Суммы степеней:
то считаем, то рисуем

Алексей Иванович Сгибнев

a.i.sgibnev@gmail.com

Свернем в формулу

n	1	2	3	4
?	2	4	6	8
	1	3	5	7
	1	4	9	16
	1	8	27	64
	2	6	12	20
	1	3	6	10

1. Сумма натуральных чисел. Гаусс

$$1+2=3=?$$

$$1+2+3=6=?$$

$$1+2+3+4=10=?$$

$$??=??$$

Сначала угадай, потом докажи!

$$1+2=3=\frac{2\cdot 3}{2}$$

$$1+2+3=6=\frac{3\cdot 4}{2}$$

$$1+2+3+4=10=\frac{4\cdot 5}{2}$$

$$??=??$$

Доказательство суммированием (метод Гаусса)

$$S = 1 + 2 + \ldots + (n - 1) + n,$$

$$S = n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1.$$

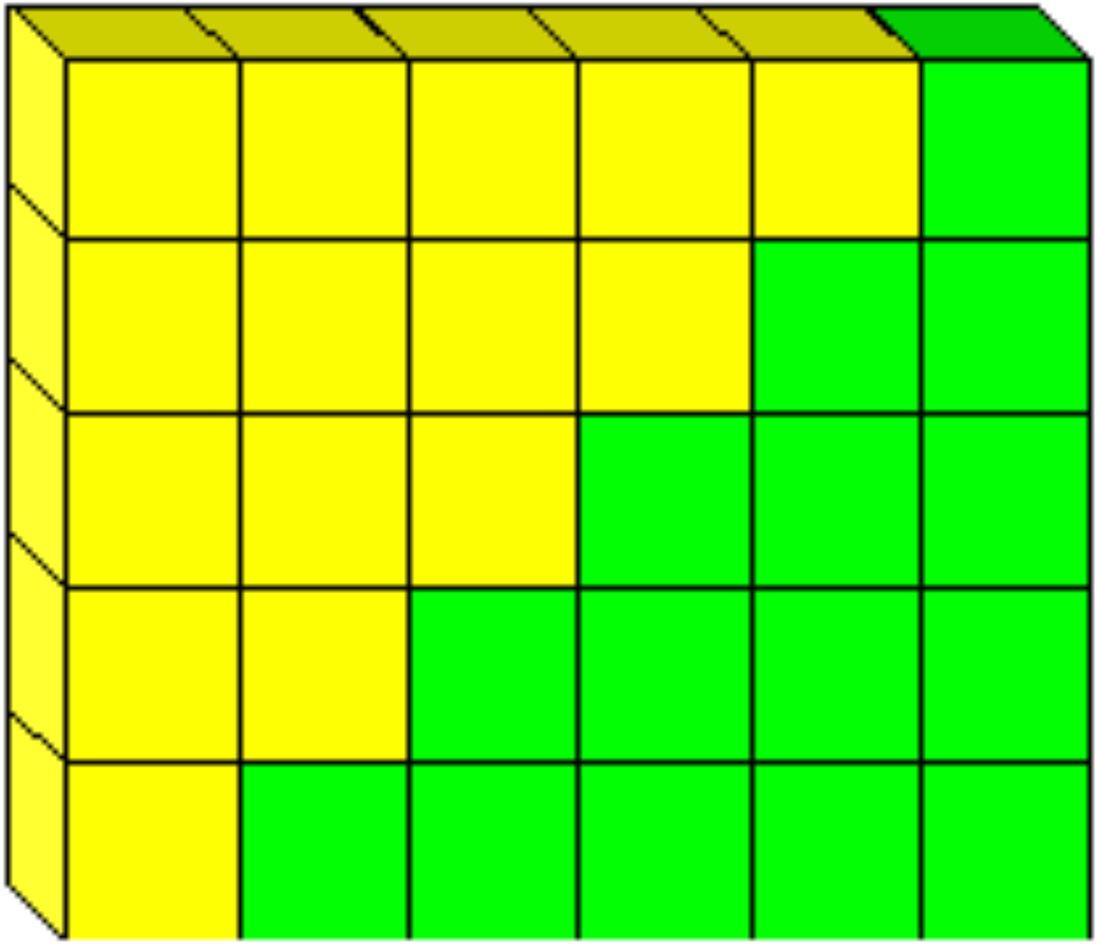
____

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n+1) + (n + 1) =$$

$$= n(n+1).$$

$$\mathbf{S = n(n+1)/2}.$$

«Смотри!»



Зачем доказывать?

Продолжите последовательность:

$$2, 4, \ldots$$

Зачем доказывать?

Продолжите последовательность:

$$2, 4, 6, \ldots$$

2. Продолжим цепочку равенств

$$1 + 3 = ?$$

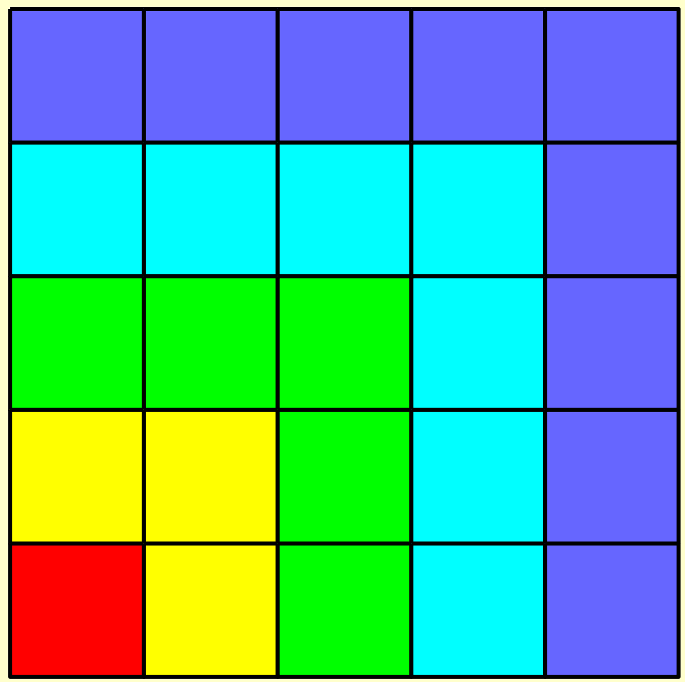
$$1 + 3 + 5 = ?$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = ?$$

$$?? = ??$$

«Смотри!»

$$n = 5$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = S$$

$$(2n-1) + (2n-3) + \dots + 3 + 1 = S$$

$$S = 2nn/2 = n^2$$

3. Вспомогательная задача

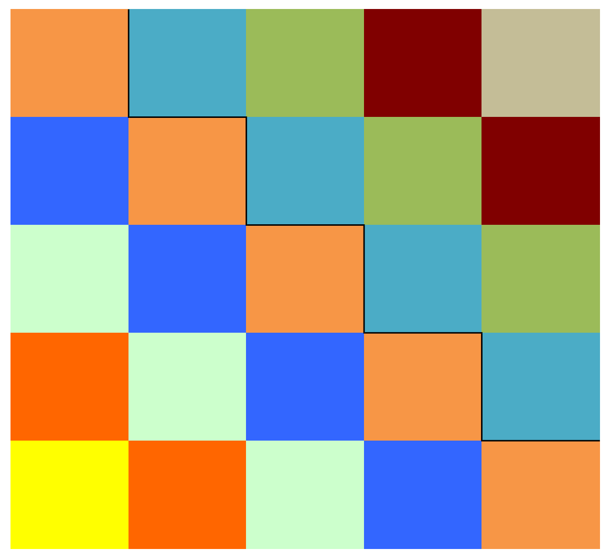
$$1 + 2 + 1 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = ?$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = ?$$

