Сгибнев А.И.

Интерактивные модели в помощь учителю математики

(На примере коллекции живых чертежей по курсу геометрии 9 класса)

На платформе GeoGebra [1] я создал коллекцию интерактивных моделей по курсу геометрии 9 класса:

https://www.geogebra.org/m/edfut8r2

Последовательность тем, нумерация параграфов и заданий привязана к учебнику М.А. Волчкевича [2], вышедшем в 2021 году в рамках московского проекта «Математическая вертикаль», но вполне может использоваться и отдельно от него.

Этот проект является продолжением альбома подвижных чертежей к задачнику М.А. Волчкевича 7-8 классов https://www.geogebra.org/m/kyudvqfx, о котором было рассказано в статье [3].

В этой статье будет дана типология моделей и основные приёмы работы с ними. Лучше всего читать текст и параллельно манипулировать с моделями.

1. Демонстрация

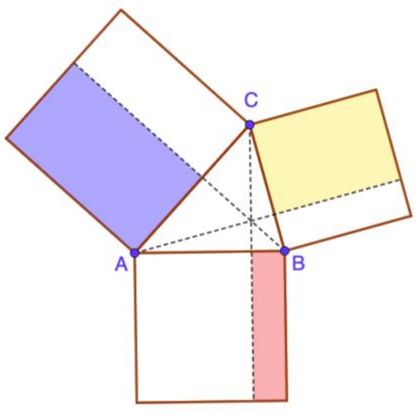
Интерактивная математическая среда позволяет сделать точный наглядный чертёж, увидеть его в динамике. Можно поменять ракурс или формы фигуры, если первоначальный чертёж неудачен. Можно настроить «шаги построения», чтобы новые элементы чертежа возникали поэтапно по щелчку «мышки» и ученики успевали вникнуть. Демонстрации рассчитаны на фронтальный показ всему классу на большом экране или проекторе.

Пример демонстрации *доказательства*: § 3 упр. 16 «Доказательство теоремы косинусов с помощью площадей».

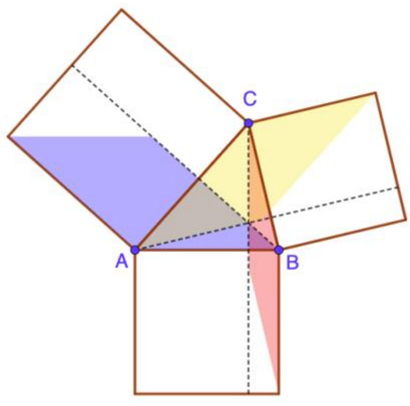
1) С помощью чертежа докажите, что в остроугольном треугольнике продолжения высот делят построенные на сторонах квадраты на три пары равновеликих прямоугольников.

Двигаем последовательно возникающие ползунки и «перетягиваем» закрашенные площади вот таким образом:

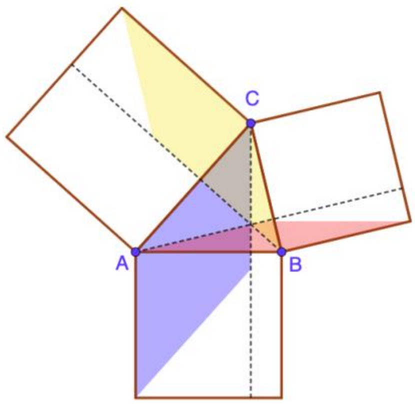
1



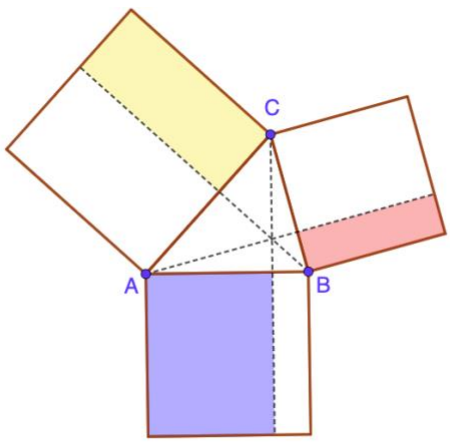
2



3



4



От набора статических картинок модель отличается тем, что мы можем увидеть сам процесс «перетягивания» площадей. Можем остановить его, вернуть, повторить трудное место, выполнить измерения или дополнительные построения (панель инструментов GeoGebra доступна в полном объёме). Таким образом, модель позволяет изучить процесс в деталях, «пощупать руками». Далее предлагается ответить на вопросы:

2*) Почему площади закрашенных четырёхугольников не изменяются на шаге 1? На шаге 2? Шаге 3?*

3) На сколько площадь нижнего квадрата отличается от суммы площадей двух верхних?

4) Выразите эту разницу через стороны BC, AC и угол C.

Выполнив эти пункты, мы получаем нетрадиционное доказательство теоремы косинусов.

Ещё пример (демонстрация *утверждения*): §6 задача 23 (теорема Монжа).

2. Знакомство с понятием. Наработка интуиции

При появлении нового понятия многим ученикам важно «прочувствовать» его, изучить динамику поведения. В коллекции есть тренажёры для того, чтобы ученики каждый на своём компьютере или смартфоне смогли поработать с ними.

Пример: §7 модель «Модуль суммы векторов».

Даны два вектора: синий с модулем a и зелёный с модулем b. Подвигайте точку и посмотрите, как меняется сумма – красный вектор. В каких границах меняется модуль красного вектора – суммы? Как векторы должны располагаться, чтобы их сумма имела наибольшую длину? а наименьшую?

