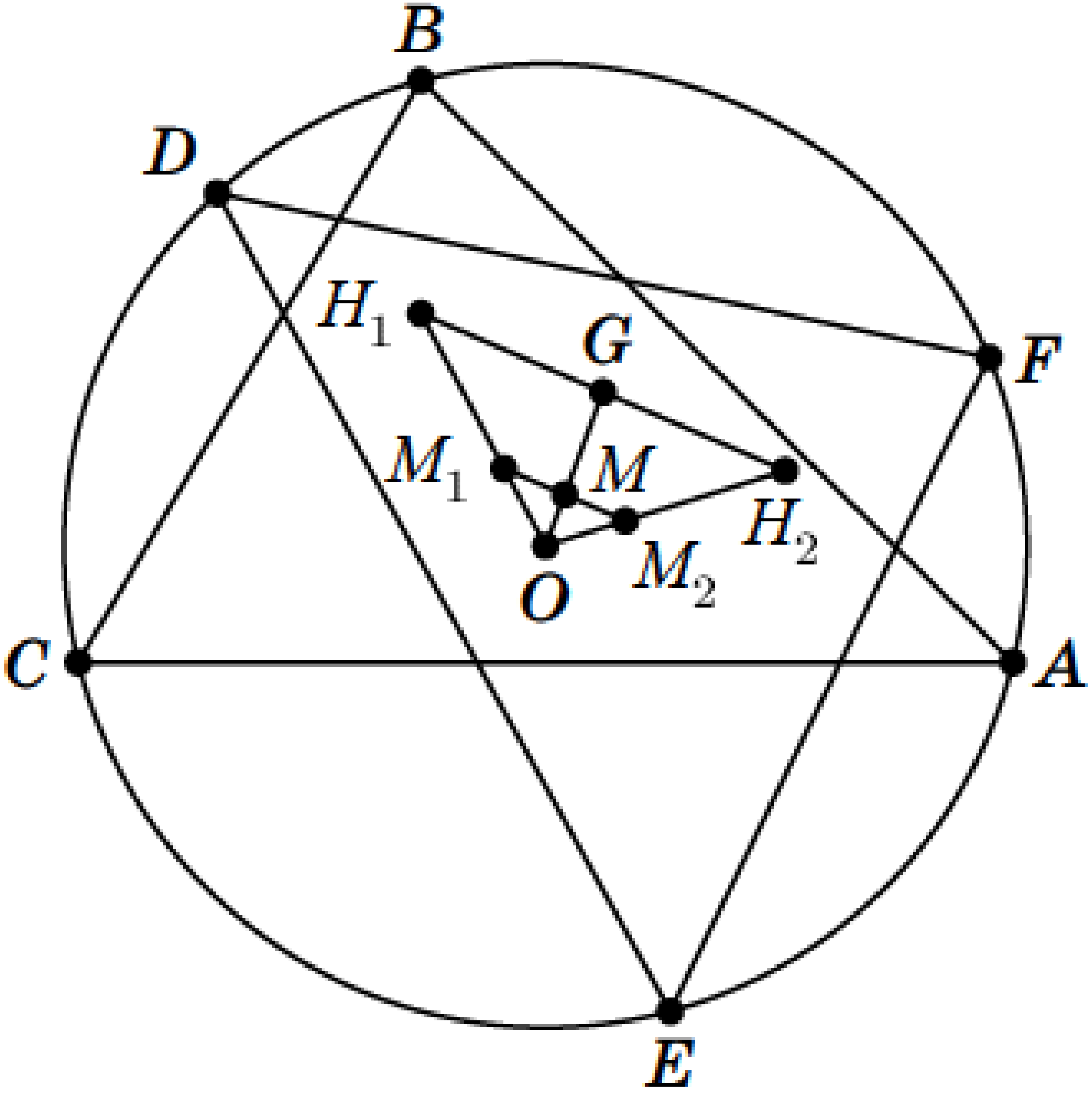
ЗАДАЧИ СЕРГЕЯ МАРКЕЛОВА

НА ТУРНИРЕ ГОРОДОВ

Подготовил Сергей Дориченко

На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого — с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придется опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?