$$??? = ??$$

Докажем картинкой

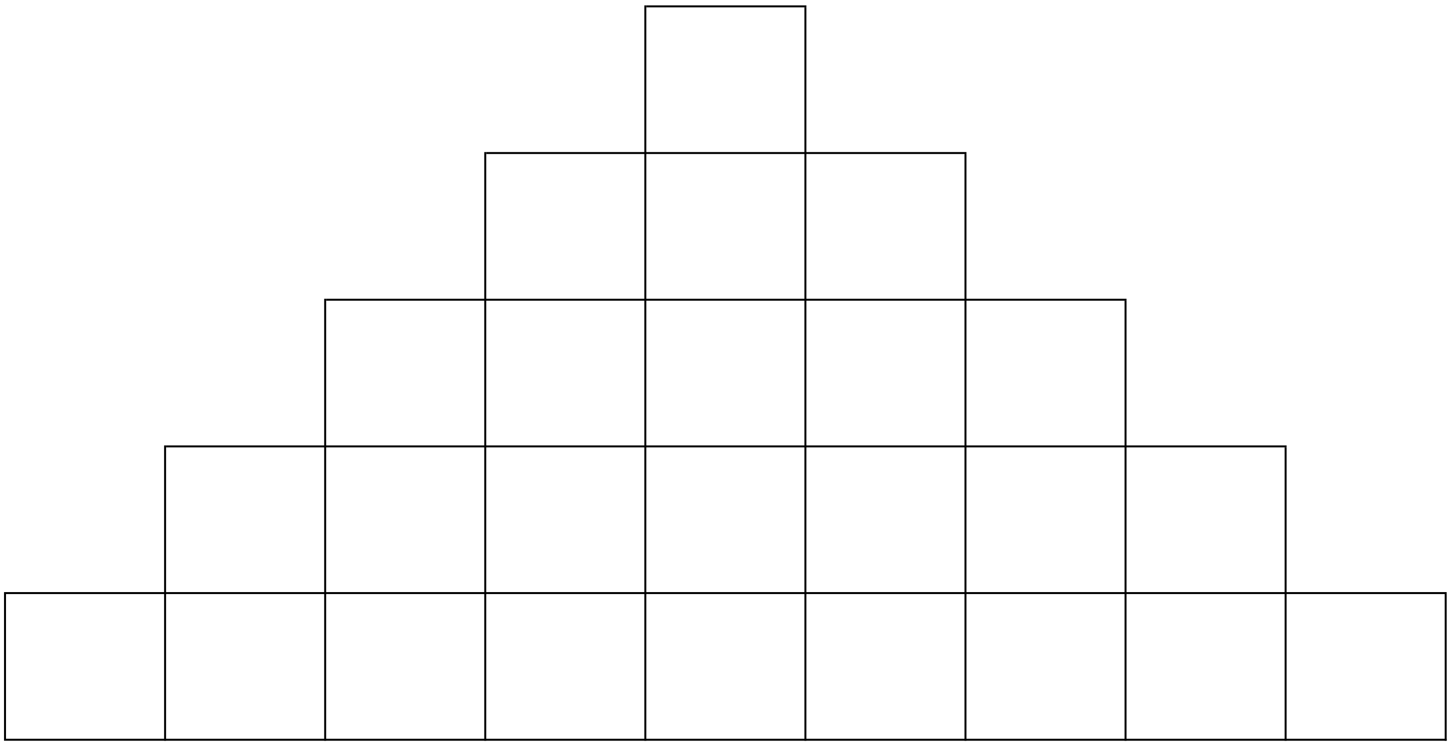


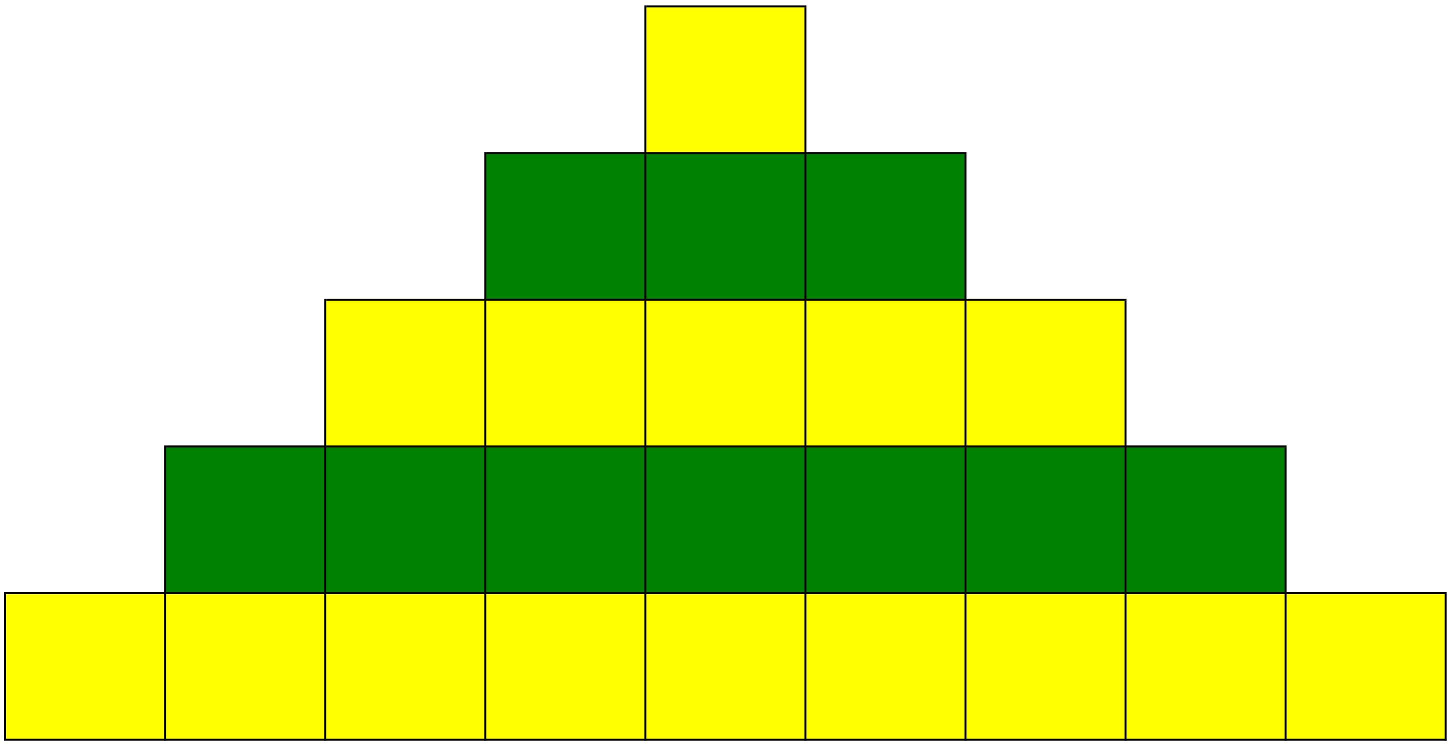
Докажем методом Гаусса

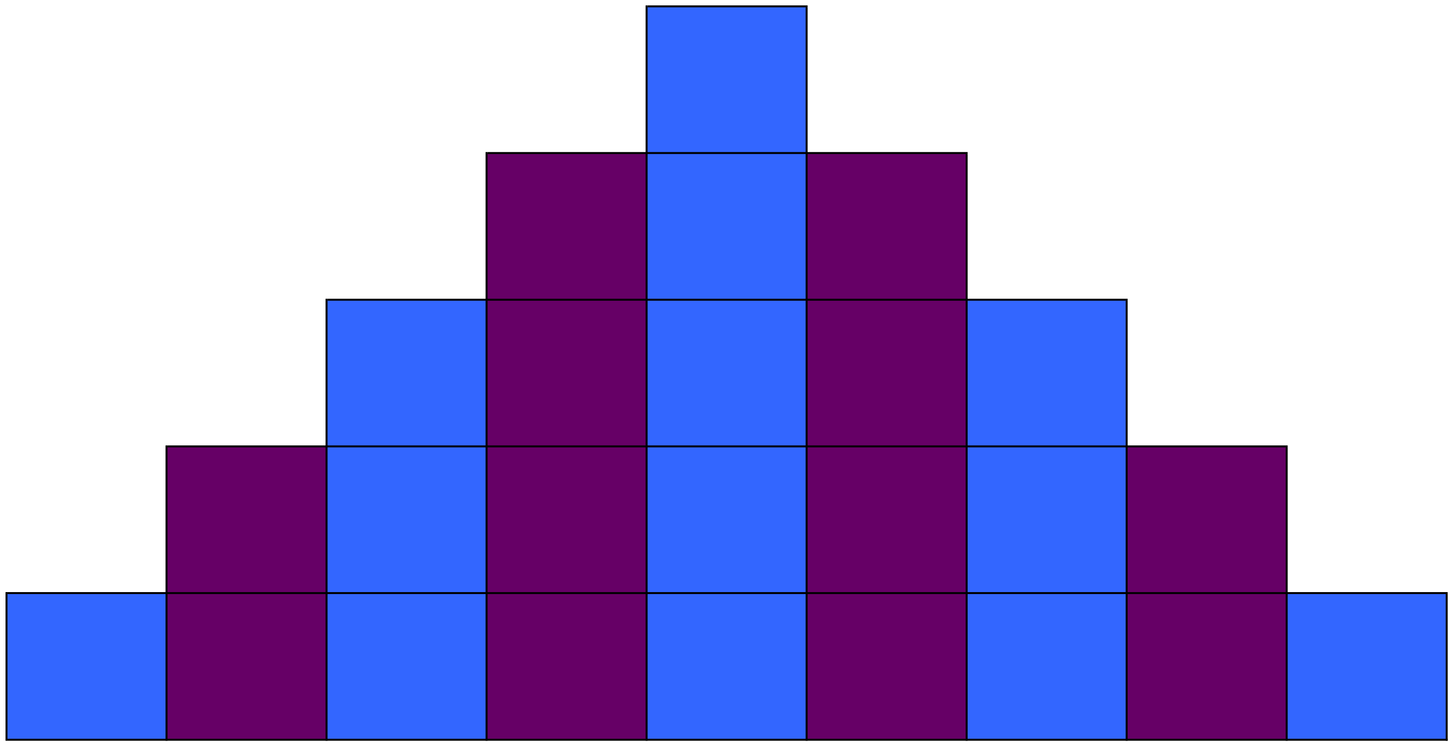
$$\begin{array}{ccccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ + & (n-1) & + & (n-2) & + & \ldots & + & 2 & + & 1 & + & 0 \\ \hline & n & + & n & + & \ldots & + & n & + & n & + & n \end{array}$$

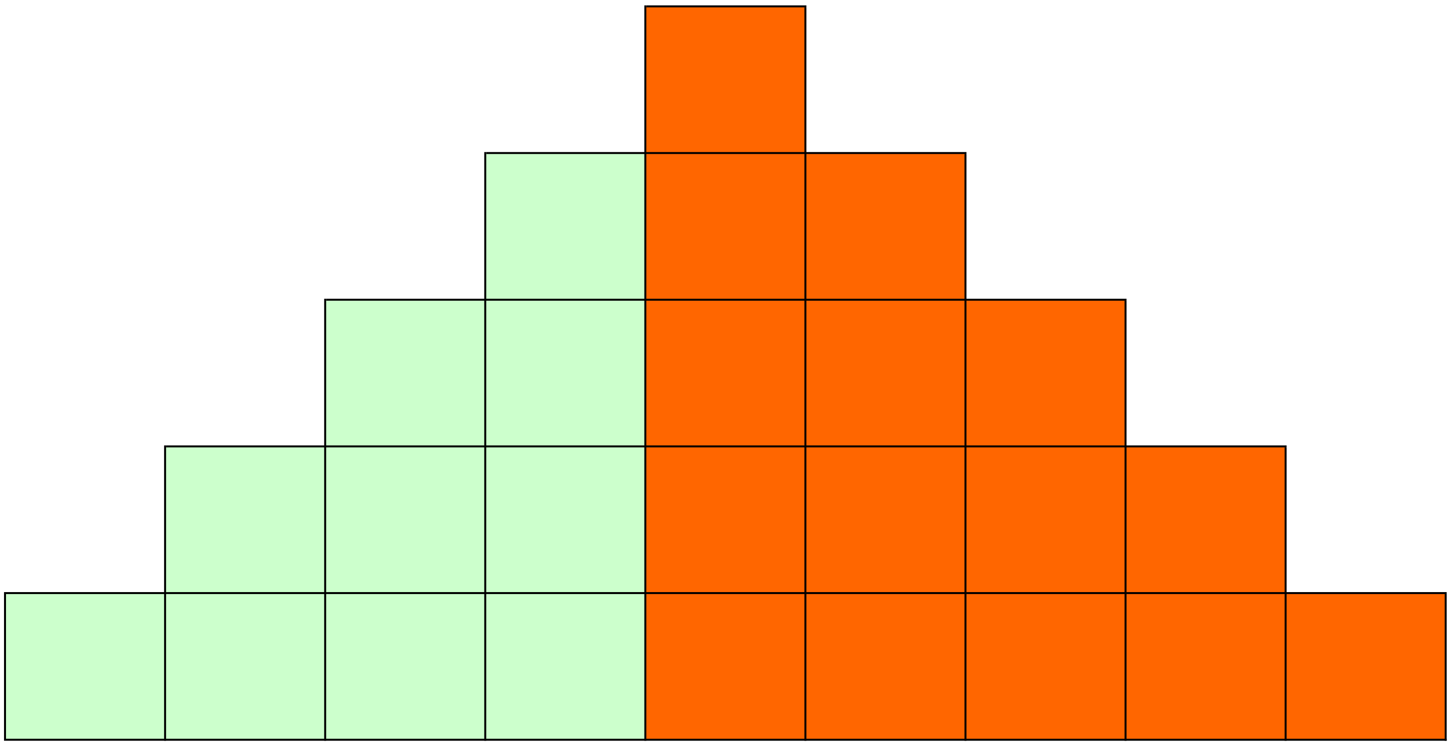
$$= \mathbf{n^2}$$

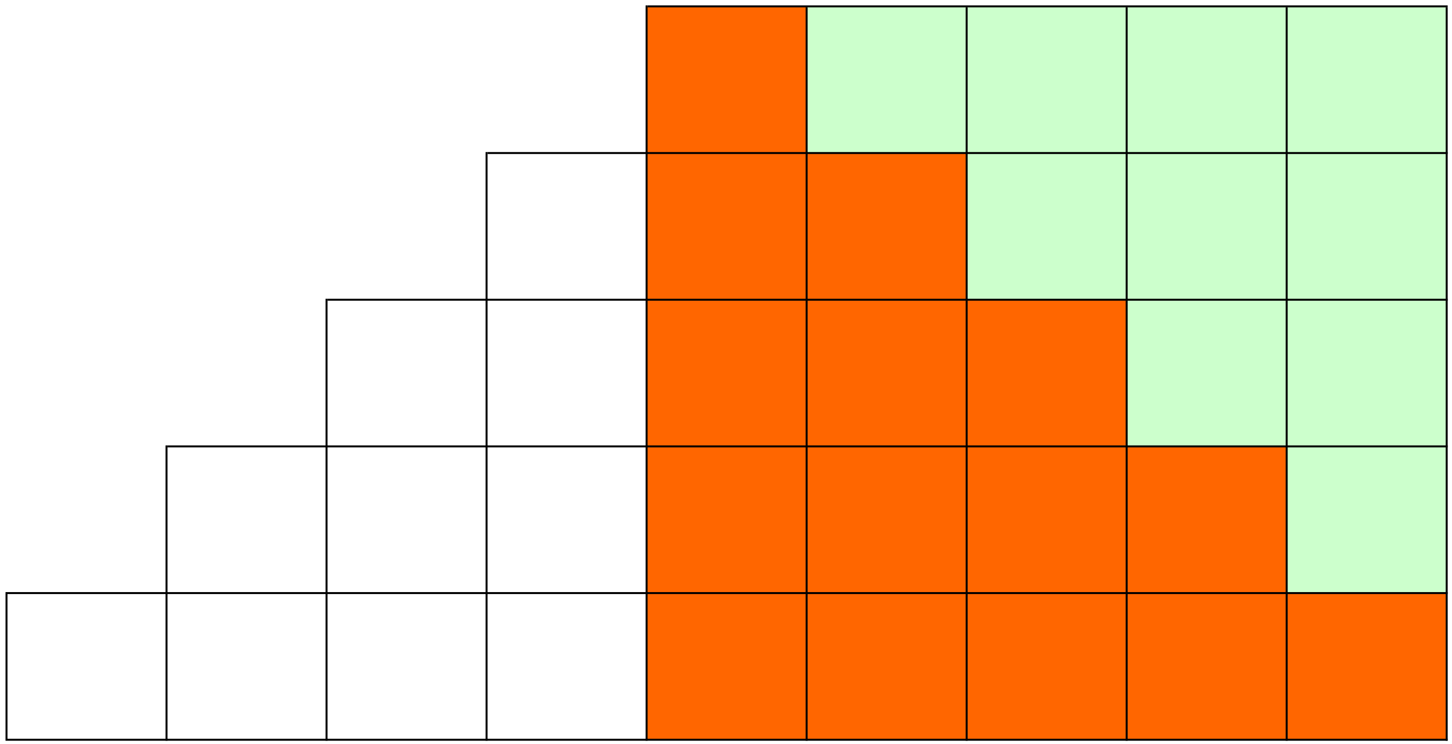
А теперь обе формулы вместе:











Запомним формулы:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2$$

4. Сумма квадратов. Архимед

$$1^2 + 2^2 = ?$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = ?$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = ?$$

4. Сумма квадратов

$$1^2 + 2^2 = 2 \times 3 \times (2 + 3) / 6$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 3 \times 4 \times (3 + 4) / 6$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = ?$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \frac{5 \cdot (5+1) \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{6}.$$

Докажем с помощью таблицы

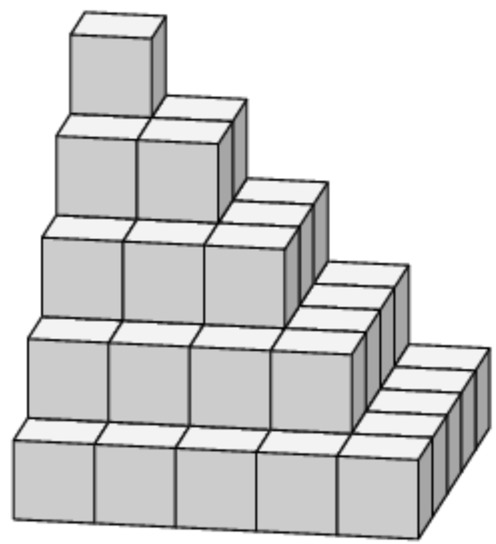
1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1
2	2	2	2	…	2	2	2	2	2	2	2	…	2	2	2	2
3	3	3	3	…	3	3	3	3	3	3	3	…	3	3	3	3
4	4	4	4	…	4	4	4	4	4	4	4	…	4	4	4	4
5	5	5	5	…	…	5	5	5	5	5	…	…	5	5	5	5
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n-1	n-1	n-1	n-1	…	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	…	n-1	n-1	n-1	n-1
n	n	n	n	…	n	n	n	n	n	n	n	…	n	n	n	n

Сумма чисел в таблице равна *n(n+1)(2n+1)/2*

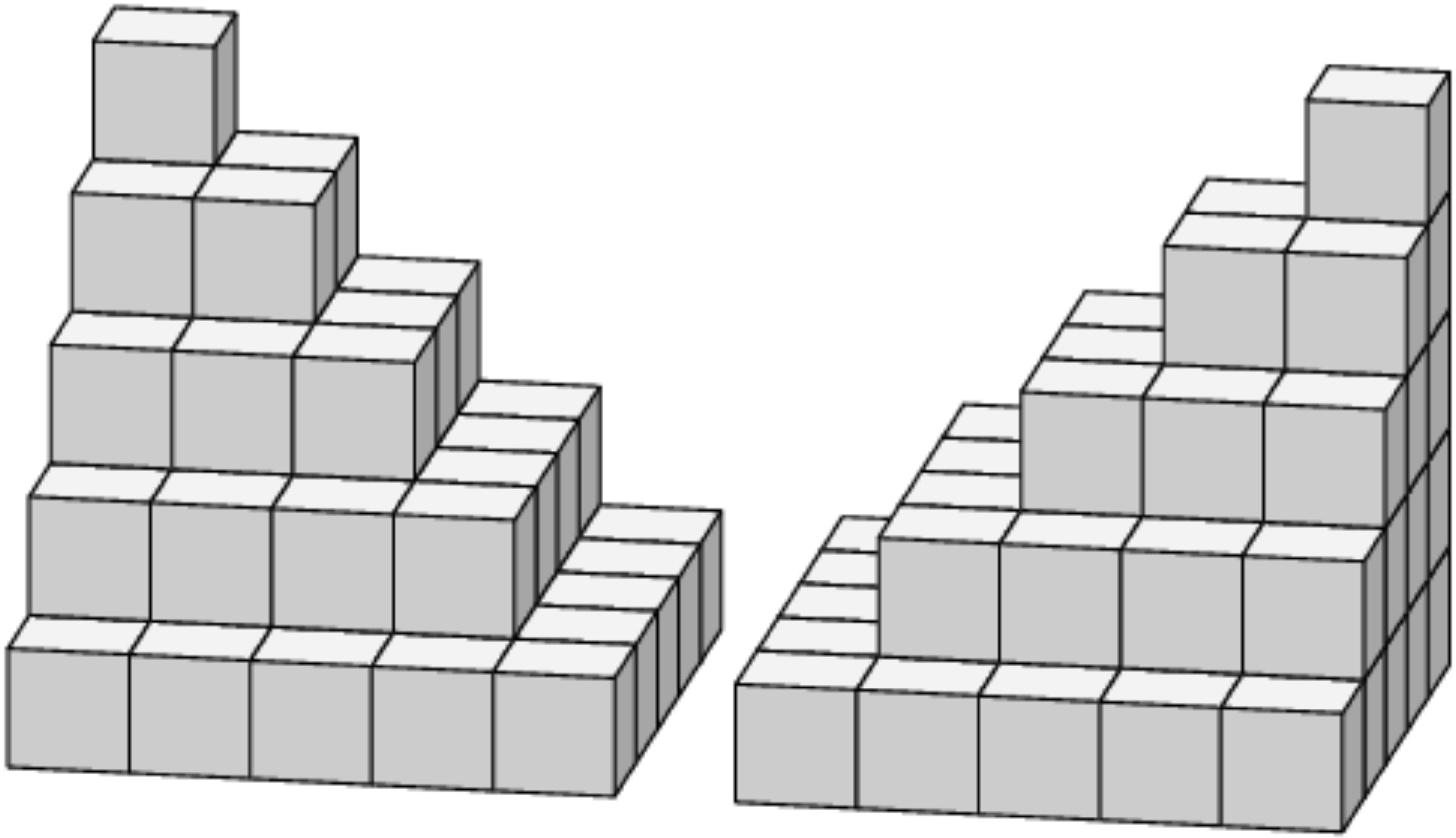
1	1	1	1	…	1	1	1	1	1	1	1	…	1	1	1	1
2	2	2	2	…	2	2	2	2	2	2	2	…	2	2	2	2
3	3	3	3	…	3	3	3	3	3	3	3	…	3	3	3	3
4	4	4	4	…	4	4	4	4	4	4	4	…	4	4	4	4
5	5	5	5	…	…	5	5	5	5	5	…	…	5	5	5	5
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n-1	n-1	n-1	n-1	…	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	…	n-1	n-1	n-1	n-1
n	n	n	n	…	n	n	n	n	n	n	n	…	n	n	n	n

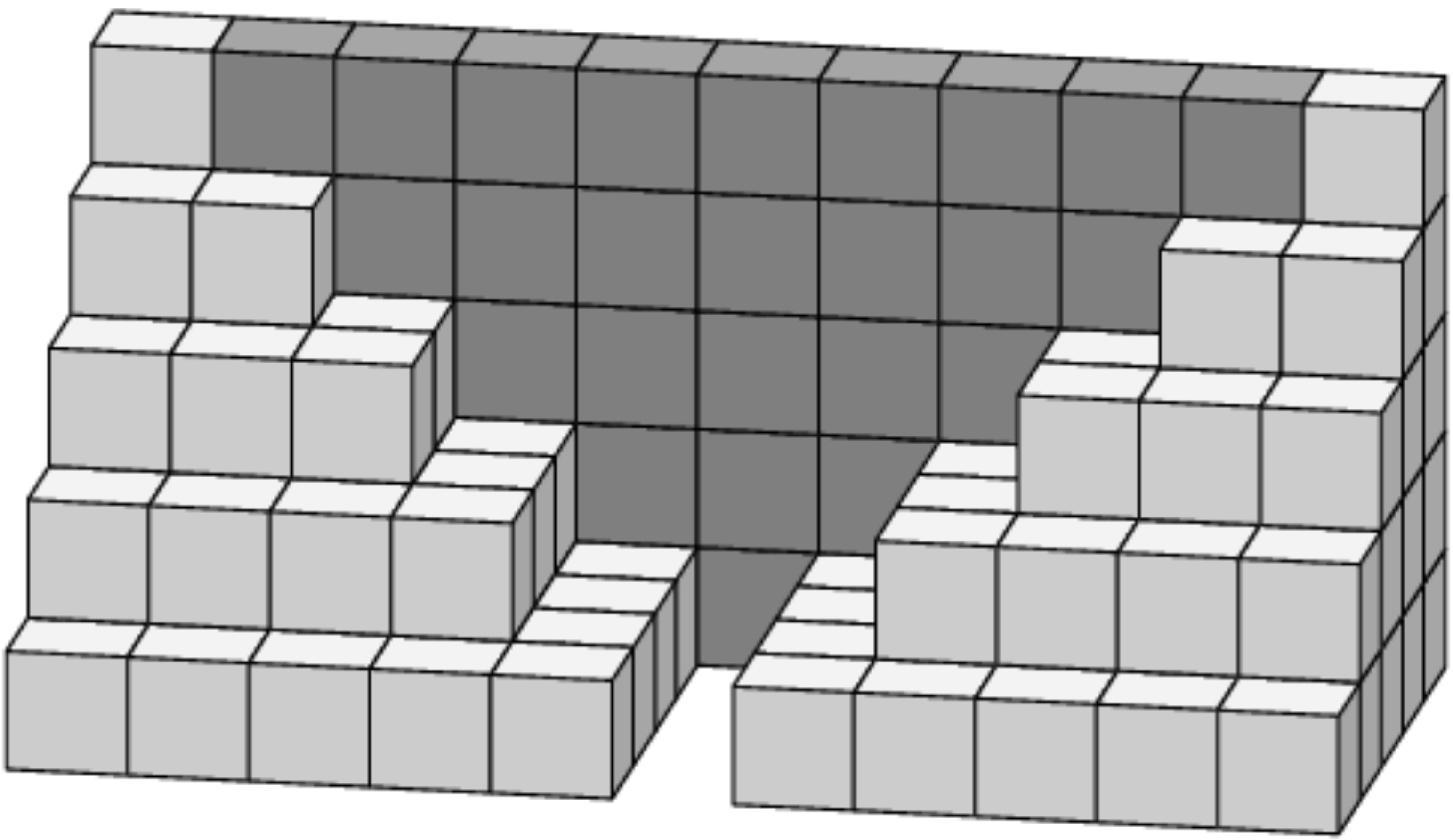
1	1	1	1	...	1	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1
2	2	2	2	...	2	2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2
3	3	3	3	...	3	3	3	3	3	3	3	...	3	3	3	3
4	4	4	4	...	4	4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4
5	5	5	5	...	...	5	5	5	5	5	...	...	5	5	5	5
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n-1	n-1	n-1	n-1	...	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	n-1	...	n-1	n-1	n-1	n-1
n	n	n	n	...	n	n	n	n	n	n	n	...	n	n	n	n

