имеет корень $A(r)$, то он имеет также корни $A(r\varepsilon_q^k)$ для каждого $k = 1, \dots, q-1$.

(d) **Лемма о неприводимости.** Многочлен $x^q - r^q$ неприводим над

$$\mathbb{Q}[\varepsilon_q] := \{a_0 + a_1\varepsilon_q + a_2\varepsilon_q^2 + \dots + a_{q-2}\varepsilon_q^{q-2} \mid a_0, \dots, a_{q-2} \in \mathbb{Q}\}.$$

(e) **Лемма о линейной независимости.** Если B — многочлен степени $< q$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}[\varepsilon_q]$ и $B(r) = 0$, то $B = 0$.

Следующее утверждение интересно и нетривиально даже для многочленов третьей степени.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней не представим в виде $A(r)$ ни для каких многочлена A, простого нечетного q и $r \in \mathbb{R}$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$.

Следующее утверждение интересно и нетривиально даже для многочленов третьей степени.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней не представим в виде $A(r)$ ни для каких многочлена A, простого нечетного q и $r \in \mathbb{R}$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, равно $A(r)$ для некоторых $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$ и $A \in \mathbb{Q}[x]$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$.

Следующее утверждение интересно и нетривиально даже для многочленов третьей степени.

Утверждение. Если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней не представим в виде $A(r)$ ни для каких многочлена A, простого нечетного q и $r \in \mathbb{R}$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$.

Лемма о калькуляторе. Число, которое можно получить на калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз, равно $A(r)$ для некоторых $r \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$ и $A \in \mathbb{Q}[x]$, причем $r^q \in \mathbb{Q}$.

Из утверждения и леммы о калькуляторе вытекает, что *если многочлен неприводим над $\mathbb{Q}$ и имеет более одного вещественного корня, то ни один из его корней невозможно получить на вещественном калькуляторе так, чтобы извлечение корня происходило только один раз*.