

Математика. Стандартный уровень. 2016 год. День 1.

Работа рассчитана на 1 час 30 минут.

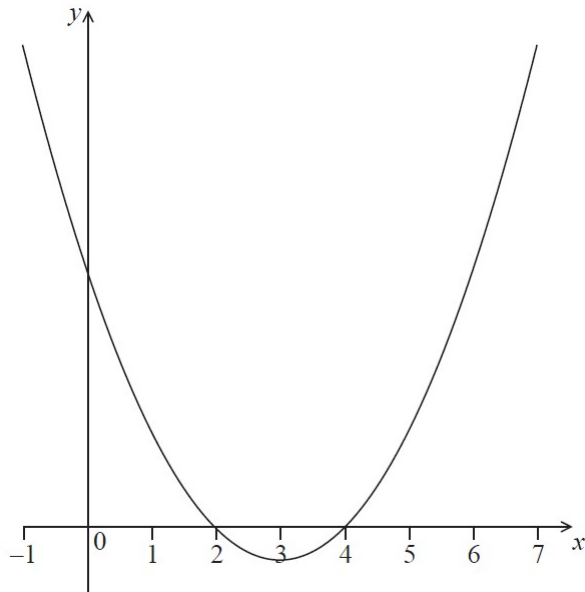
Пользоваться калькулятором при выполнении работы запрещено.

Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.

Максимальный балл за эту часть работы составляет 90 баллов.

Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью.

Задача 1 (6 баллов). На следующей диаграмме изображена часть графика квадратичной функции f .



Вершина находится в точке с координатой $(3; -1)$, а точки пересечения с осью Ox 2 и 4.

Функцию f может быть записана в виде $f(x) = (x - h)^2 + k$.

а) (2 балла) Напишите значения h и k .

Функция может быть также записана в виде $f(x) = (x - a)(x - b)$.

б) (2 балла) Напишите значения a и b .

в) (2 балла) Найдите точку пересечения с осью Oy .

Задача 2 (5 баллов). Числовое множество состоит из 10 элементов. Сумма элементов равна 60.

а) (2 балла) Найдите медиану.

Дисперсия этого числового множества равна 3. Каждый элемент в множестве умножили на 4.

б) (3 балла) Напишите значение новой медианы.

Найдите значение новой дисперсии.

Задача 3 (6 баллов). Пусть $x = \ln 3$, $y = \ln 5$. Запишите следующие выражения с помощью x и y .

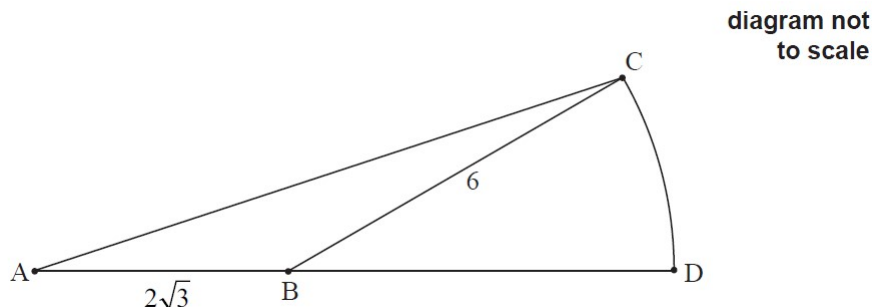
а) (2 балла) $\ln \frac{5}{3}$.

б) (4 балла) $\ln 45$.

Задача 4 (6 баллов). Три последовательных члена геометрической прогрессии равны $x - 3$, 6 и $x + 2$.

Найдите возможные значения x .

Задача 5 (8 баллов). На следующей диаграмме изображен треугольник ABC и сектор BDC окружности с центром B и радиусом 6 см. Точки A , B и D находятся на одной прямой.



$AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 6$ см, площадь треугольника $ABC = 3\sqrt{3}$ см², $\angle ABC$ тупой.

а) (5 баллов) Найдите $\angle ABC$.

б) (3 балла) Найдите точную площадь сектора BDC .

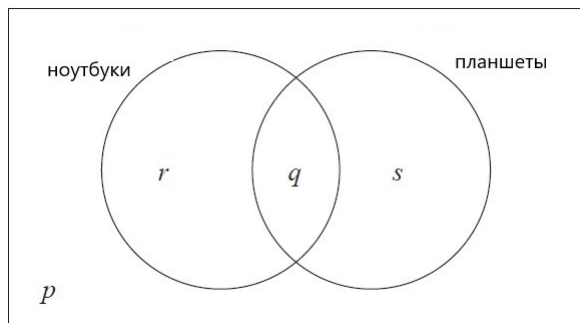
Задача 6 (7 баллов). Пусть $f(x) = 6x\sqrt{1-x^2}$ при $-1 \leq x \leq 1$ и $g(x) = \cos x$ при $0 \leq x \leq \pi$. Пусть $h(x) = (f \circ g)(x)$.

а) (5 баллов) Запишите $h(x)$ в виде $a \sin(bx)$, где $a, b \in \mathbb{Z}$.

б) (2 балла) Найдите отсюда множество значений h .

Задача 7 (7 баллов). Пусть $u = -3i + j + k$ и $v = mj + nk$, где $m, n \in \mathbb{R}$. Найдите возможные значения m и n , если известно, что v является единичным вектором, который перпендикулярен u .

Задача 8 (13 баллов). В классе из 21 студента у 12 есть ноутбук, у 10 есть планшет и у 3 нет ничего. Следующая диаграмма Венна изображает события «иметь ноутбук» и «иметь планшет». Буквами p , q , r и s обозначены количества студентов.



а) (5 баллов) Запишите значение p .

Найдите значение q .

