

Математика. Углубленный уровень. 2016 год. День 1.

Работа рассчитана на 2 часа.

Пользоваться калькулятором при выполнении работы запрещено.

Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.

Максимальный балл за эту часть работы составляет 120 баллов.

Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью.

Задача 1 (6 баллов). Следующая система уравнений задает три плоскости в пространстве.

$$x + 3y + z = -1$$

$$x + 2y - 2z = 15$$

$$2x + y - z = 6$$

Найдите координаты точки пересечения трех плоскостей.

Задача 2 (5 баллов). Функция f определена как $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$.

Постройте график $y = f(x)$, четко отметив и указав уравнения всех асимптот и координаты точек пересечения с осями.

Задача 3 (5 баллов).

а) (1 балл) Покажите, что $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

б) (4 балла) Пользуясь этим, найдите $\int_{\operatorname{tg} \alpha}^{\operatorname{ctg} \alpha} \frac{1}{1+x^2} dx$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Задача 4 (6 баллов). Функция f определена как $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Хейли предполагает, что $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f'(x_1) + f'(x_2)}{2}$, $x_1 \neq x_2$.

Покажите, что предположение Хейли верно.

Задача 5 (8 баллов). Неправильная монета подбрасывается пять раз. Вероятность выпадения орла при одном броске равна p . Пусть X — количество выпавших орлов.

а) (2 балла) Выразите через p вероятность $P(X = 4)$.

б) (6 баллов) Определите значение p , для которого значение $P(X = 4)$ принимает наибольшее значение.

Для этого значения p определите математическое ожидание количества выпавших орлов.

Задача 6 (8 баллов). Рассмотрим разложение $(1+x)^n$ по степеням x в порядке возрастания степеней при $n \geq 3$.

а) (2 балла) Напишите первые четыре слагаемых в этом разложении.

Коэффициенты второго, третьего и четвертого слагаемого в этом разложении являются последовательными членами арифметической прогрессии.

б) (6 баллов) Покажите, что $n^3 - 9n^2 + 14n = 0$.

Пользуясь этим, найдите значение n .

Задача 7 (6 баллов). A и B — независимые события, такие что $P(A) = P(B) = p$, $p \neq 0$.

а) (2 балла) Покажите, что $P(A \cup B) = 2p - p^2$.

б) (4 балла) Найдите $P(A|A \cup B)$ в простейшем виде.

Задача 8 (8 баллов). Используя математическую индукцию, докажите, что $n(n^2 + 5)$ делится на 6 при всех $n \in \mathbb{N}$.

Задача 9 (8 баллов). Рассмотрим уравнение

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sin x} + \frac{\sqrt{3} + 1}{\cos x} = 4\sqrt{2}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Известно, что $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

а) (3 балла) Проверьте, что $x = \frac{\pi}{12}$ является корнем уравнения.

б) (5 баллов) Пользуясь этим, найдите все остальные корни уравнения, удовлетворяющие условию $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Задача 10 (18 баллов). Прямая L задается уравнением $\frac{x-2}{p} = \frac{y-q}{2} = z-1$, где $p, q \in \mathbb{R}$.

Плоскость Π задается уравнением $x + y + 3z = 9$.

а) (3 балла) Покажите, что L не перпендикулярна Π .

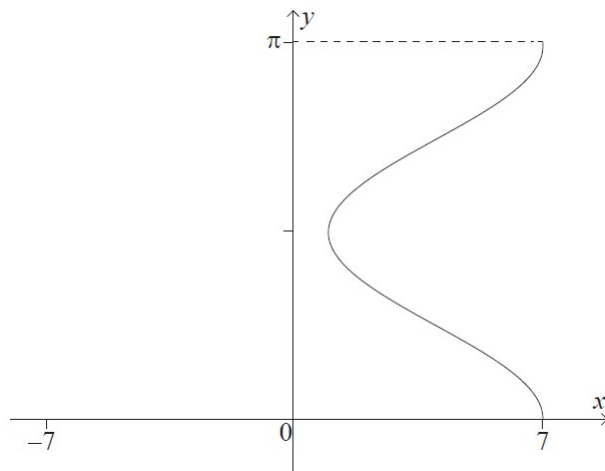
б) (4 балла) Найдите значения p и q , при которых L лежит в плоскости Π .

Рассмотрим другой случай, когда острый угол между L и Π равен θ , где $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

в) (11 баллов) Покажите, что $p = -2$.

Найдите значение q , если L пересекает Π при $z = -1$.

Задача 11 (8 баллов). На графике изображена зависимость $x = 3 \cos 2y + 4$, $0 \leq y \leq \pi$.



Кривую повернули на 360° вокруг оси Oy и получили тело вращения.

а) (3 балла) Найдите объем получившегося тела вращения.

Сосуд такой формы выполнен с цельным основанием диаметром 14 см. Его наполняют водой со скоростью $2 \text{ см}^3/\text{мин}$. В момент времени t минут высота уровня воды составляет h см, $0 \leq h \leq \pi$, а объем воды в сосуде — $V \text{ см}^3$.

б) (4 балла) Найдите $\frac{dh}{dt}$, если известно, что $\frac{dV}{dh} = \pi(3 \cos 2h + 4)^2$.

Найдите $\frac{dh}{dt}$ при $h = \frac{\pi}{4}$.

в) (7 баллов) Найдите $\frac{d^2h}{dt^2}$.

Найдите значение h , при котором $\frac{d^2h}{dt^2} = 0$.

Проинтерпретируйте $\frac{dh}{dt}$ при найденном значении h , используя форму сосуда.

Задача 12 (23 балла). Пусть $w = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$.

а) (3 балла) Проверьте, что w является корнем уравнения $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

б) (3 балла) Упростите выражение $(w - 1)(1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6)$.

Выведите из этого, что $1 + w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5 + w^6 = 0$.

в) (3 балла) Выразите корни уравнения $z^7 - 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$ через w и отметьте их на комплексной плоскости.

Рассмотрим квадратное уравнение $z^2 + bz + c = 0$, где $b, c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть корни этого уравнения α и α^* , где α^* комплексно сопряженное к α число.

г) (10 баллов) Известно, что $\alpha = w + w^2 + w^4$. Докажите, что $\alpha^* = w^6 + w^5 + w^3$.

Найдите значения b и c .

д) (4 балла) Для найденных значений b и c найдите мнимую часть α , ответ запишите в виде иррационального числа.