

Математика. Углубленный уровень. 2016 год. День 3. Дискретная математика.

Работа рассчитана на 1 час.

Для выполнения работы требуется графический калькулятор и буклет с формулами.

Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.

Максимальный балл за эту часть работы составляет 60 баллов.

Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью. Если при решении используется графический калькулятор, то это должно быть отражено в работе. Например, если для нахождения решения используется график, то его эскиз должен быть нарисован в работе.

Задача 1 (9 баллов).

а) (4 балла) С помощью алгоритма Евклида покажите, что числа 1463 и 389 взаимно простые.

б) (5 баллов) Найдите натуральные a и b , для которых $1463a - 389b = 1$.

Задача 2 (12 баллов). Веса ребер в полном графе G представлены в следующей таблице.

	A	B	C	D	E	F
A	—	14	10	8	12	9
B	14	—	9	12	10	13
C	10	9	—	7	8	13
D	8	12	7	—	9	11
E	12	10	8	9	—	11
F	9	13	13	11	11	—

а) (5 баллов) Начав из вершины A , найдите верхнюю оценку для задачи коммивояжера на графе G с помощью алгоритма ближайшего соседа.

б) (7 баллов) Найдите нижнюю оценку для задачи коммивояжера на графе G с помощью алгоритма удаления вершин, удалив первой вершину A .

Задача 3 (10 баллов). В данном задании запись $(abc\dots)_n$ обозначает число $abc\dots$ в системе счисления с основанием n . Например, $(359)_n = 3n^2 + 5n + 9$.

а) (3 балла) Известно, что $(43)_n \times (56)_n = (3112)_n$. Покажите, что

$$3n^3 - 19n^2 - 38n - 16 = 0.$$

Отсюда определите значение n .

б) (3 балла) Определите множество значений n , для которых

$$(13)_n \times (21)_n = (273)_n.$$

в) (4 балла) Покажите, что не существует n , для которых $(32)_n \times (61)_n = (1839)_n$.

Задача 4 (17 баллов).

- а) (6 баллов)** Решите рекуррентное соотношение $v_n + 4v_{n-1} + 4v_{n-2} = n$, если $v_1 = 0, v_2 = 1$.
- б) (8 баллов)** С помощью принципа полной математической индукции докажите, что решением рекуррентного соотношения $u_n + 4u_{n-1} + 4u_{n-2} = n$ при $u_1 = 0, u_2 = 1$ является $u_n = 2^{n-2}(n - 1)$.
- в) (3 балла)** Найдите самое простое выражение для $u_n + v_n$, если n чётно;
 n нечётно.

Задача 5 (12 баллов). Простой связный граф имеет e ребер и v вершин, где $v \geq 3$.

- а) (2 балла)** Покажите, что количество ребер в G' , являющегося дополнением графа G , равно $\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v - e$.
Известно, что оба графа, G и G' являются связными и планарными.
- б) (3 балла)** Покажите, что сумма количества граней в G и количества граней в G' не зависит от e .
- в) (7 баллов)** Покажите, что $v^2 - 13v + 24 \leq 0$ и определите отсюда максимально возможное значение v .