Суммы степеней: то считаем, то рисуем

Алексей Иванович Сгибнев a.i.sgibnev@gmail.com

Свернем в формулу

n	1	2	3	4
?	2	4	6	8
	1	3	5	7
	1	4	9	16
	1	8	27	64
	2	6	12	20
	1	3	6	10

1. Сумма натуральных чисел. Гаусс

$$1+2=3=?$$
 $1+2+3=6=?$
 $1+2+3+4=10=?$
 $27=27$

Сначала угадай, потом докажи!

$$1+2=3=\frac{2\cdot 3}{2}$$

$$1+2+3=6=\frac{3\cdot 4}{2}$$

$$1+2+3+4=10=\frac{4\cdot 5}{2}$$

$$??=??$$

Доказательство суммированием (метод Гаусса)

$$S = 1 + 2 + ... + (n - 1) + n,$$

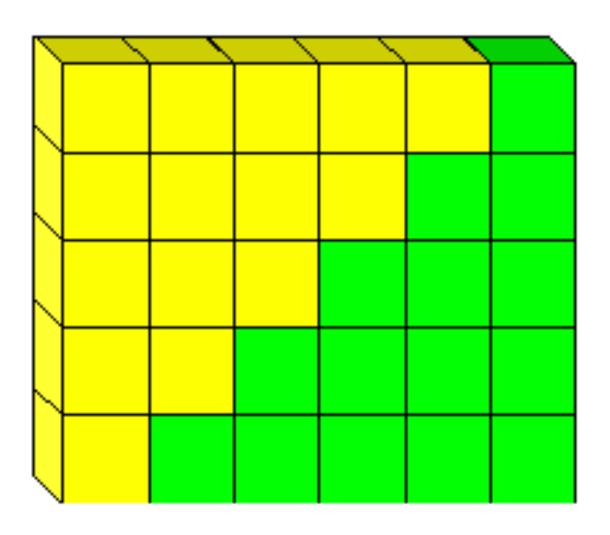
 $S = n + (n - 1) + ... + 2 + 1.$

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + ... + (n+1) + (n + 1) =$$

= $n(n+1)$.

S = n(n+1)/2.

«Смотри!»



Зачем доказывать?

Продолжите последовательность:

2, 4, ...

Зачем доказывать?

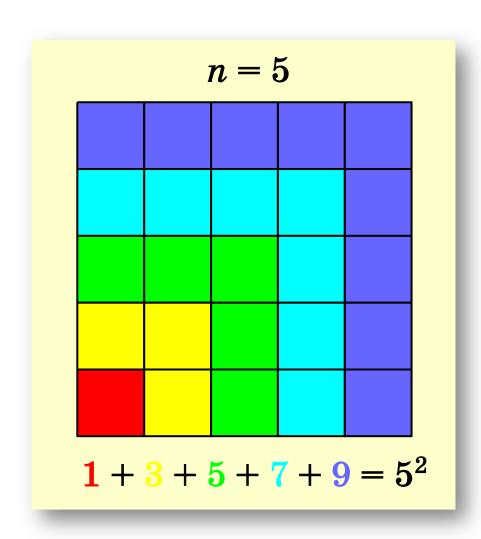
Продолжите последовательность:

2, 4, 6, ...

2. Продолжим цепочку равенств

$$1+3=?$$
 $1+3+5=?$
 $1+3+5+7=?$
 $??=??$

«Смотри!»