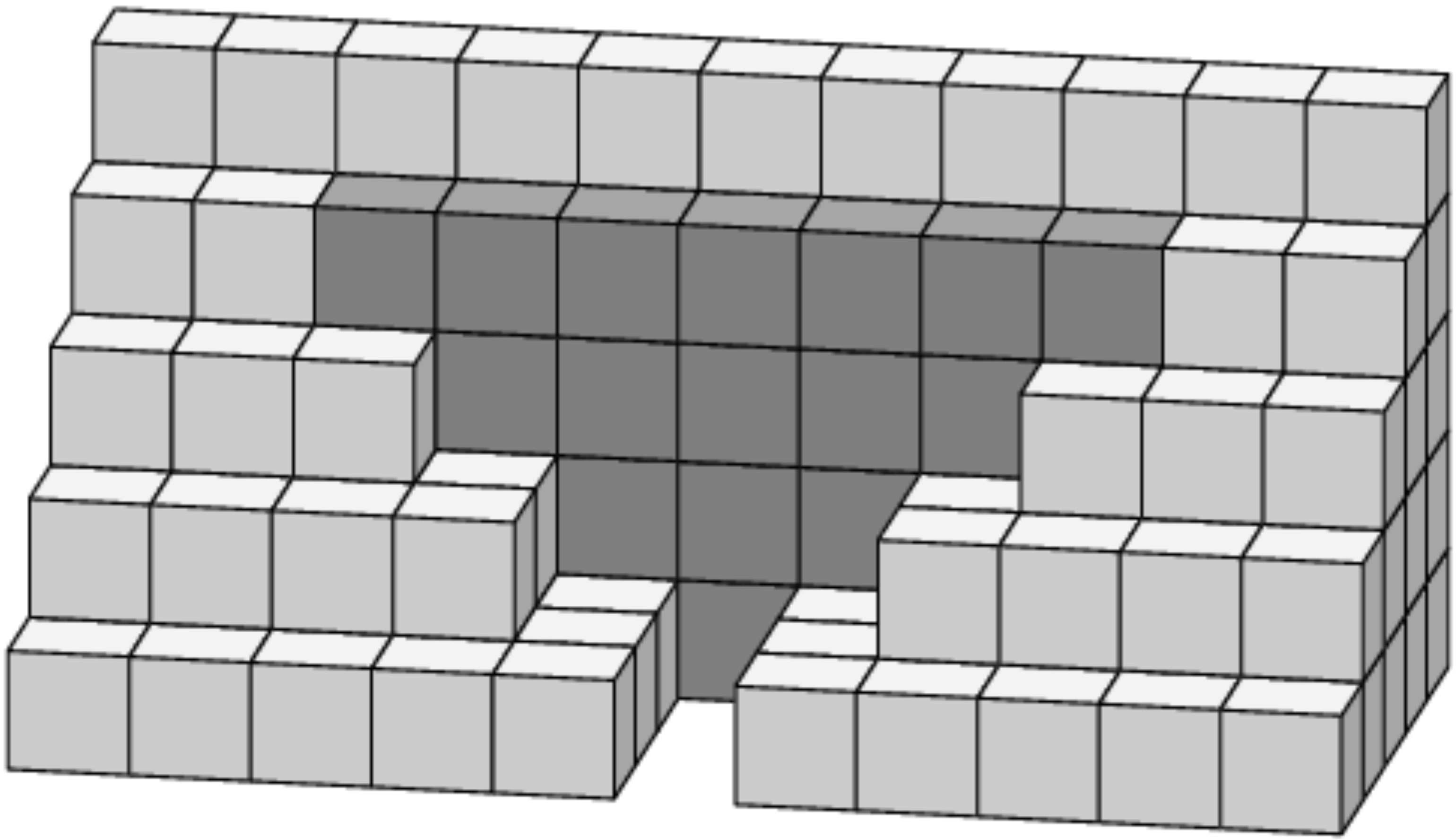
Изобразим сумму квадратов графически

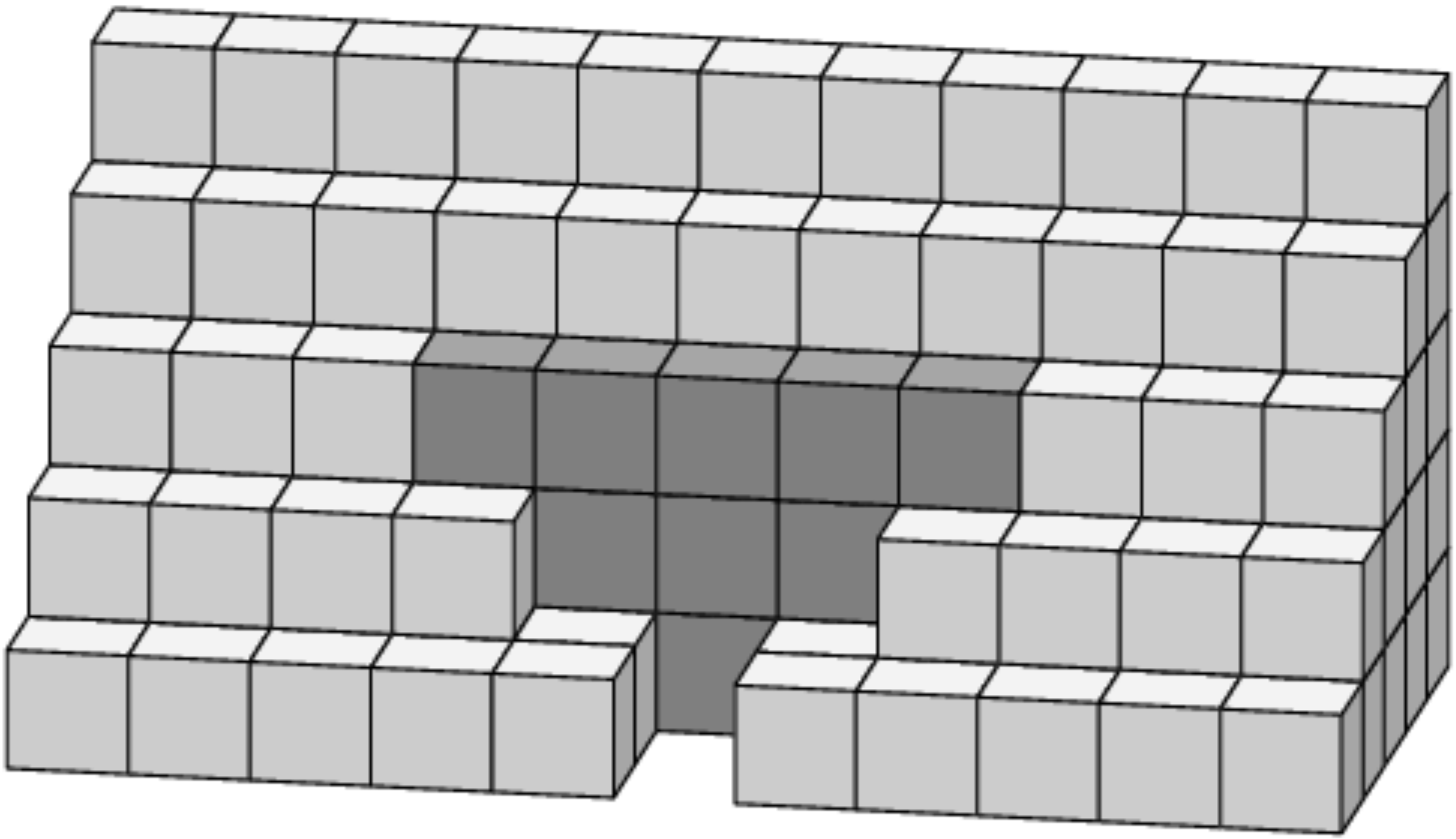


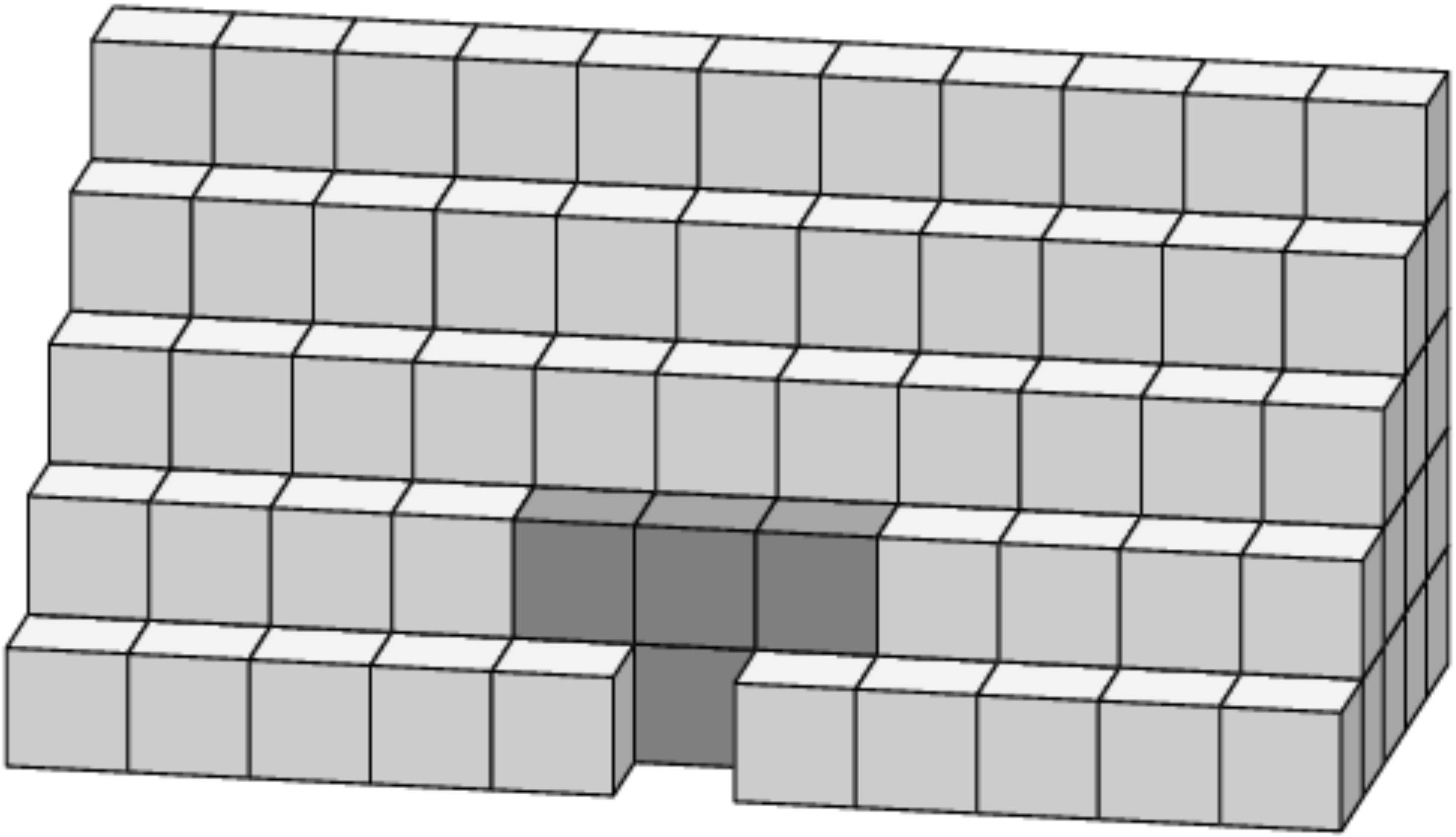
Как их сложить??