Запишите значения r и s .

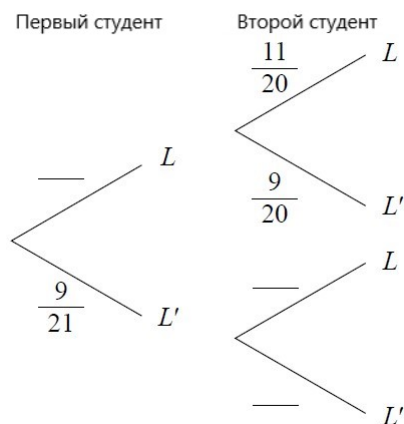
б) (4 балла) В классе выбирается случайный студент.

Запишите вероятность того, что у этого студента есть ноутбук.

Найдите вероятность того, что у этого студента есть ноутбук или планшет, но не оба предмета сразу.

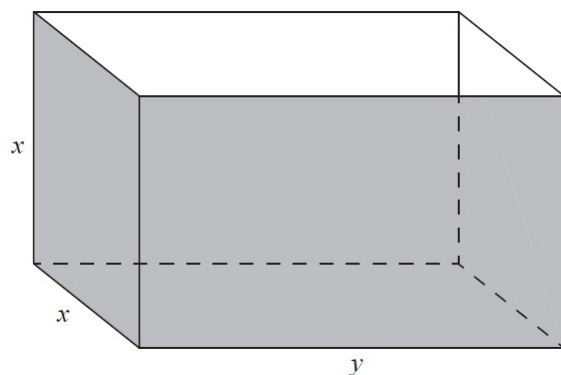
в) (4 балла) В классе выбирается два случайных студента. Пусть L — вероятность события «студент имеет ноутбук».

Перепишите и закончите следующую диаграмму.



Запишите вероятность того, что второй студент имеет ноутбук, если у первого студента есть ноутбук.

Задача 9 (16 баллов). Фред делает открытый металлический контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда как показано на рисунке.



Контейнер имеет высоту x м, ширину h м и длину y м. Объем контейнера равен 36 м^3 . Пусть $A(x)$ — внешняя поверхность контейнера.

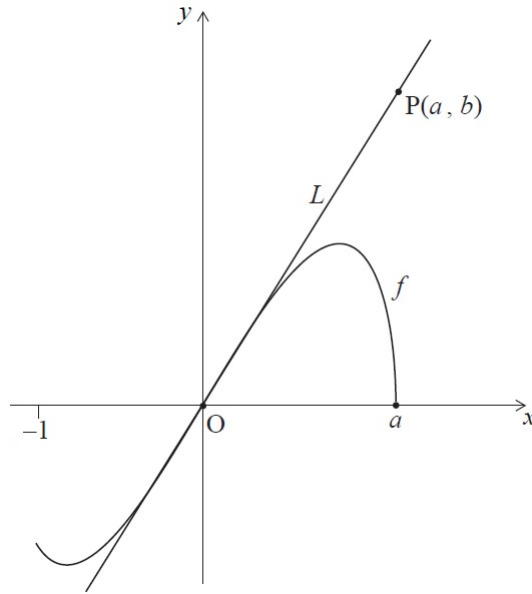
а) (4 балла) Покажите, что $A(x) = \frac{108}{x} + 2x^2$.

б) (2 балла) Найдите $A'(x)$.

в) (5 баллов) Найдите высоту контейнера, если известно, что площадь внешней поверхности контейнера минимальна.

г) (5 баллов) Фред покрасил внешнюю поверхность контейнера. Банки краски стоимостью \$20 достаточно, чтобы покрыть площадь 10 м^2 . Найдите общую стоимость банок с краской, которые потребуются для окраски контейнера.

Задача 10 (16 баллов). На следующем рисунке изображен график $f(x) = 2x\sqrt{a^2 - x^2}$ при $-1 \leq x \leq a$, где $a > 1$.

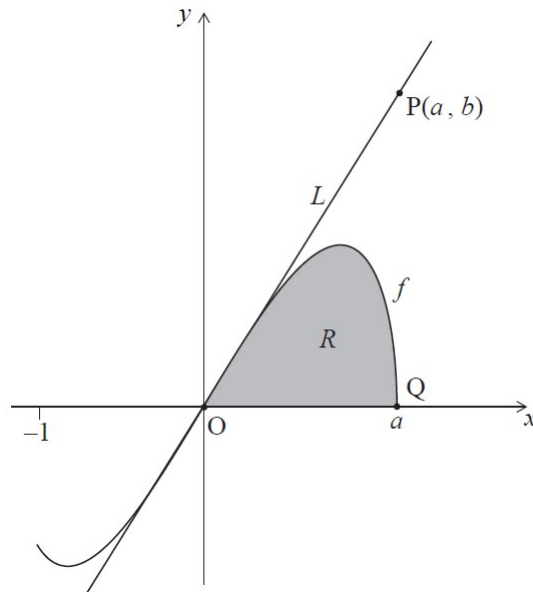


Прямая L является касательной к графику f в начале координат O . Точка $P(a, b)$ лежит на прямой L .

а) (6 баллов) Найдите уравнение прямой L , если известно, что $f'(x) = \frac{2a^2 - 4x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Отсюда или каким-либо другим образом выразите b через a .

Точка $Q(a, 0)$ лежит на графике f . Пусть R — часть плоскости, ограниченная графиком f и осью Ox , что изображено на следующем рисунке.



Пусть A_R — площадь фигуры R .

б) (6 баллов) Покажите, что $A_R = \frac{2}{3}a^3$.

в) (4 балла) Пусть A_T — площадь треугольника OPQ . Найдите k , для которого верно равенство $A_T = kA_R$.