1 + 3 + ... +(2n-3)+(2n-1) = S

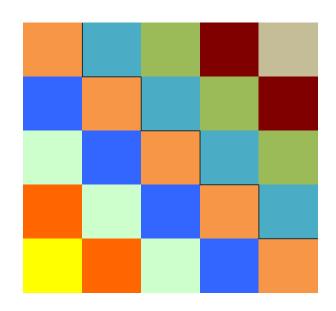
$$(2n-1)+(2n-3)+...+3+1=S$$

 $S=2nn/2=n^2$

3. Вспомогательная задача

$$1+2+1=?$$
 $1+2+3+2+1=?$
 $1+2+3+4+3+2+1=?$
 $???=??$

Докажем картинкой



Докажем методом Гаусса

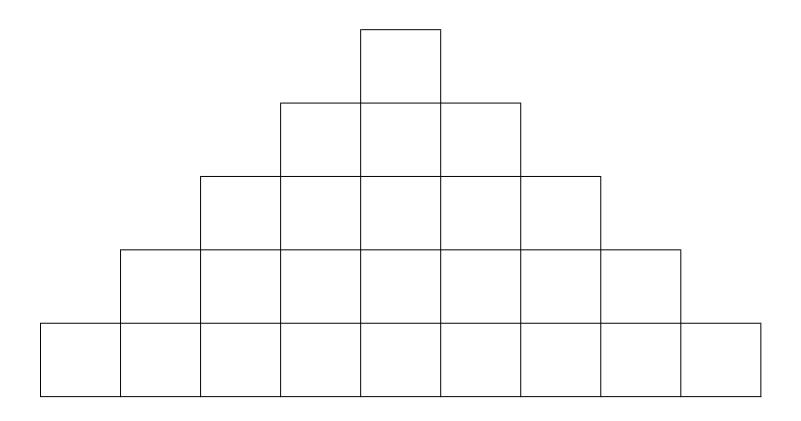
$$1 + 2 + ... + (n-2) + (n-1) + n$$

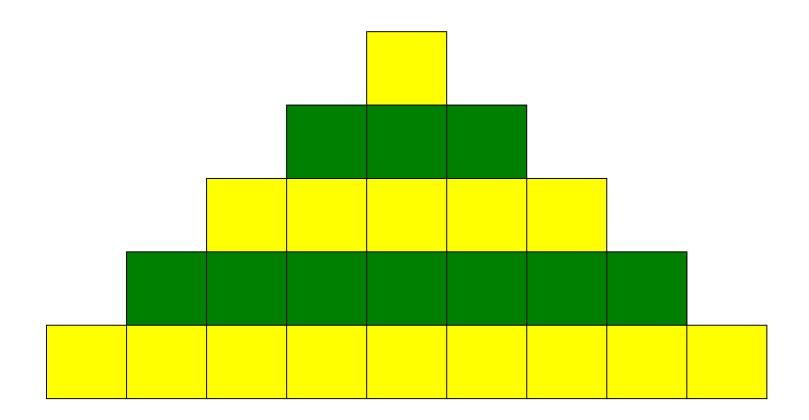
+(n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 + 0

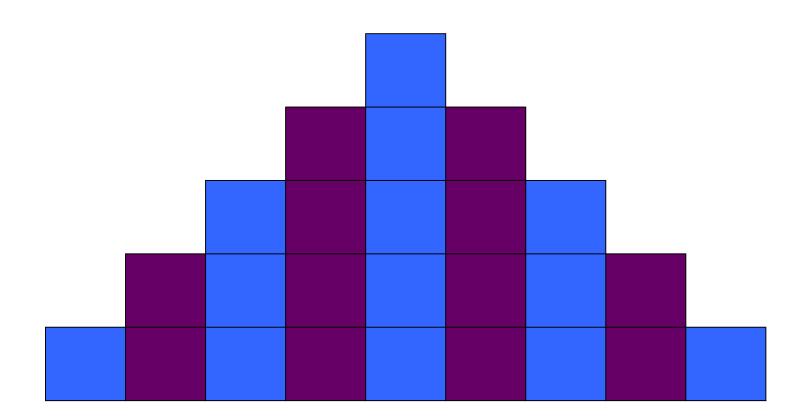
$$n + n + ... + n + n + n$$

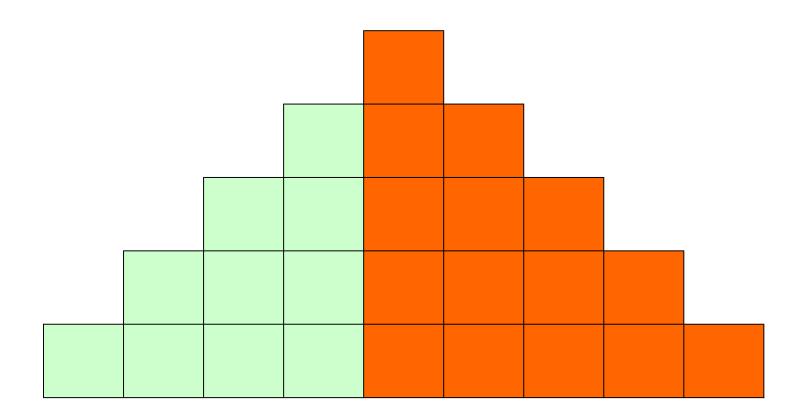
$$= n^{2}$$

А теперь обе формулы вместе:









Запомним формулы:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n + ... + 3 + 2 + 1 = n^2$$

4. Сумма квадратов. Архимед

$$1^{2} + 2^{2} = ?$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} = ?$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + 4^{2} = ?$$

4. Сумма квадратов

$$1^{2} + 2^{2} = 2 \times 3 \times (2 + 3) / 6$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} = 3 \times 4 \times (3 + 4) / 6$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + 4^{2} = ?$$

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + 4^{2} + 5^{2} = \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{6}$$

Докажем с помощью таблицы

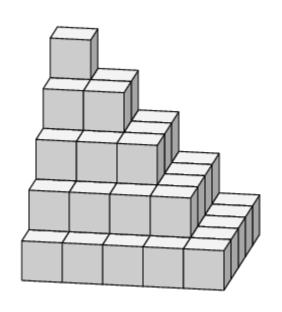
1	1	1	1	 1	1	1	1	1	1	1	 1	1	1	1
2	2	2	2	 2	2	2	2	2	2	2	 2	2	2	2
3	3	3	3	 3	3	3	3	3	3	3	 3	3	3	3
4	4	4	4	 4	4	4	4	4	4	4	 4	4	4	4
5	5	5	5	 	5	5	5	5	5		 5	5	5	5
				 		:	•••				 •••			
n-1	n-1	n-1	n-1	 n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	 n-1	n-1	n-1	n-1
n	n	n	n	 n	n	n	n	n	n	n	 n	n	n	n

