

**Математика. Углубленный уровень. 2016 год. День 3. Множества,  
отношения, теория групп.**

*Работа рассчитана на 1 час.*

*Для выполнения работы требуется графический калькулятор и буклет с формулами.*

*Все числовые ответы должны быть точными или даны с тремя значащими цифрами, если в задании не указано обратное.*

*Максимальный балл за эту часть работы составляет 60 баллов.*

*Верный ответ не является единственным условием получения максимального балла за задание. Ответы должны быть подкреплены решениями и пояснениями. В случае неверного ответа за задание можно получить некоторые баллы в случае наличия в работе верного метода решения. Поэтому рекомендуется записывать тексты решения полностью. Если при решении используется графический калькулятор, то это должно быть отражено в работе. Например, если для нахождения решения используется график, то его эскиз должен быть нарисован в работе.*

**Задача 1 (19 баллов).** В следующей таблице Кэли представлена бинарная операция умножения по модулю 9, обозначенная знаком  $*$  и определенная на множестве  $S = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ .

*	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8				
5	5	1				
7	7	5				
8	8	7				

- а) (3 балла)** Перепишите и закончите таблицу.
- б) (5 баллов)** Покажите, что  $\{S, *\}$  — абелева группа.
- в) (3 балла)** Определите порядок каждого элемента в  $\{S, *\}$ .
- г) (4 балла)** Найдите две собственные подгруппы в  $\{S, *\}$ .

Найдите смежный класс каждой из этих подгрупп относительно элемента 5.

- д) (4 балла)** Решите уравнение  $2 * x * 4 * x * 4 = 2$ .

**Задача 2 (12 баллов).** Отношение  $R$  определено на  $\mathbb{Z}^+$  следующим образом:  $aRb$  тогда и только тогда, когда  $b^n - a^n \equiv 0 \pmod{p}$ , где  $n, p$  — фиксированные натуральные числа, большие 1.

- а) (7 баллов)** Покажите, что  $R$  является отношением эквивалентности.
- б) (5 баллов)** Определите первые четыре члена первых четырех классов эквивалентности, образуемых  $R$ , для случая  $n = 2$  и  $p = 7$ .

**Задача 3 (7 баллов).** В абелевой группе  $\{G, *\}$  биекция  $f : G \rightarrow G$  определена формулой  $f(x) = x^{-1}$ ,  $x \in G$ . Покажите, что  $f$  является изоморфизмом.

**Задача 4 (13 баллов).** Функция  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  задается равенством

$$f(x, y) = \left( \sqrt{xy}, \frac{x}{y} \right).$$

- а) (5 баллов)** Докажите, что  $f$  является инъекцией.

**б) (8 баллов)** Получите отсюда или каким-либо другим образом обратную функцию  $f^{-1}$ .

**Задача 5 (9 баллов).** Группа  $\{G, *\}$  определена на множестве  $G$  с бинарной операцией  $*$ .  $H$  — подмножество  $G$ , определенное как  $H = \{x : x \in G, a * x * a^{-1} = x \quad \forall a \in G\}$ . Докажите, что  $\{H, *\}$  является подгруппой группы  $G$ .