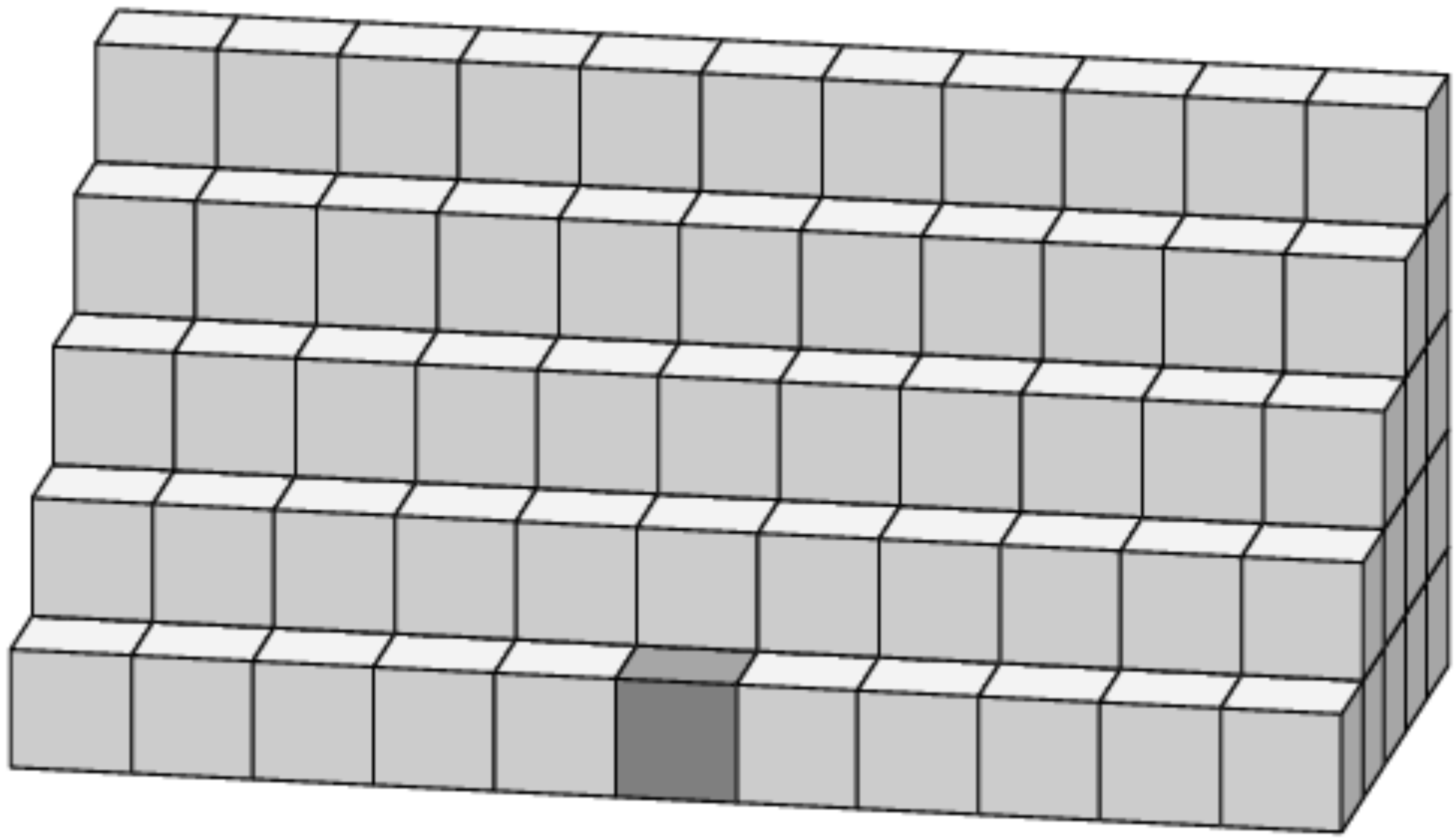


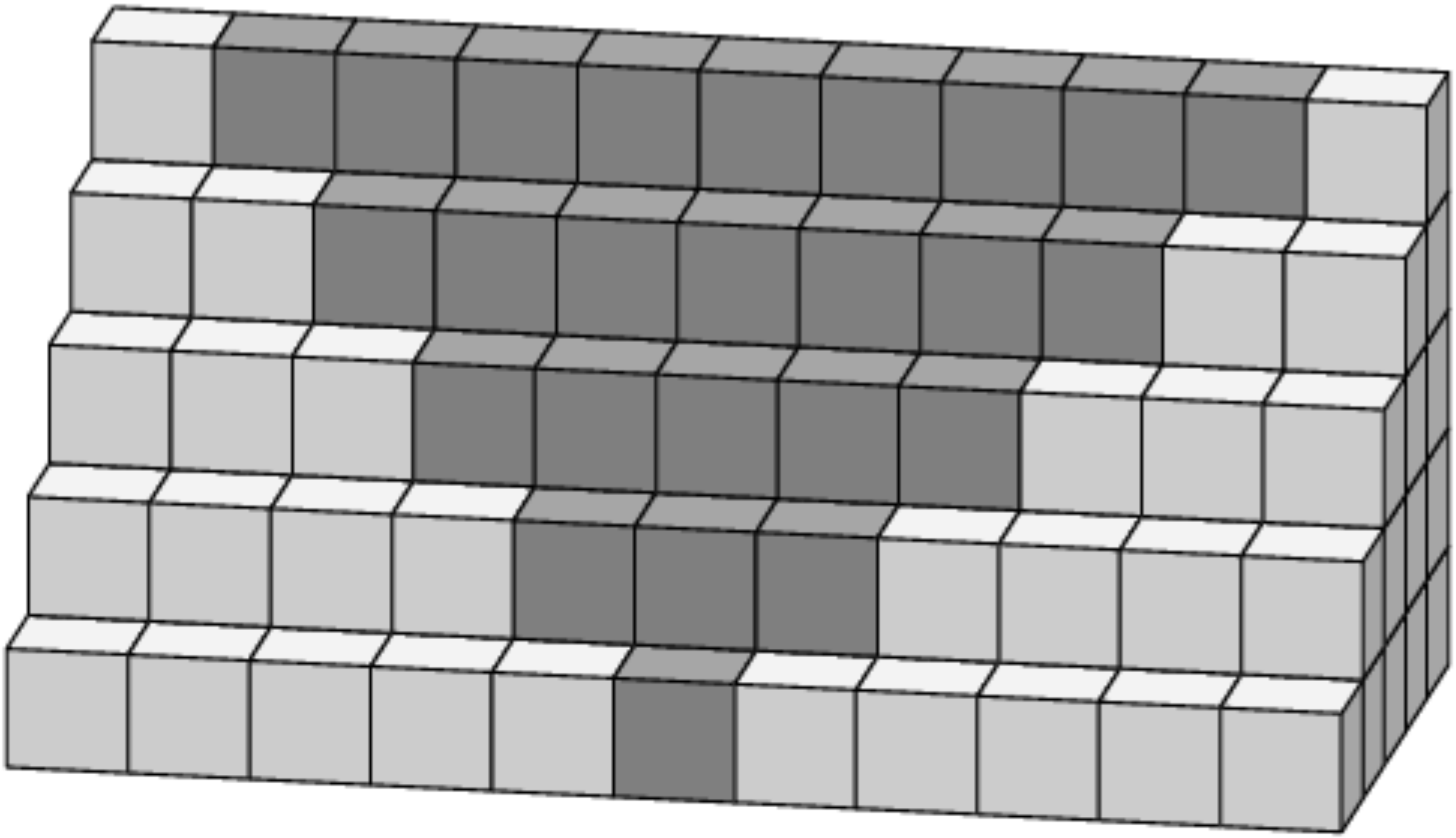






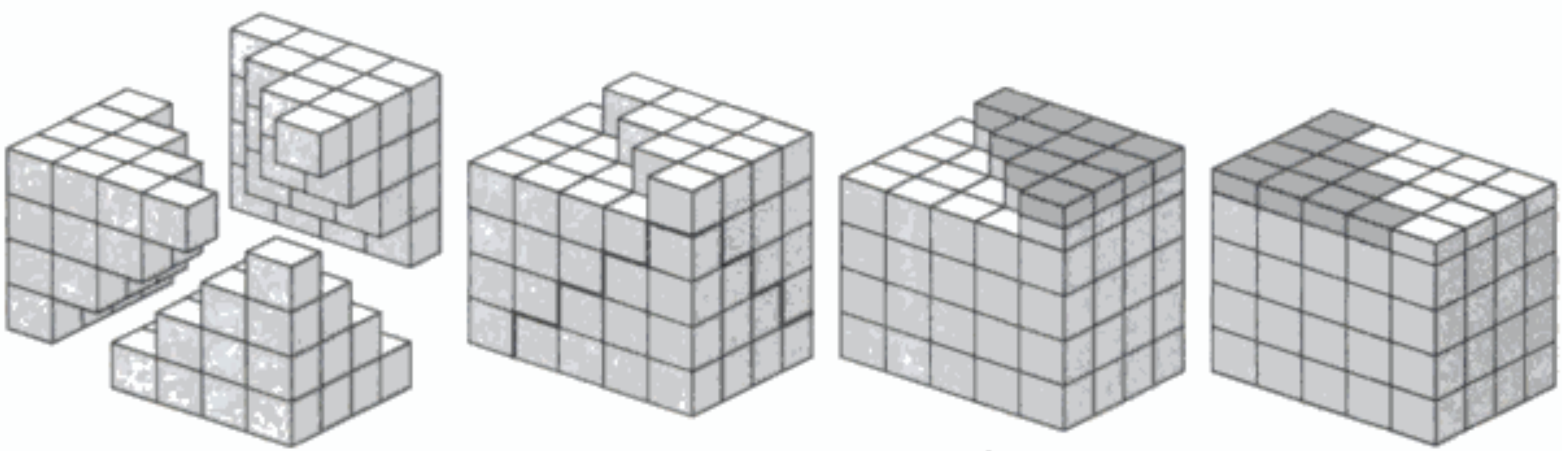






Доказано

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}.$$



$$3(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = n\left(n + \frac{1}{2}\right)(n + 1)$$

5. Сумма кубов. Апастамба

$1 + 8 = ?$

$1 + 8 + 27 = ?$

$1 + 8 + 27 + 64 = ?$

$$1 + 8 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$$

$$1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

Гипотеза

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Докажем с помощью таблицы

1	2	3	4	5	…	n-1	n
2	4	6	8	10	…	2(n-1)	2n
3	6	9	12	15	…	3(n-1)	3n
4	8	12	16	20	…	4(n-1)	4n
5	10	15	20	25	…	5(n-1)	5n
…	…	…	…	…	…	…	…
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)	…	(n-1)(n-1)	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	…	(n-1)n	nn

1	2	3	4	5	…	n-1	n
2	4	6	8	10	…	2(n-1)	2n
3	6	9	12	15	…	3(n-1)	3n
4	8	12	16	20	…	4(n-1)	4n
5	10	15	20	25	…	5(n-1)	5n
…	…	…	…	…	…	…	…
n-1	2(n-1)	3(n-1)	4(n-1)	5(n-1)	…	(n-1)(n-1)	(n-1)n
n	2n	3n	4n	5n	…	(n-1)n	nn

Найдем сумму всех чисел таблицы

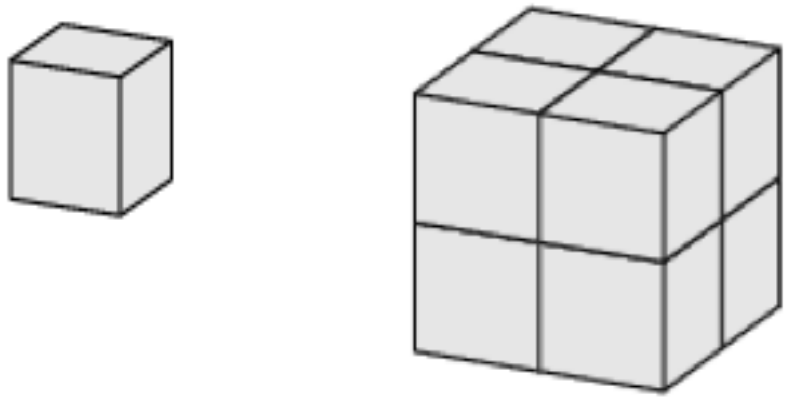
Обозначим $1 + 2 + \ldots + n = s$.