Сумма чисел в таблице равна n(n+1)(2n+1)/2

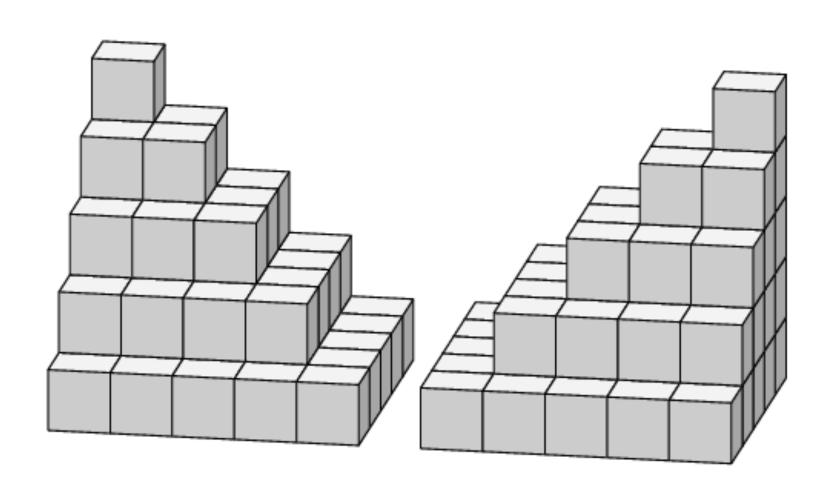
1	1	1	1	 1	1	1	1	1	1	1	 1	1	1	1
2	2	2	2	 2	2	2	2	2	2	2	 2	2	2	2
3	3	3	3	 3	3	3	3	3	3	3	 3	3	3	3
4	4	4	4	 4	4	4	4	4	4	4	 4	4	4	4
5	5	5	5	 	5	5	5	5	5		 5	5	5	5
				 	:	:				:	 			
n-1	n-1	n-1	n-1	 n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	 n-1	n-1	n-1	n-1
n	n	n	n	 n	n	n	n	n	n	n	 n	n	n	n

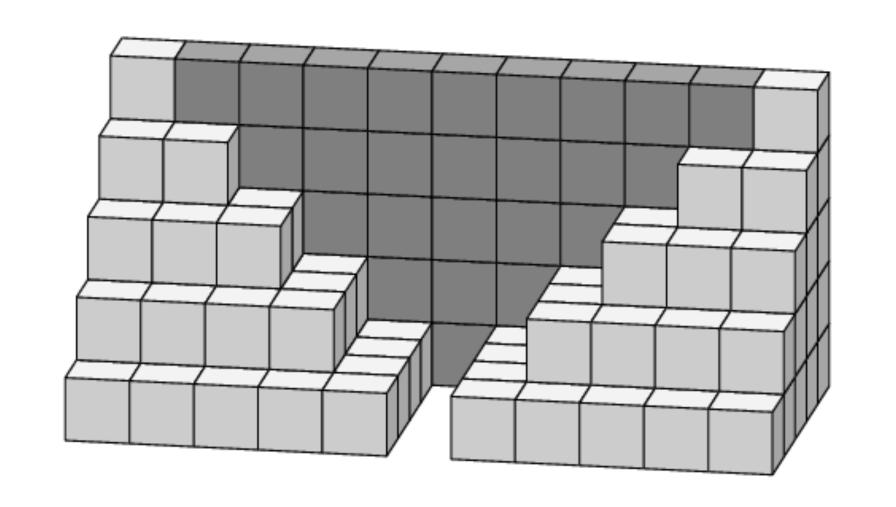
	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1		1	1	1	1
	2	2	2	2		2	2	2	2	2	2	2		2	2	2	2
	3	3	3	3		3	3	3	3	თ	3	3		3	3	3	3
	4	4	4	4	:	4	4	4	4	4	4	4	:	4	4	4	4
,	5	5	5	5	:		5	5	5	5	5	•	:	5	5	5	5
					:				••	:		:	:				
n	-1	n-1	n-1	n-1		n-1		n-1	n-1	n-1	n-1						
	n	n	n	n		n	n	n	n	n	n	n		n	n	n	n

