

Математика. Углубленный уровень. 2016 год. День 2.

Работа рассчитана на 2 часа.

Для выполнения работы требуется графический калькулятор.

Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.

Максимальный балл за эту часть работы составляет 120 баллов.

Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью.

Задача 1 (5 баллов). В четырехугольнике $ABCD$ $AB = 6,5$, $BC = 9,1$, $CD = 10,4$, $DA = 7,8$ и $\angle CDA = 90^\circ$. Найдите угол ABC , ответ округлите до ближайшего целого числа градусов.

Задача 2 (7 баллов). Случайная величина X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 3 и дисперсией 2^2 .

а) (2 балла) Найдите $P(0 \leq X \leq 2)$.

б) (3 балла) Найдите $P(|X| > 1)$.

в) (2 балла) Найдите число c , для которого $P(X > c) = 0,44$.

Задача 3 (6 баллов). Решите систему уравнений

$$\ln \frac{x}{y} = 2$$

$$\ln x^2 + \ln y^3 = 7.$$

Задача 4 (6 баллов). Сумма второго и третьего членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 96. Сумма всех членов этой прогрессии равна 500. Найдите все возможные значения, которые может принимать знаменатель этой прогрессии.

Задача 5 (6 баллов). Функция f определяется как $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $-1 \leq x \leq 1$.

Найдите обратную к ней функцию f^{-1} , укажите ее область определения и множество значений.

Задача 6 (8 баллов). Компания производит прямоугольные стекла площадью 5 квадратных метров. В процессе производства этих стекол изъяны возникают в количестве 0,5 на каждые 5 квадратных метров. Предполагается, что количество изъянов на каждом стекле имеет Пуассоновское распределение.

а) (3 балла) Найдите вероятность того, что случайно выбранное стекло содержит хотя бы один изъян.

Стекла без изъянов приносят прибыль в \$5. Стекла хотя бы с одним изъяном приносят убыток в \$3.

б) (3 балла) Найдите ожидаемую прибыль с продажи одного стекла.

Эта же компания также производит большие стекла площадью 20 квадратных метров каждое. Количество возникающих при их производстве изъянов все также остается равным 0,5 на каждые 5 квадратных метров. Случайно выбирается одно большое стекло.

в) (2 балла) Найдите вероятность того, что оно не содержит изъянов.

Задача 7 (8 баллов). Рассмотрим кривую, заданную уравнением $x^3 + y^3 = 4xy$.

а) (3 балла) Используя дифференцирование неявной функции, покажите, что $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x^2}{3y^2 - 4x}$.

Касательная к этой кривой параллельна оси Ox в точке $x = k$, $k > 0$.

б) (5 баллов) Найдите значение k .

Задача 8 (6 баллов). Частица движется таким образом, что ее скорость v м/с зависит от перемещения s м по закону $v(s) = \arctg(\sin s)$, $0 \leq s \leq 1$. Ускорение частицы a м/с².

а) (4 балла) Найдите зависимость ускорения от s .

б) (2 балла) Используя подходящий эскиз графика, найдите перемещение частицы, когда ее ускорение равно 0,25 м/с².

Задача 9 (8 баллов). $OACB$ — параллелограмм, в котором $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, где a и b являются ненулевыми векторами.

а) (4 балла) Покажите, что

$$|\vec{OC}|^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2;$$

$$|\vec{AB}|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2.$$

б) (4 балла) Докажите, что если $|\vec{OC}| = |\vec{AB}|$, то $OACB$ — прямоугольник.

Задача 10 (15 баллов). Непрерывная случайная величина T имеет функцию распределения вероятности f , задаваемую равенством

$$f = \begin{cases} \frac{t|\sin 2t|}{\pi}, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

а) (2 балла) Постройте график $y = f(t)$.

б) (1 балл) С помощью графика найдите моду T .

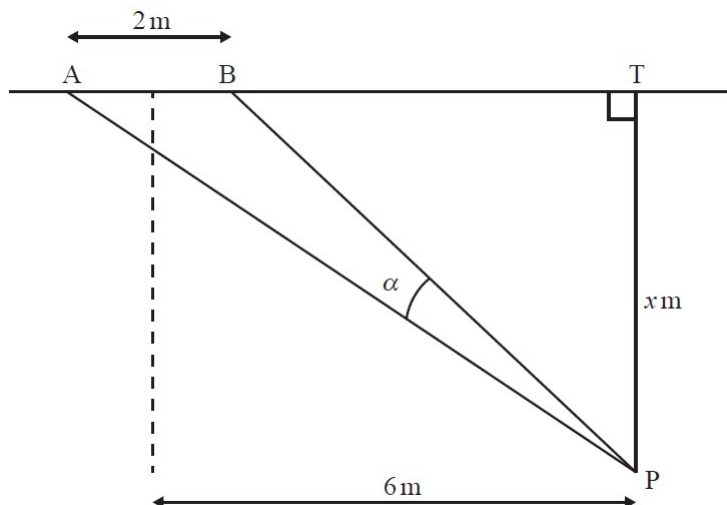
в) (2 балла) Найдите медиану T .

г) (3 балла) Найдите дисперсию T .

д) (2 балла) Найдите вероятность того, что T лежит между медианой и модой.

е) (5 баллов) Найдите $\int_0^T f(t)dt$ при $0 \leq T \leq \frac{\pi}{2}$. Выведите из этого, что нижний квартиль T равен $\frac{\pi}{2}$.

Задача 11 (22 балла). Точки A , B и T лежат на линии футбольных ворот. Ворота AB имеют ширину 2 метра. Игрок, находящийся в точке P , бьет по воротам. PT перпендикулярно AB и находится на расстоянии 6 метров от параллельной прямой, проходящей через середину отрезка AB . Пусть PT равно x метров, а $\angle APB$ равен α градусов. Предположим, что мяч катится по полю.



а) (4 балла) Найдите значение α при $x = 10$.

б) (4 балла) Покажите, что $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2x}{x^2 + 35}$.

Наибольшее значение $\operatorname{tg} \alpha$ достигается при наибольшем значении α .

в) (11 баллов) Найдите $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \alpha)$.

Получите отсюда или как-либо иначе значение α , при котором $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg} \alpha) = 0$.

Найдите $\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{tg} \alpha)$ и из этого покажите, что значение α никогда не превышает 10° .

г) (3 балла) Найдите множество значений x , для которых $\alpha \geq 7^\circ$.

Задача 12 (23 балла). Функции f и g определены следующим образом

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$$

а) (9 баллов) Покажите, что $\frac{1}{4f(x) - 2g(x)} = \frac{e^x}{e^{2x} + 3}$.

Используя замену $u = e^x$ найдите $\int_0^{\ln 3} \frac{1}{4f(x) - 2g(x)} dx$. Ответ запишите в виде

$$\frac{\pi\sqrt{a}}{b}, \text{ где } a, b \in \mathbb{Z}^+.$$

Пусть $h(x) = nf(x) + g(x)$, где $n \in \mathbb{R}$, $n > 1$.

б) (8 баллов) Составив квадратное уравнение относительно e^x , решите уравнение $h(x) = k$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Отсюда или каким-либо другим образом покажите, что уравнение $h(x) = k$ имеет два действительных корня при условии $k > \sqrt{n^2 - 1}$ и $k \in \mathbb{R}^+$.

Пусть $t(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

в) (6 баллов) Покажите, что $t'(x) = \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{[f(x)]^2}$ при $x \in \mathbb{R}$.

Получите отсюда, что $t'(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}$.