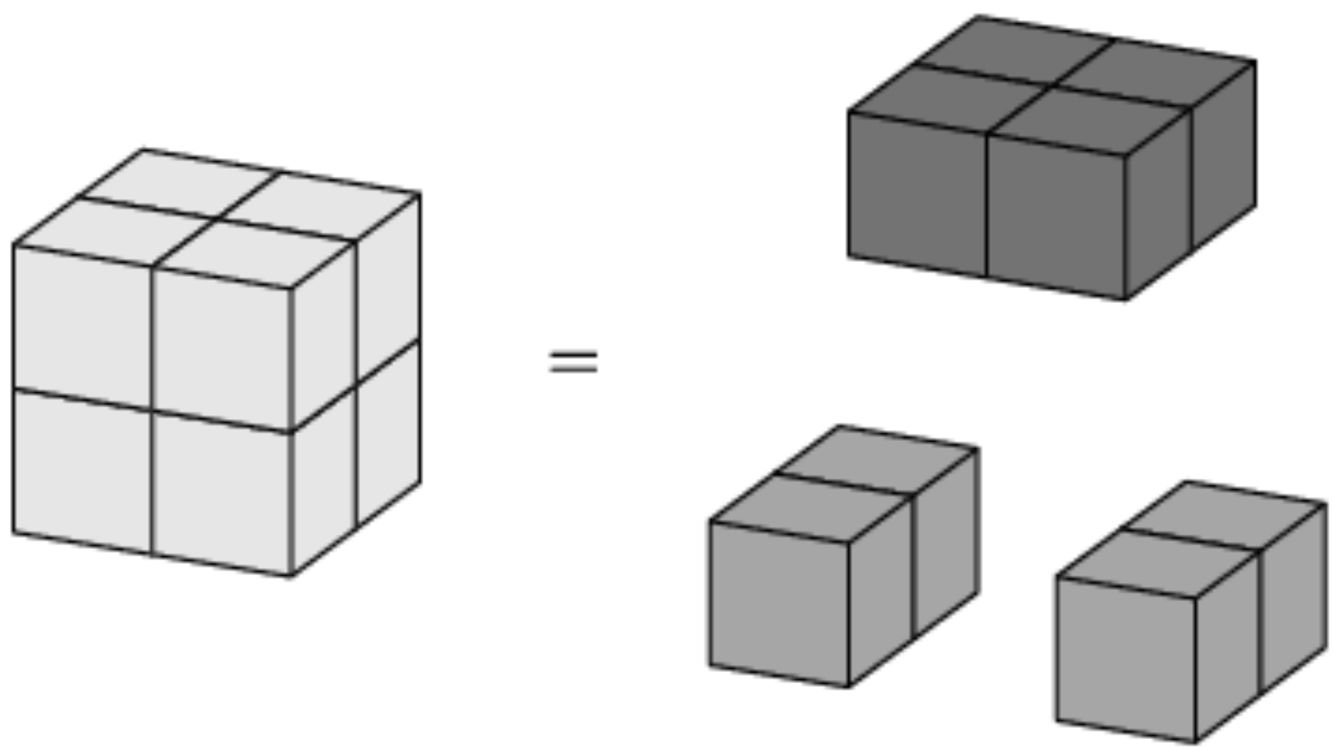
Тогда сумма чисел по столбцам равна

$$1s + 2s + 3s + \ldots + ns = (1 + 2 + \ldots + n)s =$$

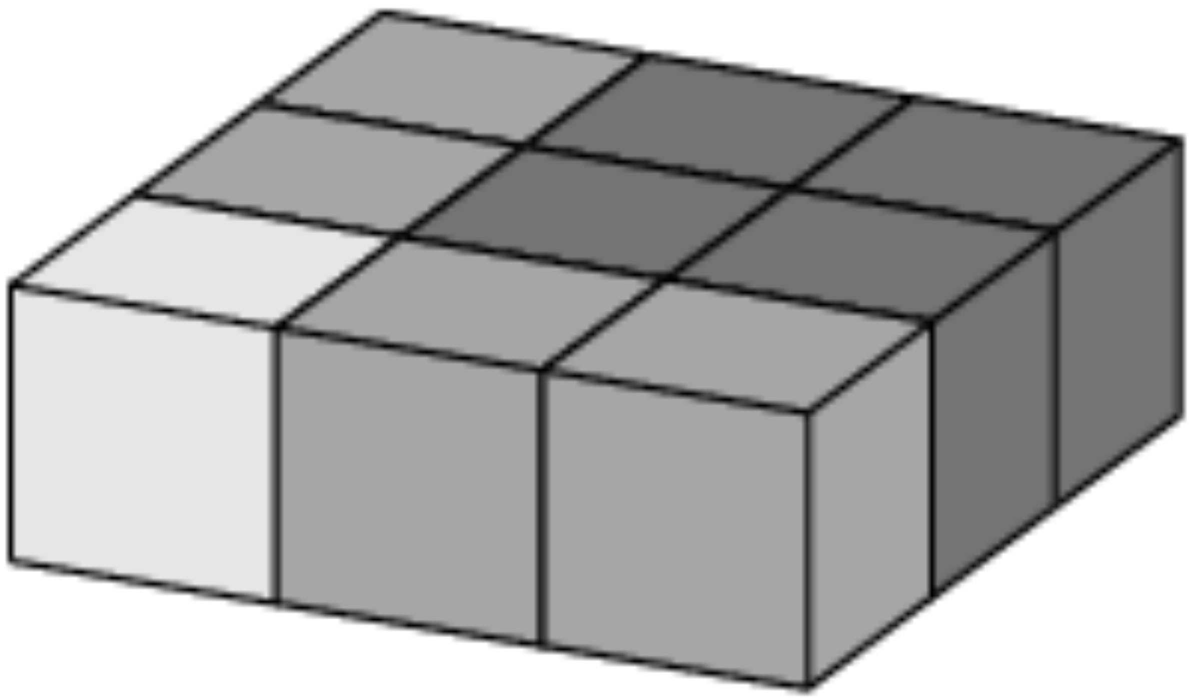
$$= (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