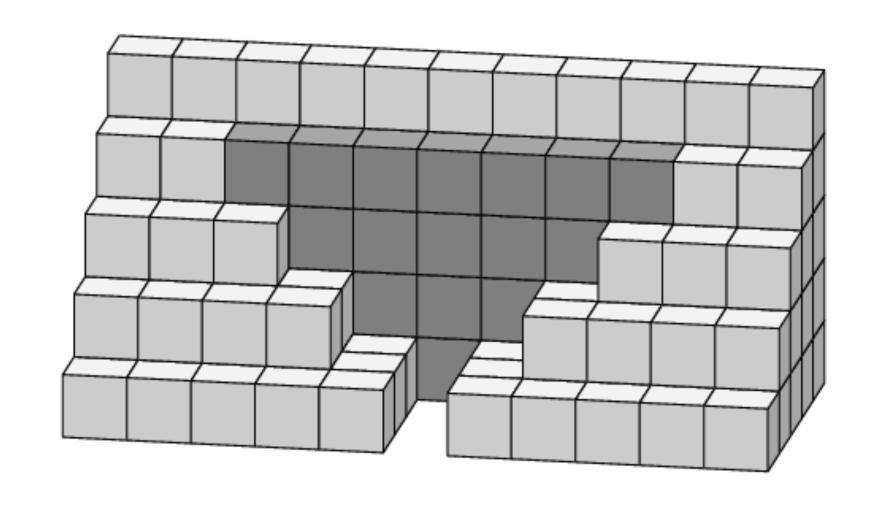
Изобразим сумму квадратов графически

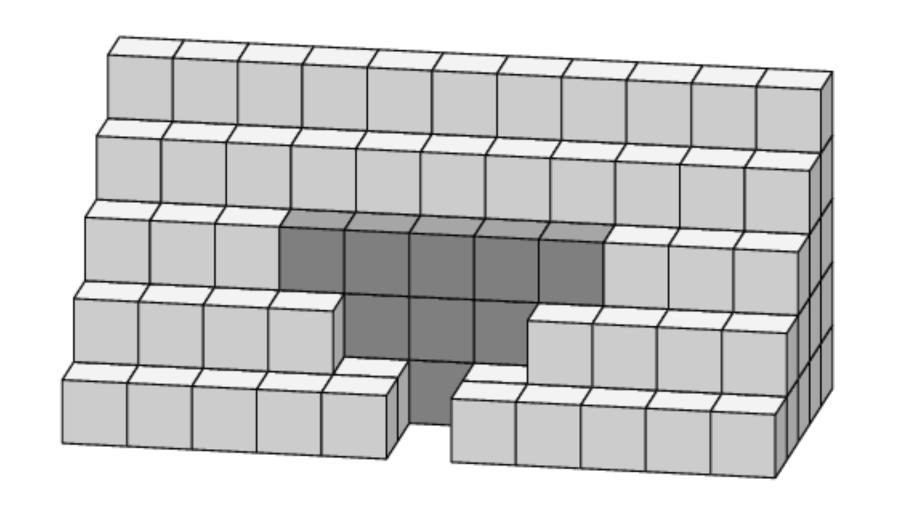


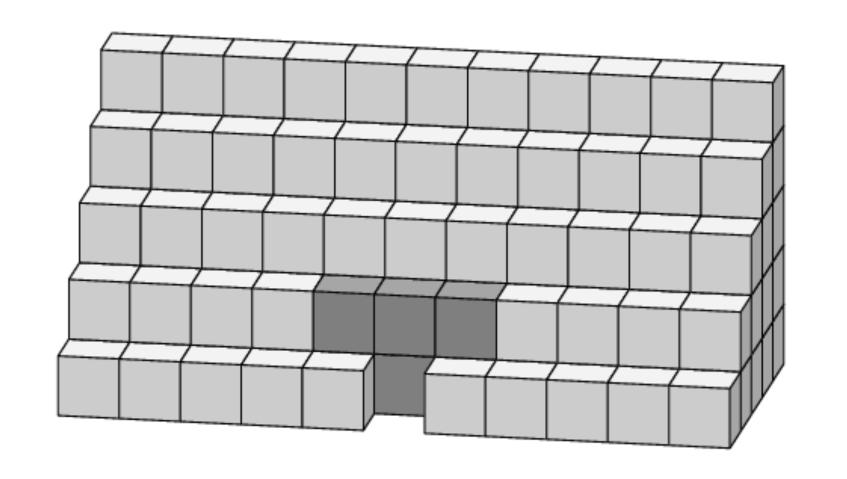
Как их сложить??

