

Математика. Углубленный уровень. 2016 год. День 3. Математический анализ.

Работа рассчитана на 1 час.

Для выполнения работы требуется графический калькулятор и буклет с формулами.

Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.

Максимальный балл за эту часть работы составляет 60 баллов.

Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью. Если при решении используется графический калькулятор, то это должно быть отражено в работе. Например, если для нахождения решения используется график, то его эскиз должен быть нарисован в работе.

Задача 1 (17 баллов). Функция f определена как $f(x) = e^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

- а) (7 баллов) С помощью нахождения необходимого количества производных f , определите ряд Маклорена для $f(x)$ до слагаемого x^3 .
б) (3 балла) Отсюда или другим образом определите точное значение

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x - x^2}{x^3}.$$

- в) (7 баллов) Ряд Маклорена используется для нахождения приближенного значения $f(0,5)$.

Используя остаточный член в форме Лагранжа, найдите верхнюю границу для абсолютного значения погрешности в этом приближении.

Выведите из остаточного члена в форме Лагранжа, будет ли приближение больше или меньше, чем действительное значение $f(0,5)$.

Задача 2 (7 баллов). Функция f задается равенством $f(x) = \int_0^x \ln(2 + \sin t) dt$.

- а) (1 балл) Запишите $f'(x)$.
б) (3 балла) Дифференцируя $f(x^2)$, получите выражение для производной $\int_0^{x^2} \ln(2 + \sin t) dt$ относительно x .

- в) (3 балла) Получите отсюда выражение для производной $\int_x^{x^2} \ln(2 + \sin t) dt$ относительно x .

Задача 3 (9 баллов).

- а) (7 баллов) С помощью применения теоремы Лагранжа о среднем значении для функции $f(x) = \ln x$ покажите, что для $0 < a < b$ верно неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

- б) (2 балла) Покажите отсюда, что $\ln(1,2)$ лежит между $\frac{1}{m}$ и $\frac{1}{n}$, где m и n — последовательные натуральные числа, которые необходимо определить.

Задача 4 (13 баллов). Рассмотрим дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} - xy$, где $y > 0$ и $y = 2$ при $x = 0$.

а) (4 балла) Покажите, что с помощью замены $z = y^2$ уравнение можно привести к виду $\frac{dz}{dx} + 2xz = 2x$.

б) (9 баллов) Решив дифференциальное уравнение для z , получите выражение для y через x .

Задача 5 (14 баллов). Рассмотрим бесконечный ряд $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$, где $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt$.

а) (1 балл) Объясните, почему ряд является знакочередующимся.

б) (9 баллов) С помощью замены $T = t - \pi$ в выражении для u_{n+1} покажите, что $|u_{n+1}| < |u_n|$.

Покажите, что ряд сходится.

в) (4 балла) Покажите, что $S < 1,65$.