«Смотри!»: изобразим 1^3 и 2^3

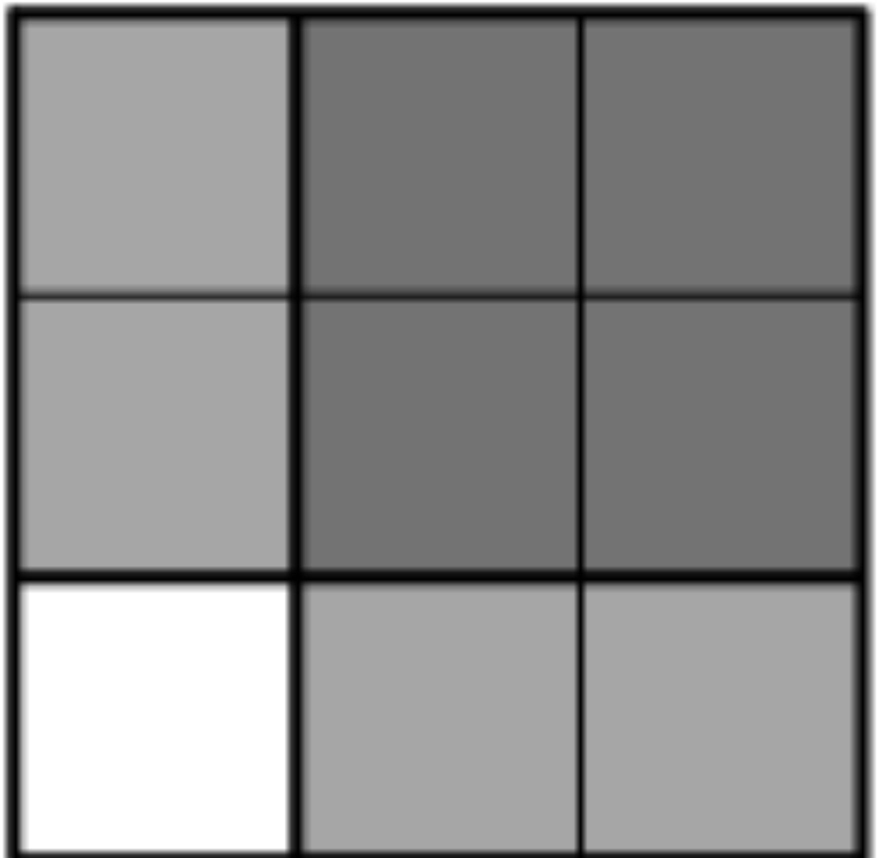




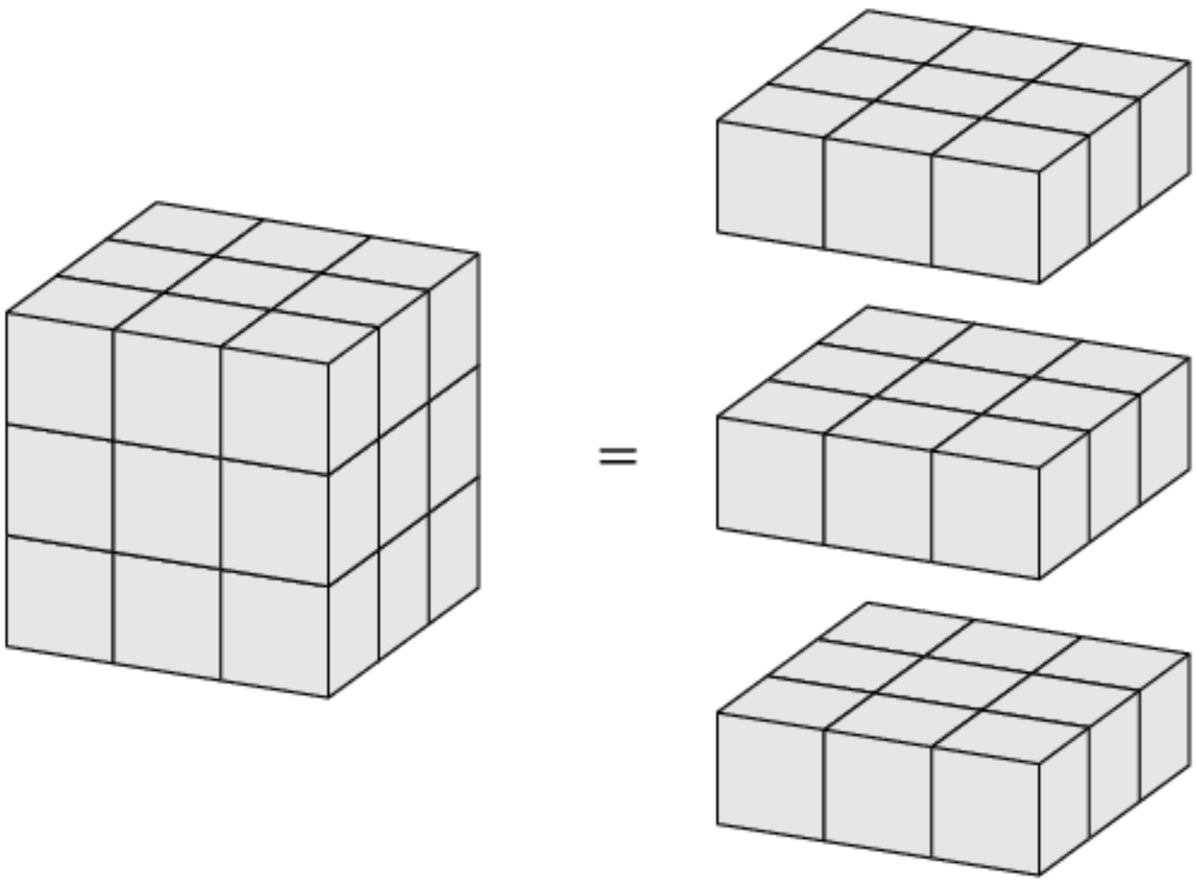
$$1^3+2^3 = ?$$



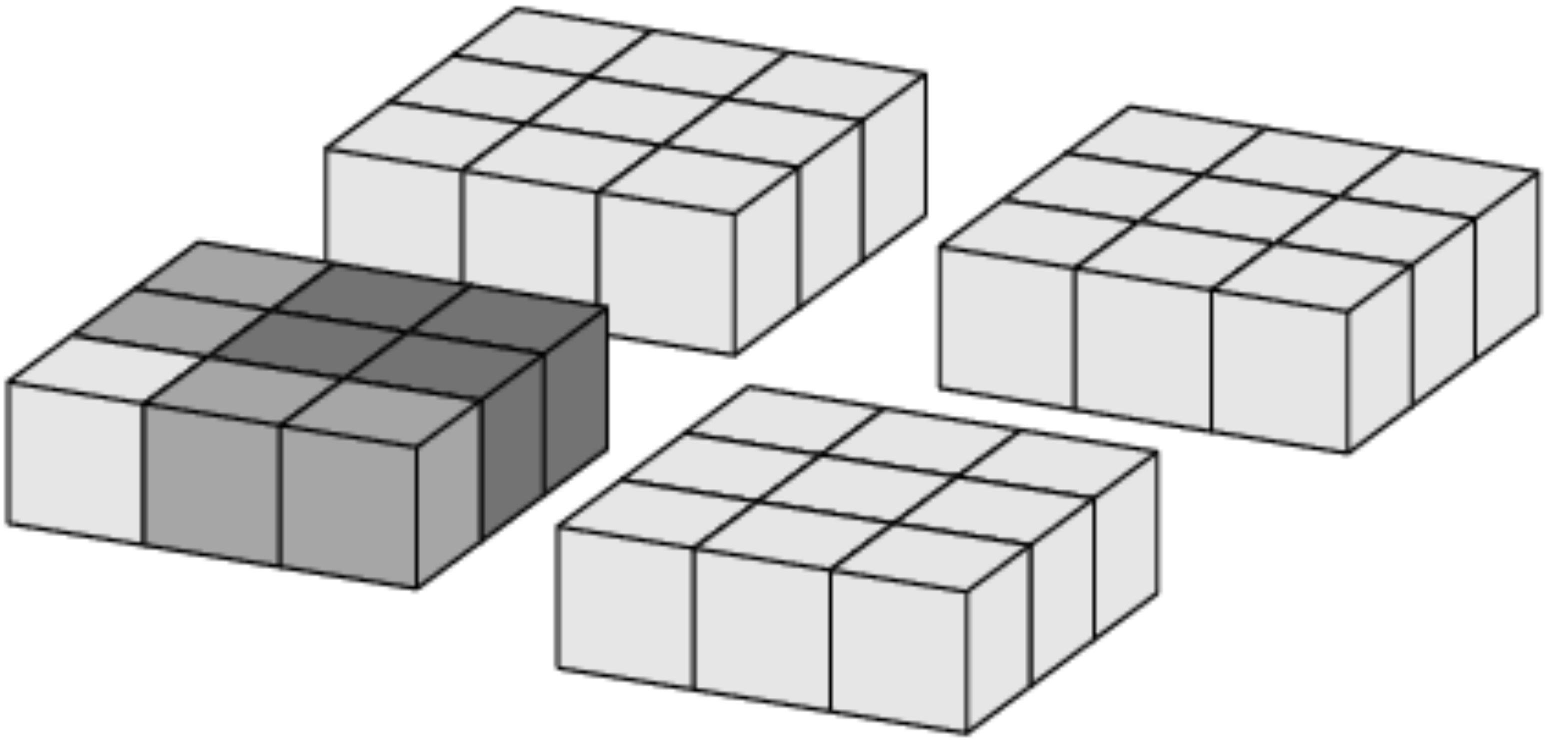
$$1^3+2^3 = (1+2)^2$$

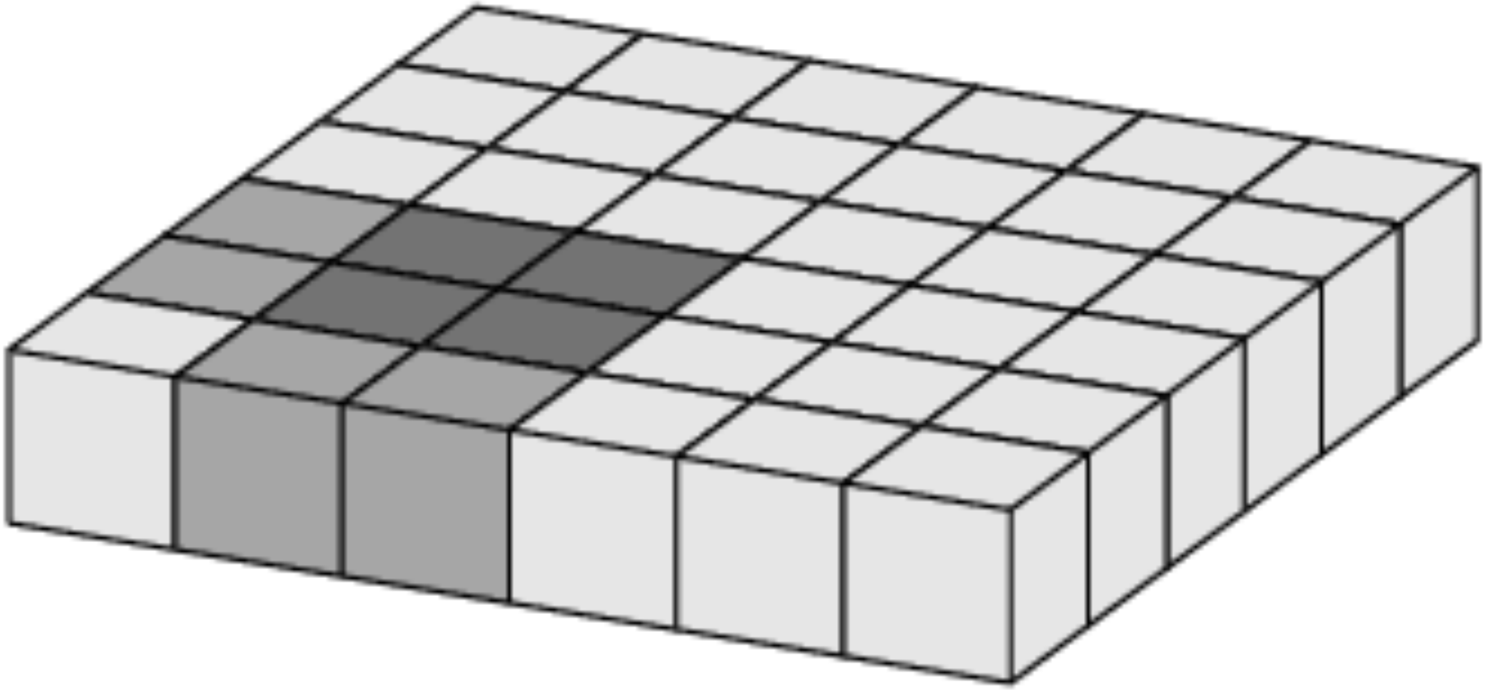


Изобразим 3^3

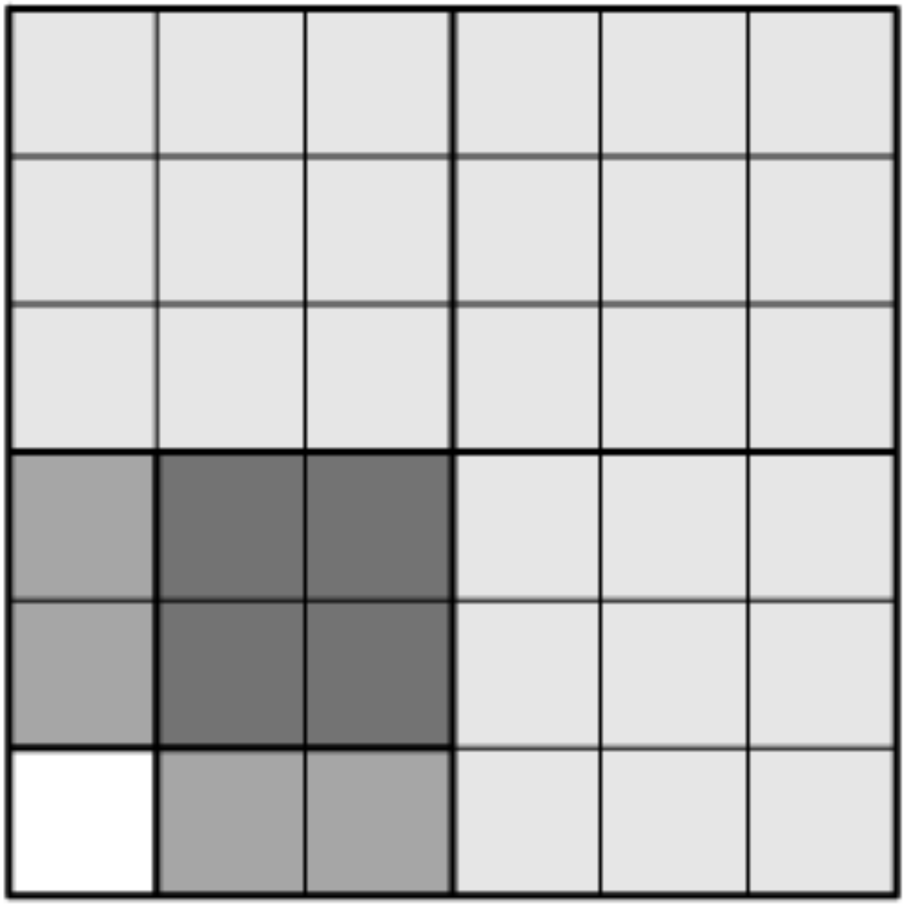


$$1^3+2^3+3^3 = ?$$

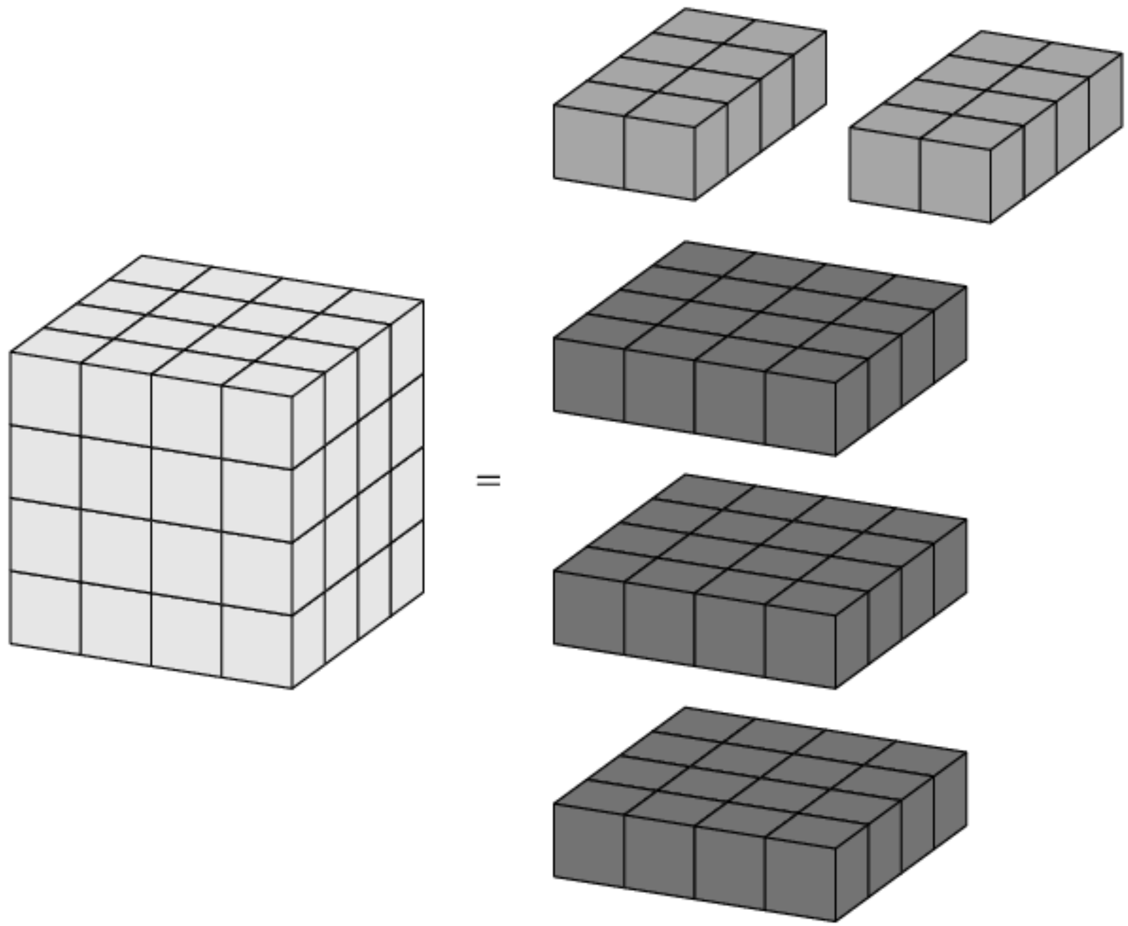




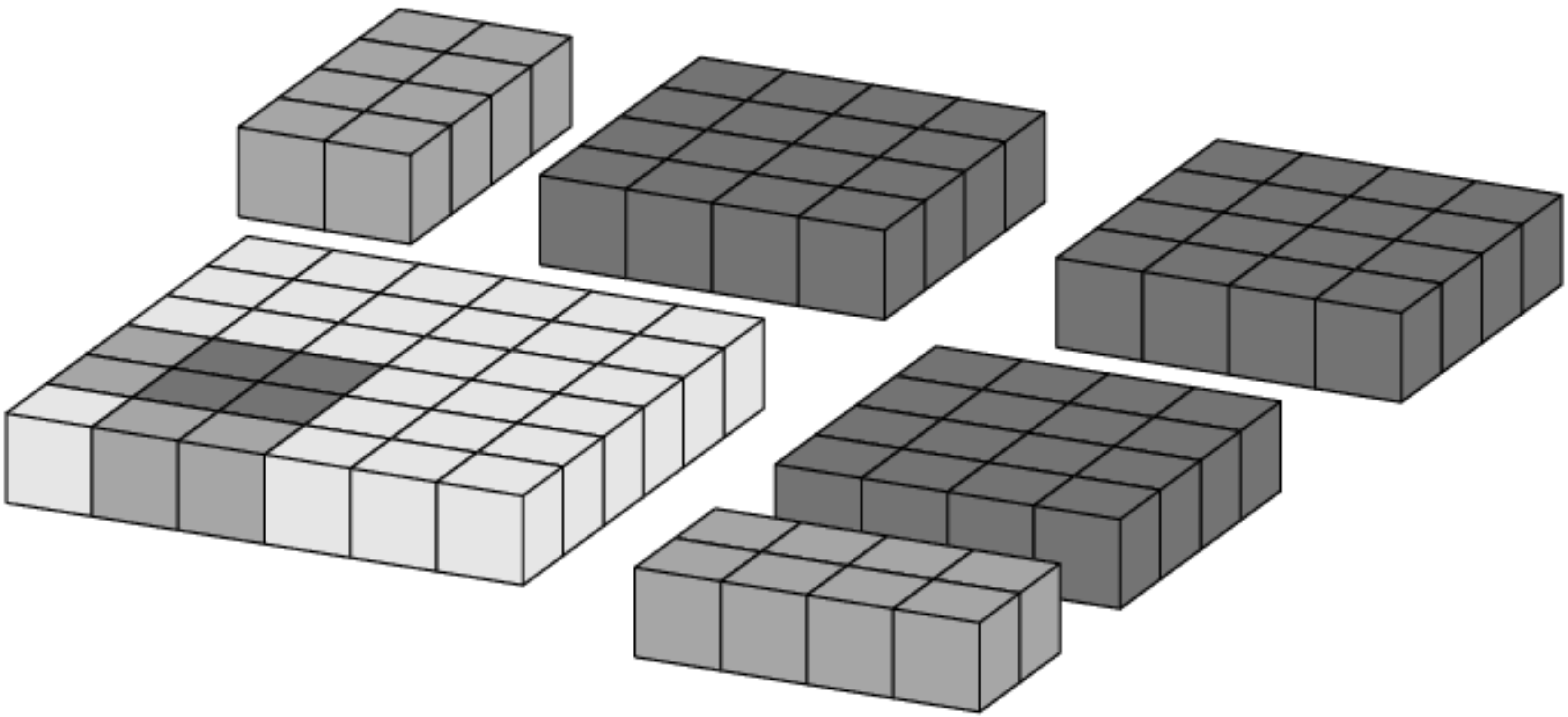
$$1^3+2^3+3^3 = (1+2+3)^3$$



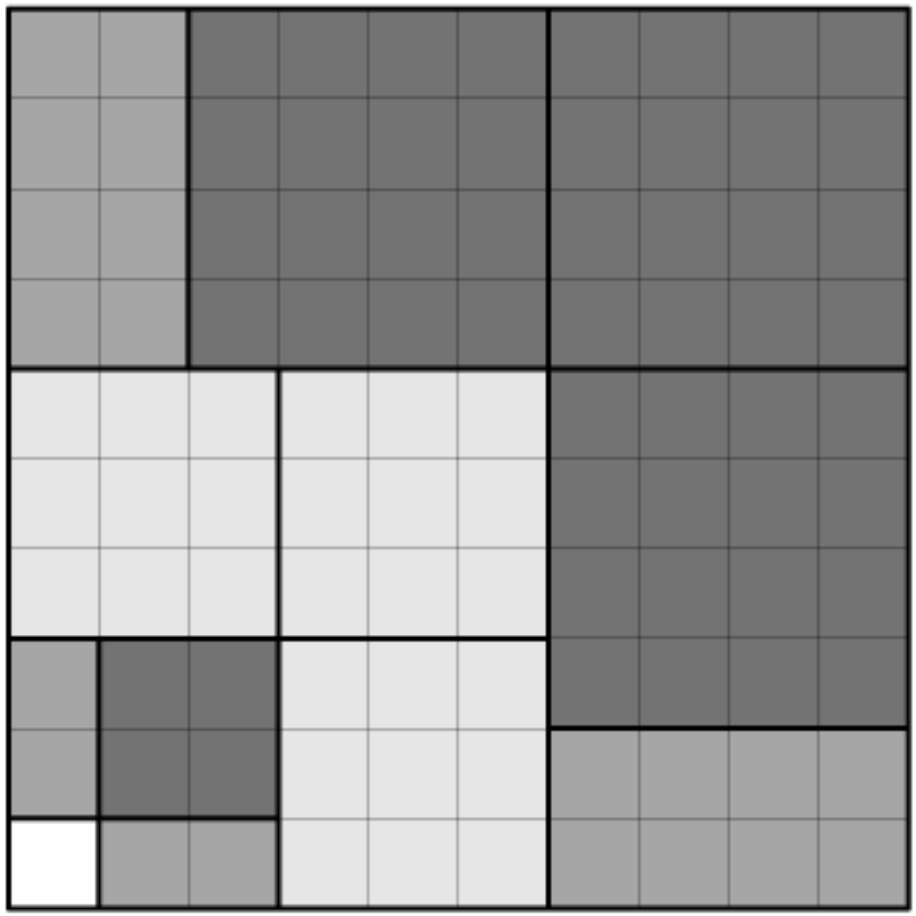
Изобразим 4^3

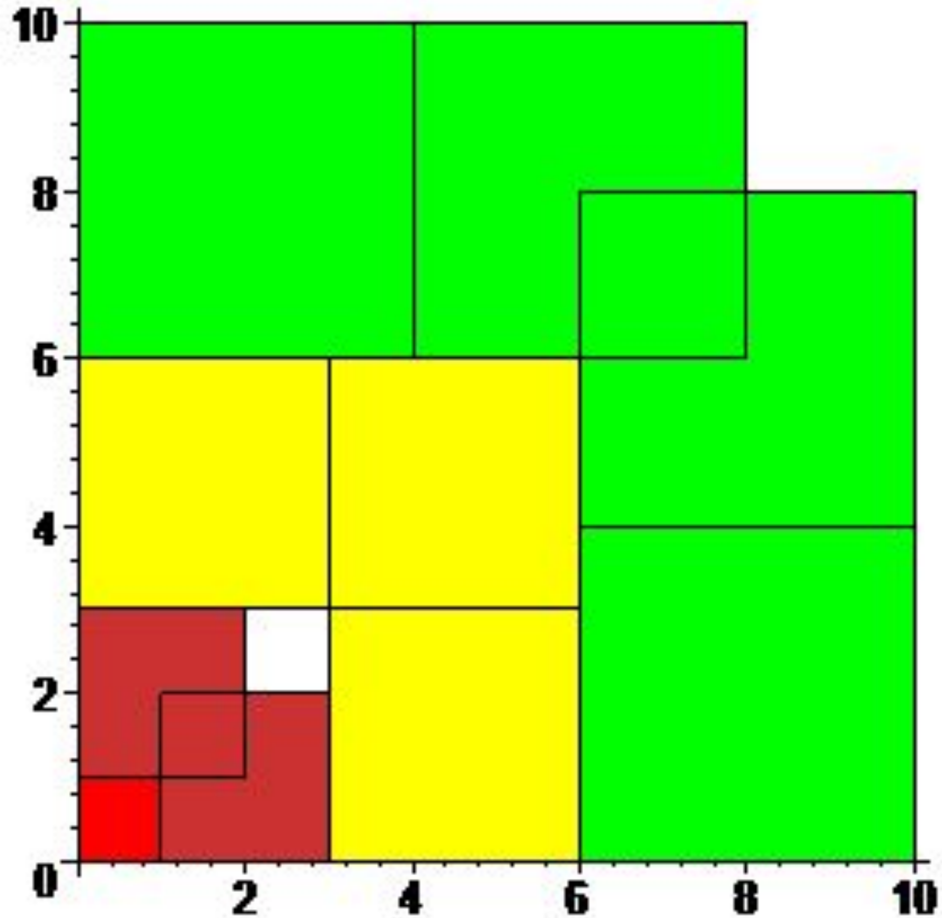


$$1^3+2^3+3^3+4^3=?$$



$$1^3+2^3+3^3+4^3 = (1+2+3+4)^2$$

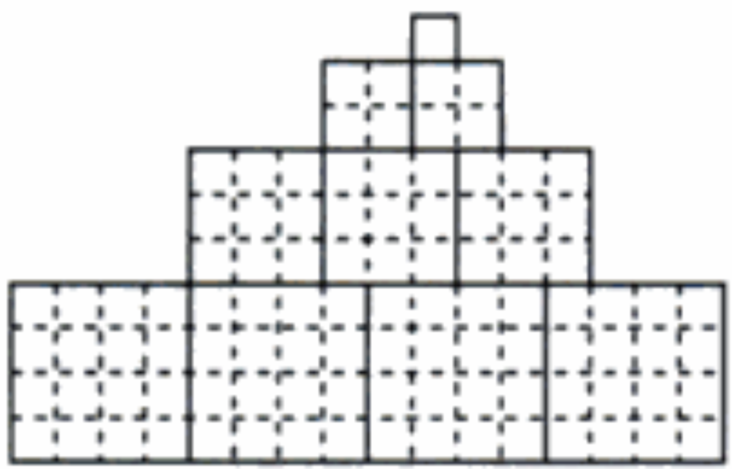


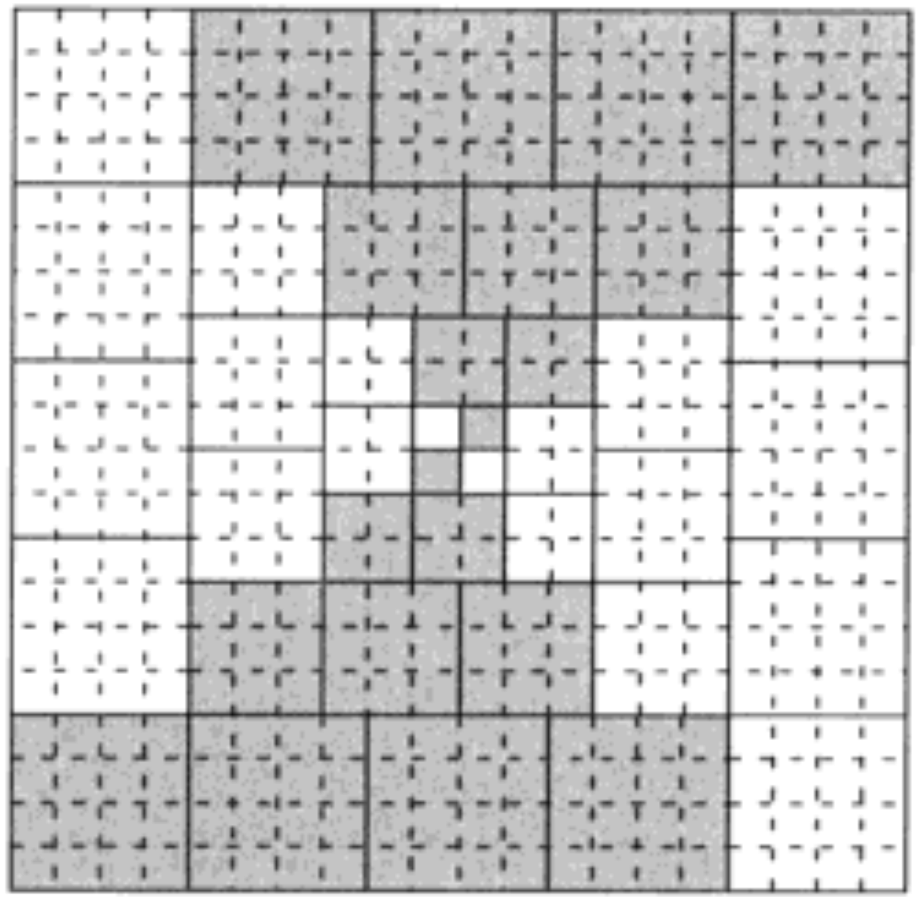


10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10

Плоское доказательство

- А) Объясните, почему в этой фигуре $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ клеток.
- Б) Сложив несколько таких фигур, докажите формулу $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}(n(n+1))^2$.





Что мы поняли (8-9 класс)

- $S_1 = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$,
- $S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$,
- $S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (n(n+1)/2)^2$.
- $S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = ?$

- $S_0 = n$,
- $S_1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n$,