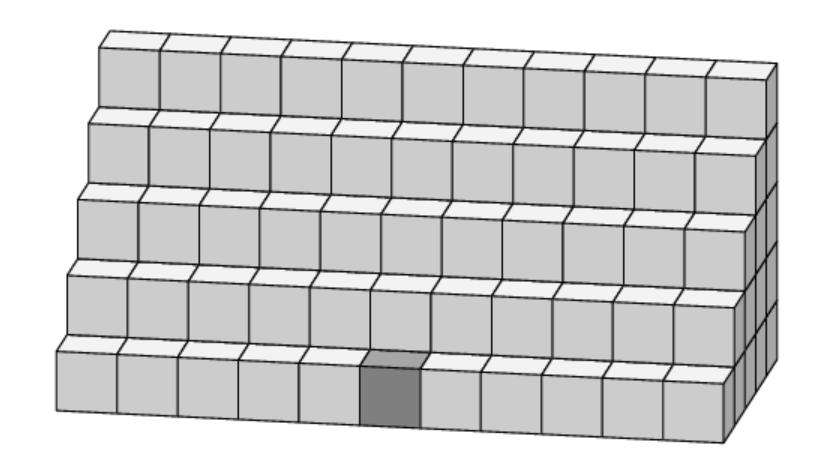


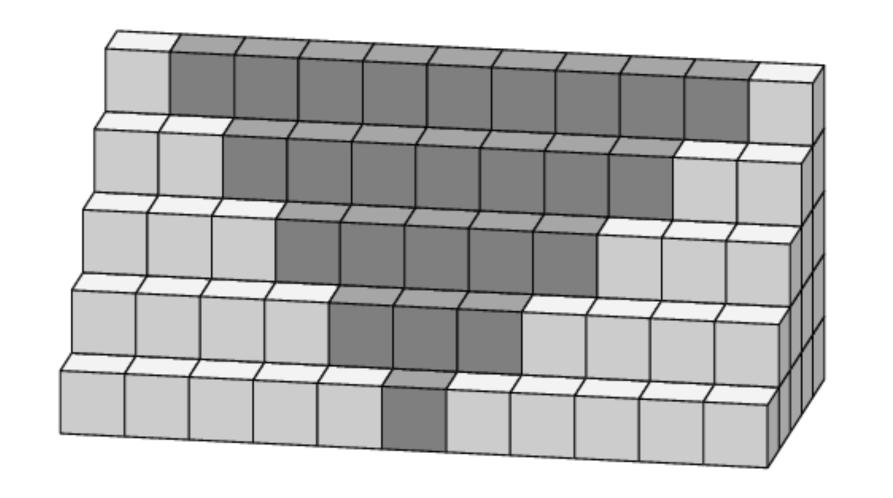






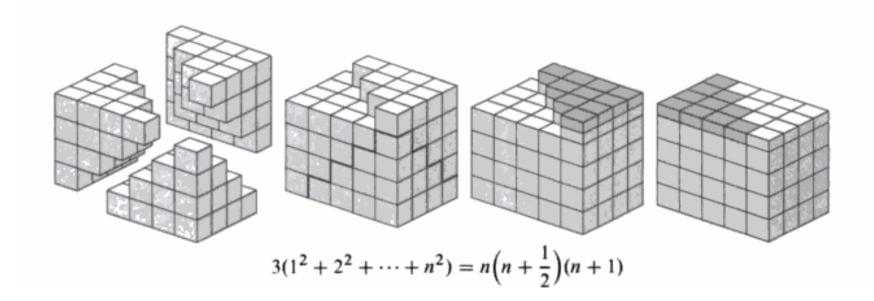






Доказано

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + 4^{2} + \dots + n^{2} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$



5. Сумма кубов. Апастамба

$$1 + 8 = ?$$
 $1 + 8 + 27 = ?$
 $1 + 8 + 27 + 64 = ?$

$$1 + 8 = 9 = 3^{2} = (1 + 2)^{2}$$

$$1 + 8 + 27 = 36 = 6^{2} = (1 + 2 + 3)^{2}$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^{2} = (1 + 2 + 3 + 4)^{2}$$

Гипотеза

$$1^{3} + 2^{3} + 3^{3} + \dots + n^{3} = (1 + 2 + \dots + n)^{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{2}.$$

Докажем с помощью таблицы

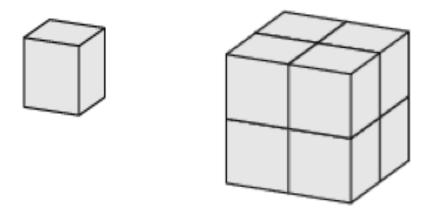
1	2	3	4	5		n-1	n
2	4	6	8	10		2(n-1)	2n
3	6	9	12	15		3(n-1)	3n
4	8	12	16	20		4(n-1)	4n
5	10	15	20	25		5(n-1)	5n
		•••	•••	•••		•••	
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)		(n-1)(n-1)	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	•••	(n-1)n	nn

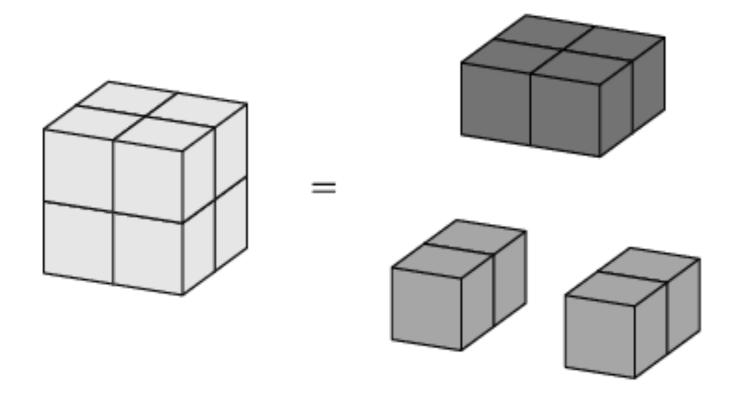
1	2	3	4	5		n-1	n
2	4	6	8	10		2(n-1)	2n
3	6	9	12	15		3(n-1)	3n
4	8	12	16	20		4(n-1)	4n
5	10	15	20	25		5(n-1)	5n
				•••			•••
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)		(n-1)(n-1)	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	•••	(n-1)n	nn