B
D
H1
G
F
M1
M
H2
O
M2
C
A
E

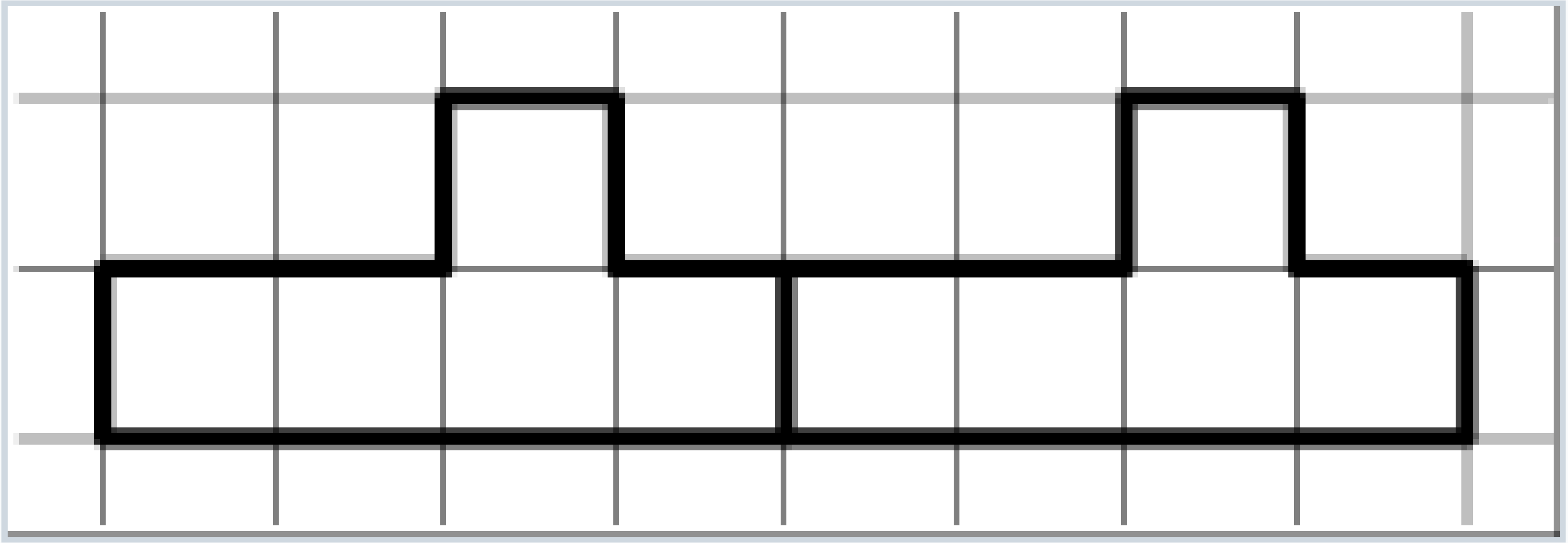
В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка K. В треугольники ABK и ACK вписаны окружности, первая касается стороны BC в точке M, вторая - в точке N. Докажите, что