- $S_2 = 1/3\, n^3 + \frac{1}{2} n^2 + 1/6\, n$,
- $S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2$.

- $x^5 - (x-1)^5 = 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$
- Запишем для x = 1, 2, …, n, и сложим почленно:

$$n^5 - 0 = 5\cdot(1^4 + 2^4 + \ldots + n^4) -$$

$$-10\cdot(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) + 10\cdot(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) -$$

$$-5\cdot(1 + 2 + \ldots + n) + (1 + 1 + \ldots + 1)$$

$$n^5 = 5 \cdot S_4 - 10 \cdot S_3 + 10 \cdot S_2 - 5 \cdot S_1 + \mathrm{S}_0$$

$$S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Свойства многочлена суммы

- S_k – многочлен от n.
- В многочлене S_k старший член имеет вид $n^{k+1}/(k+1)$, а следующий за ним (для $k>0$) имеет вид $n^k/2$.

Свойства многочлена суммы

- Для всех многочленов S_k свободный член нулю, а сумма всех коэффициентов равна 1.
- **Указание.** Подставьте в определение и выражение для S_k: $n=0$ и $n=1$.

История

- Древний мир
- Древняя Греция (Архимед)
- Интегрирование параболы
- Арабское средневековье
- Фаулхабер и Бернулли

Π 374

Литература

- Roger Nelsen, Claudi Alsina

Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics (Classroom Resource Material)

- Артамкин, Городенцев и др.

«Числа и фигуры»

- Мерзон, Ященко

«Длина, площадь, объём»