Найдем сумму всех чисел таблицы

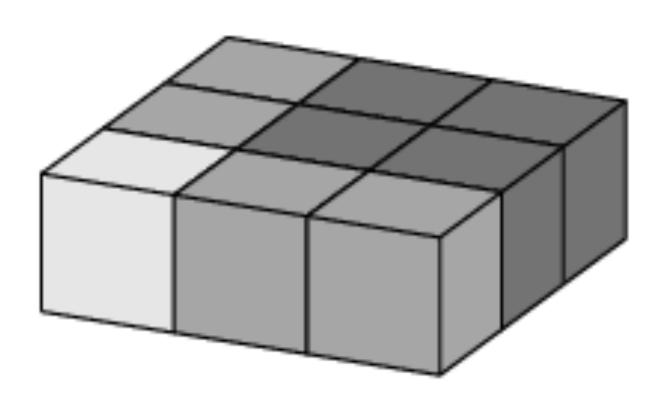
 $= (1 + 2 + ... + n)^2$.

«Смотри!»: изобразим 1^3 и 2^3

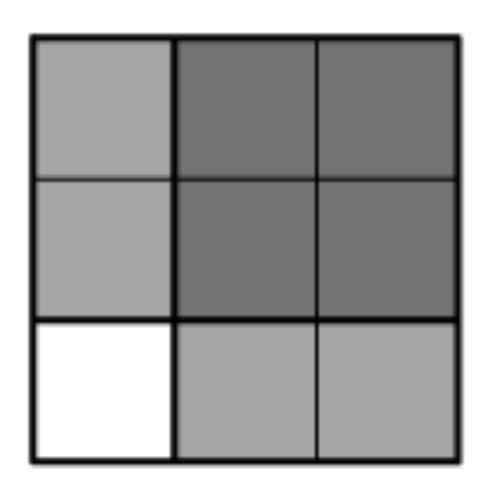




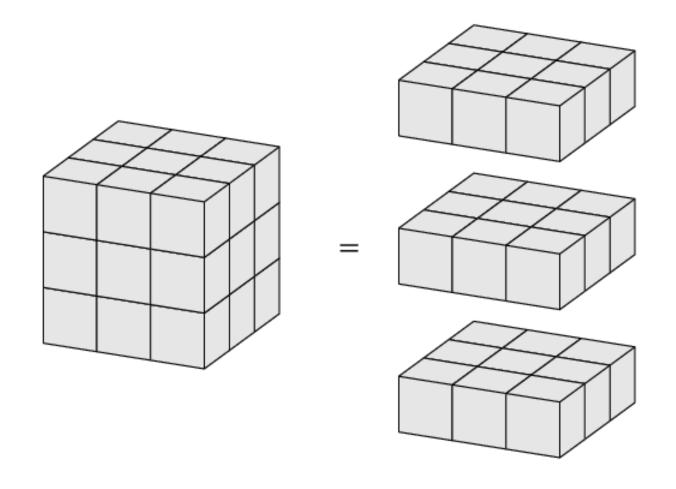
$$1^3+2^3=?$$



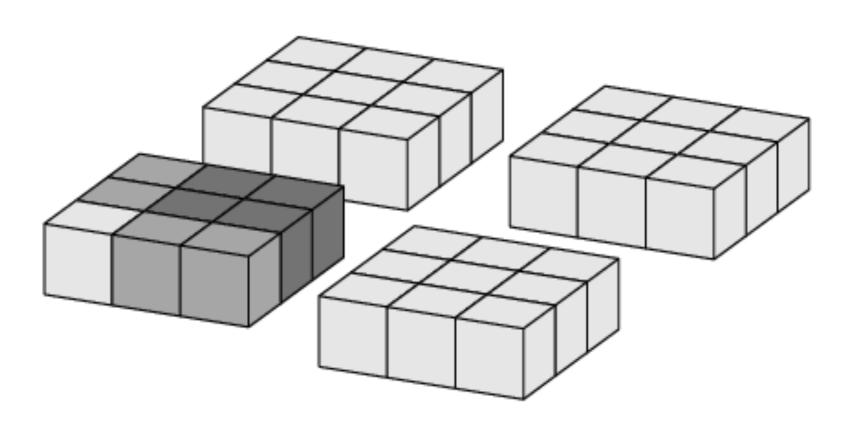