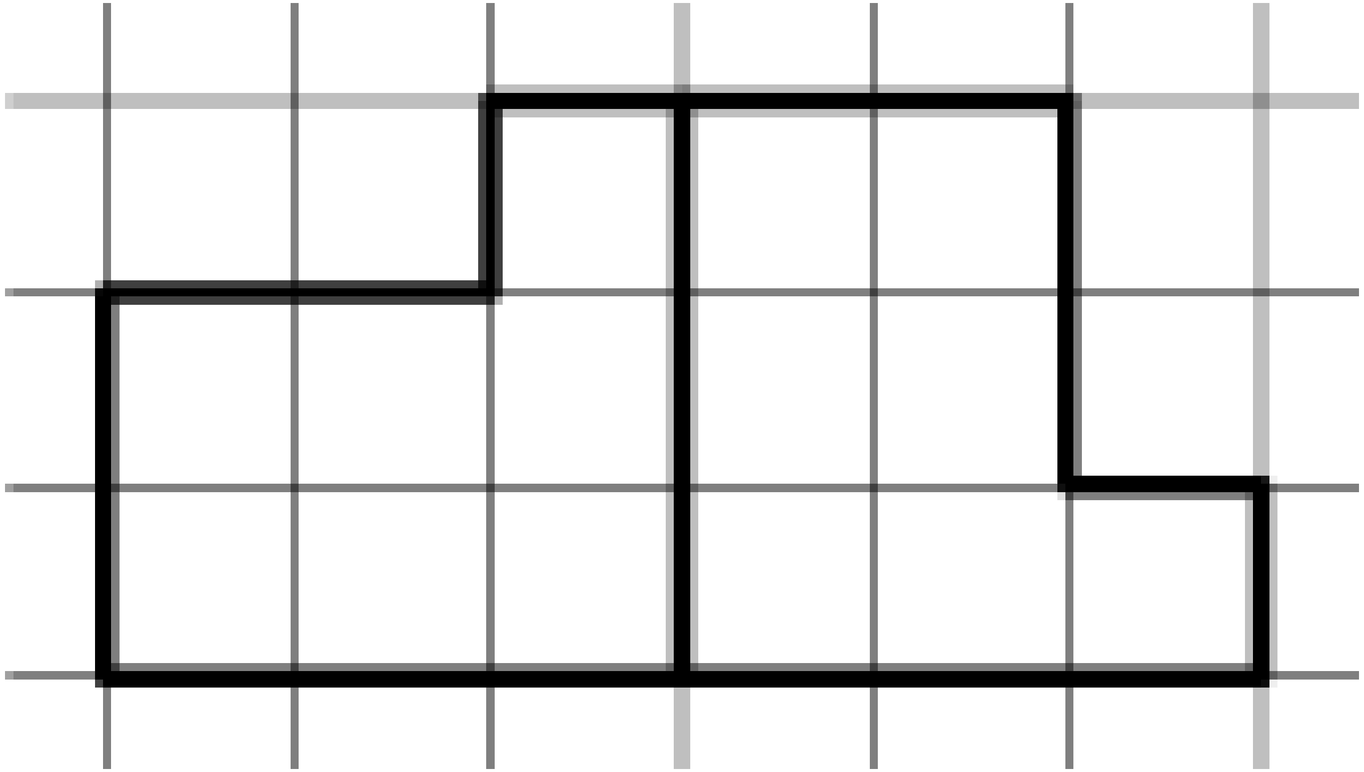
$$BM \cdot CN > KM \cdot KN.$$

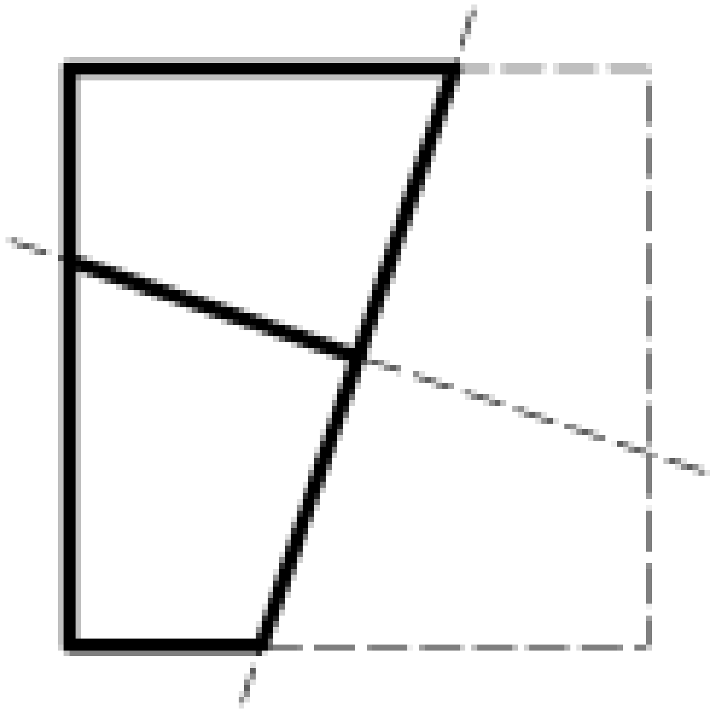
Выпуклая фигура F обладает следующим свойством: любой правильный треугольник со стороной 1 можно параллельно перенести так, что все его вершины попадут на границу F. Следует ли из этого свойства, что F – круг?

а) Докажите, что найдется многоугольник, который можно разделить отрезком на две равные части так, что этот отрезок разделит одну из сторон многоугольника пополам, а другую - в отношении 1:2.

б) Найдется ли выпуклый многоугольник с таким свойством?







Дана коробка (прямоугольный параллелепипед), по поверхности (но не внутри) которой ползает муравей. Изначально муравей сидит в углу A. Верно ли, что среди всех точек поверхности на наибольшем расстоянии от муравья находится противоположный угол B?
(Расстоянием между точками, с точки зрения муравья, является длина кратчайшего пути между этими точками, проходящего по поверхности параллелепипеда.)

Пусть

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{a_n}{b_n},$$

где a_n/b_n *— несократимая дробь. Докажите, что существует бесконечно много натуральных* n, *при которых выполнено неравенство* $b_{n+1}<b_n$.

Барон Мюнхгаузен попросил задумать непостоянный многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами и сообщить ему только значения $P(2)$ и $P(P(2))$.
Барон утверждает, что он только по этим данным всегда может восстановить
задуманный многочлен. Не ошибается ли барон?

На плоскости даны парабола $y = x^2$ и окружность, имеющие ровно две общие точки: A и B. Оказалось, что касательные к окружности и к параболе в точке A совпадают. Обязательно ли тогда касательные к окружности и параболе в точке B также совпадают?