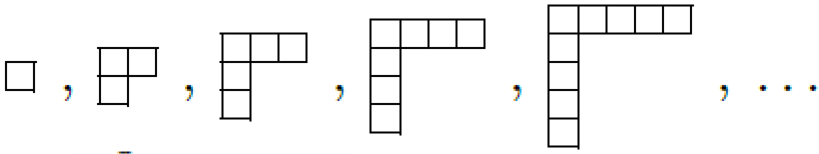
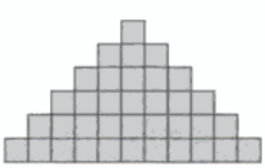
Задачи для кружка «Считаем и рисуем»

1. Объясните формулу $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

   а) складывая фигуру из уголков: 

   б) складывая несколько «треугольников»: 

2. «Нечетная лесенка». Дана цепочка равенств:

$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2,$$

$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2,$$

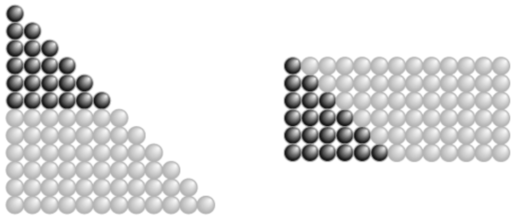
   А) Чему равна сумма $1 + 3 + \ldots + 99 + 101 + 99 + \ldots + 3 + 1$?

   Б) Напишите общую формулу и докажите ее (картинкой или используя известные формулы).

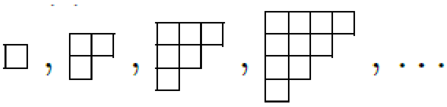
3. С помощью картинки напишите формулу для суммы:

   А) $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 + 10 + 11 + 12$,

   Б) $1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n$.



4. Числа $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, … древнегреческий математики Диофант назвал треугольными:



   Посчитайте первые несколько значений и угадайте:

   А) формулу для суммы соседних треугольных чисел $T_{n-1} + T_n$

   Б) формулу для выражения $8T_n + 1$

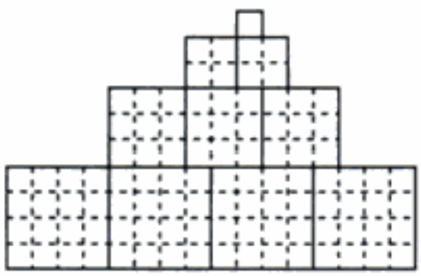
   Придумайте картинку и объясните с её помощью формулы А), Б), а также:

   В) формулу сложения треугольных чисел $T_{n+m} = T_n + T_m + nm$.

5. А) Объясните, почему в этой фигуре $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ клеток.

   Б) Сложив несколько таких фигур, докажите формулу

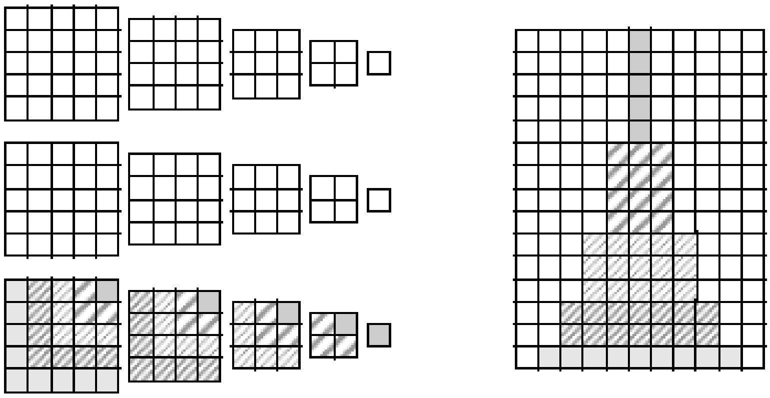
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = ¼\,(n(n+1))^2.$$



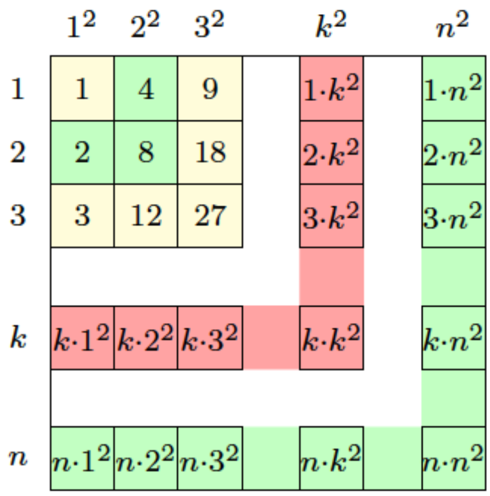
6. А) Объясните с помощью картинки формулу $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = (1+2+3+4+5)\cdot(2\cdot 5+1)$.

   Б) Нарисуйте аналогичную картинку для суммы $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \ldots$

   В) Напишите формулу для суммы $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = \ldots$



7. *Найдем S_4 еще одним способом.* На рисунке изображена таблица умножения чисел 1, 2, 3, …, n на числа $1^2, 2^2, \ldots, n^2$.
   А) Найдите сумму всех чисел в этой таблице.
   Б) Найдите сумму всех чисел, стоящих в выделенном уголке (представьте в виде многочлена от k).
   В) Выведите отсюда формулу для суммы $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.



8. Найдите формулы для *знакопеременных сумм*:
   А) $S'_1 = -1 + 2 - 3 + 4 - \ldots + 2n$,
   Б) $S'_2 = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (2n)^2$,
   В) $S'_3 = -1^3 + 2^3 - \ldots + (2n)^3$,
   Г) $S'_4 = -1^4 + 2^4 - \ldots + (2n)^4$.
   Указание. S'_1 и S'_2 легко найти, разбивая слагаемые на пары. Покажем общий способ найти S'_k через S_k:
   $$S'_k(2n) = -1^k + 2^k - \ldots + (2n)^k = -(1^k + 2^k + \ldots + (2n)^k) + 2(2^k + 4^k + \ldots + (2n)^k) =$$
   $$= -(1^k + 2^k + \ldots + (2n)^k) + 2 \times 2^k(1^k + 2^k + \ldots + n^k) = -S_k(2n) + 2^{k+1} S_k(n).$$

9. Докажите, что S'_k – многочлен от n степени k.

10. Особый интерес представляют случаи, в которых суммы степеней выражаются друг через друга без других величин. Проверьте равенства:
   $$S_3 = (S_1)^2,$$
   $$3S_3 + S_5 = 4(S_1)^3,$$
   $$S_5 + S_7 = 2(S_1)^4.$$