$$1^3+2^3=(1+2)^2$$

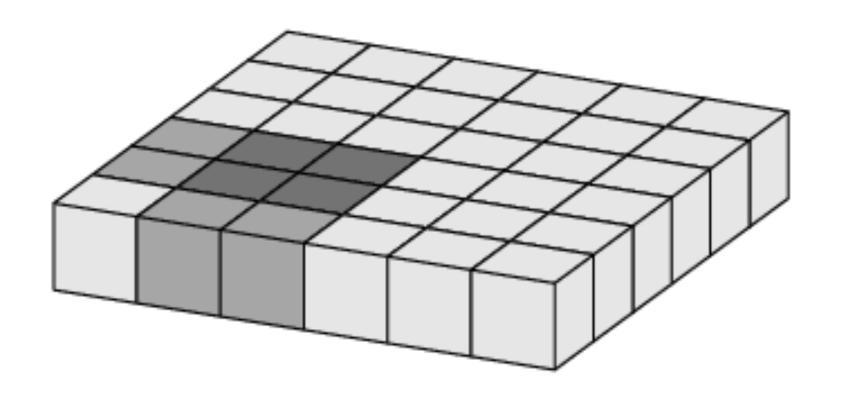


Изобразим 3³

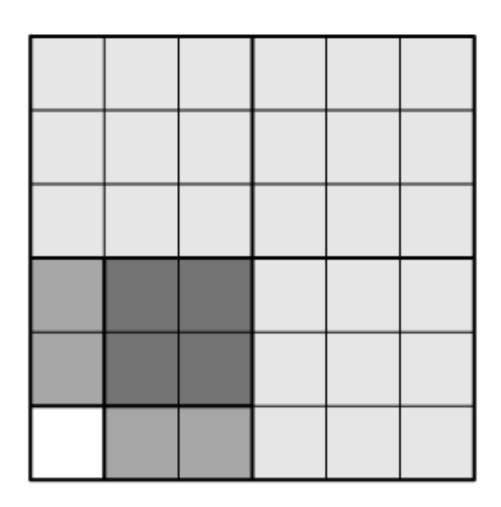


$$1^3+2^3+3^3=?$$

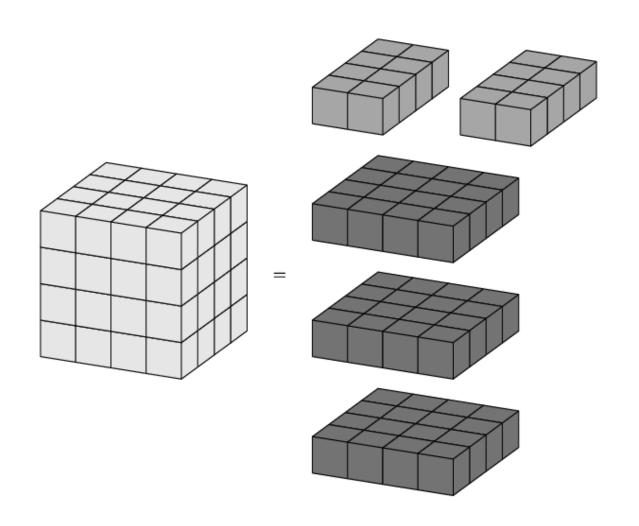




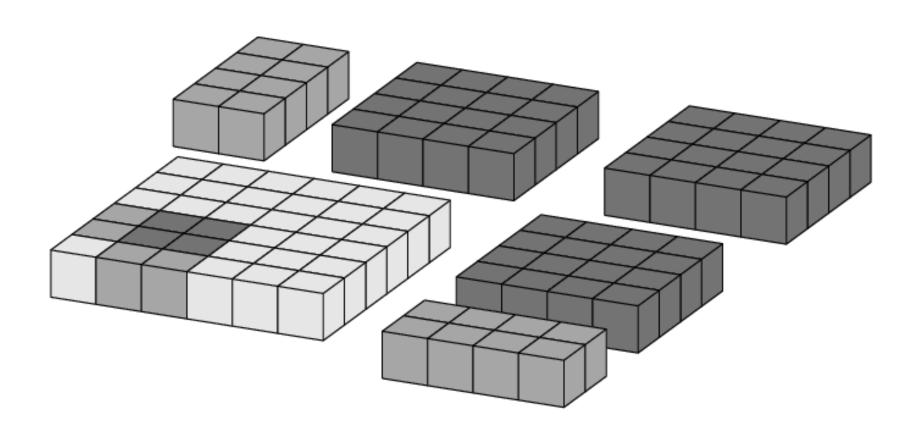
$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^3$$



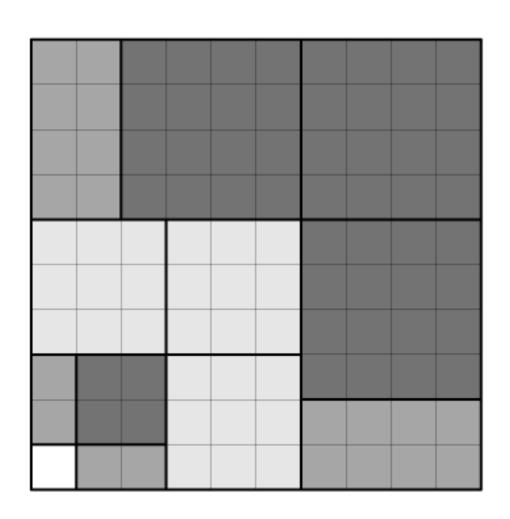
Изобразим 4³

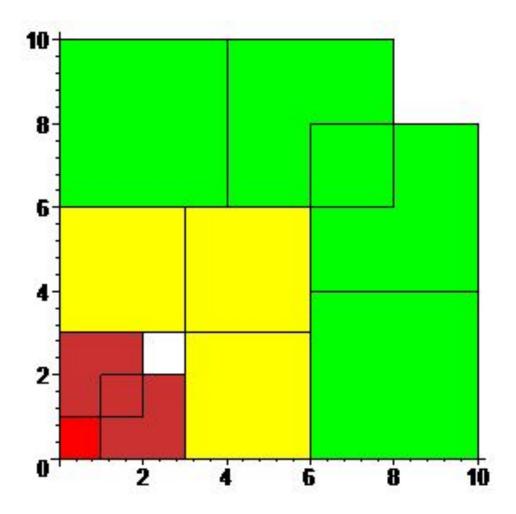


$$1^3+2^3+3^3+4^3=?$$



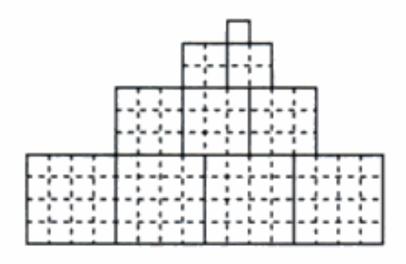
$$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2$$





Плоское доказательство

- А) Объясните, почему в этой фигуре 1³ + 2³ + 3³ + 4³ клеток.
- Б) Сложив несколько таких фигур, докажите формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{1}{4} (n(n+1))^2$.



-1- + -1-
"," ; "," " " " " " " " " " " " " " " " " "
production of the design of the second
To T To T To
- 6 -7 - 6 -4 -4 -4 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6 -6
- - - - - - - - - -
10000 10000
[二克·克克克·伊·克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克克
and the first of the first of the second of
THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE OWNER, THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE OWNER, THE PERSON NAMED IN COLUMN TO PERSON NAMED IN COLU
- 3 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6 - 6
CONTRACTOR OF THE PARTY OF THE
NAME AND POST OF THE PARTY OF T

Что мы поняли (8-9 класс)

- $S_1 = 1 + 2 + ... + n = n(n+1)/2$,
- $S_2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$
- $S_3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.
- $S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = ?$

•
$$S_0 = n$$
,

•
$$S_1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$$
,

•
$$S_2 = 1/3 n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$$
,

•
$$S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2$$
.

•
$$x^5 - (x-1)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$$

 Запишем для x = 1, 2, ..., n, и сложим почленно:

$$n^{5} - 0 = 5 \cdot (1^{4} + 2^{4} + \dots + n^{4}) - 10 \cdot (1^{3} + 2^{3} + \dots + n^{3}) + 10 \cdot (1^{2} + 2^{2} + \dots + n^{2}) - 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$n^5 = 5 \cdot S_4 - 10 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 - 5 \cdot S_1 + S_0$$

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Свойства многочлена суммы

• S_k – многочлен от n.

• В многочлене S_k старший член имеет вид n^k $^{+1}/(k+1)$, а следующий за ним (для k>0) имеет вид $n^k/2$.

Свойства многочлена суммы

- Для всех многочленов S_k свободный член нулю, а сумма всех коэффициентов равна 1.
- Указание. Подставьте в определение и выражение для S_k : n=0 и n=1.

История

- Древний мир
- Древняя Греция (Архимед)
- Интегрирование параболы
- Арабское средневековье
- Фаулхабер и Бернулли

вытыховоргантих тиморовоххово MANU X PIN TO CHE SE TO UTO HOUTE OF MICE (Sempores on HELD HELDER ON THE ON OF THE STORE Bridgen fe go g erich he hear - Las (Konto) rate ofterpostspieben woodnowsolla & Markon Kt. Los Machania of Marian or toublance with perporter unge - INO Maborano moban physica H = No. 1 Kan - Danotan pronter hammen a characher SHALL BREAKERS HOLD BY COL HAMAR SON OF THE COURSE ! NO. THE MOON PARTY TOWNERS TO MANY SEED OF SENSOCCOVED CONTRACTOR and a lab ton Jan an see Bond or lookarpin the parties dans Hyacapt;

Service of the party of the party of the party of Exal Tourisosour cope of the Touristing o hand course of survey of the opening TOTO UNITED WAT AND CE SE PROPERTY Con the Contract of the Young the Colors TOPRES THEN EASON OF HOUSE WELLEN my shittan .. Has He age adon in wee Gram a Mar or house house arginaria STOWNS C. THOCKCOOK TO THE THEORY OF THE TOP OF THE KAN WHOM W The party of the do. Good not be the court to it the comparage care the property without the sail of the sand and sail along AND KALENDAND AND AND AND ALON CHOICE A O TO DE OTHOR SHOT AND I PROTECTION

7374

7 374 Serve marie Arthocyc The of powerly one The Car To so out when Secretaring STATE OF THE STATE

Литература

- Roger Nelsen, Claudi Alsina
 Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics (Classroom Resource Material)
- Артамкин, Городенцев и др.
- «Числа и фигуры»
- Мерзон, Ященко
- «Длина, площадь, объём»