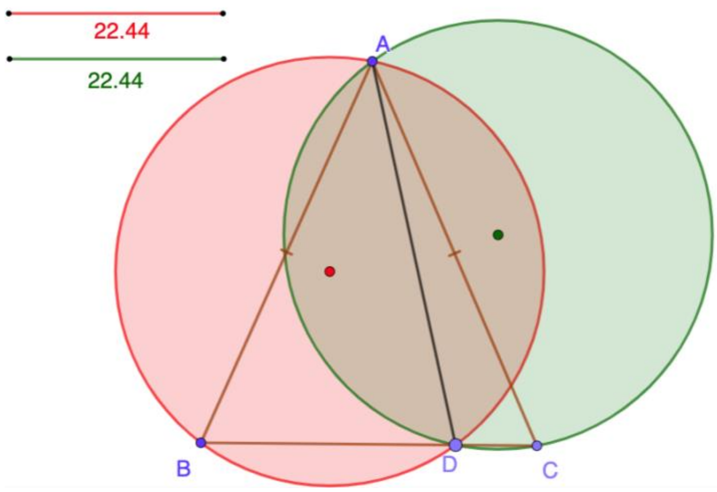
Ученик «крутит» один вектор относительно другого, наблюдает изменение длины, выбирает нужные случаи и формулирует ответ.

Ещё примеры: §7 модель «Сумма трёх равных по модулю векторов», §8 модель «Определение скалярного умножения».

3. Формулировка задачи по чертежу

Обычно задача даётся ученику в текстовом виде, а он переводит её в графический вид, строя чертёж. Полезно иногда действовать в обратном направлении, давая задание «сформулируй задачу по чертежу» (задача без слов). Динамика и поэтапное возникновение элементов позволяют постепенно научить учеников считывать с чертежа почти без слов довольно сложные утверждения.

Пример попроще: §2 задача 11. При пролистывании шагов построения поэтапно возникают равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), его чевиана AD (точка D движется по стороне BC), окружности, описанные вокруг треугольников ABD и ACD, их радиусы в виде отдельных горизонтальных отрезков. Ученику надо заметить, что эти окружности равны при любом положении чевианы AD.



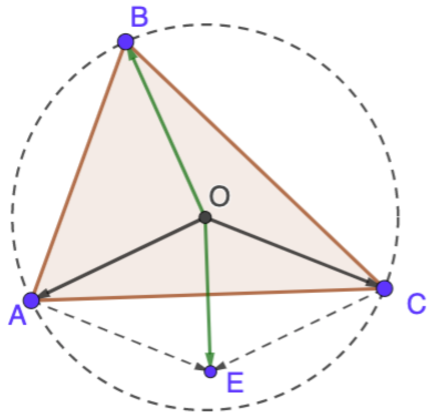
Пример посложнее: §2 задача 25.

4. Доказательство по чертежу

Учитель может рассказать доказательство теоремы или решение опорной задачи по заготовленному чертежу с поэтапно возникающими дополнительными построениями, формулами и наводящими вопросами. Такую модель можно использовать и иначе: например, с её помощью ученик повторяет материал перед зачётом или контрольной работой или даже самостоятельно с её помощью пытается доказать теорему (в последнем случае модель выступает в роли «листка» наподобие тех, которые решают в матшколах).[1]

Пример: §7 пример 7.

Точка O – центр описанной окружности ΔABC, точка H – пересечение его высот. Докажите, что сумма векторов $\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OB}+\boldsymbol{OC}$ равна вектору $\boldsymbol{OH}$.



Школьнику надо заметить по чертежу и доказать, что вектор $\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{OC}$ перпендикулярен прямой AC. В модели графически выделены основные идеи доказательства: окружность напоминает нам, что $|\boldsymbol{OA}|=|\boldsymbol{OC}|$ как радиусы, а отрезки AE и EC — что сложение векторов удобно произвести по правилу параллелограмма (а в данном случае ромба).

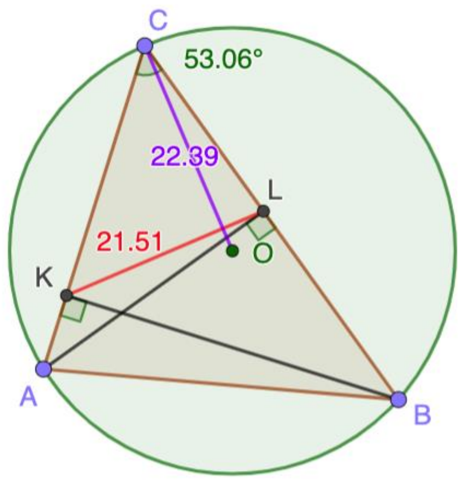
Ещё модели: §11 примеры 1, 4, 9, 10.

5. Подсказка к ответу

Точный чертёж позволяет угадать ответ к задаче «методом пристального вглядывания». А когда знаешь ответ, то решать задачу гораздо легче, хотя бы психологически.

Пример: §2 задача 22. *Отрезок, соединяющий основания двух высот треугольника, равен радиусу описанной вокруг него окружности. Найдите угол между теми сторонами треугольника, к которым проведены данные высоты.*

Ученик двигает вершины A и B треугольника, добивается равенства длин отрезков OC и KL и понимает, что это происходит при градусной мере угла ACB, равной 45°.



---

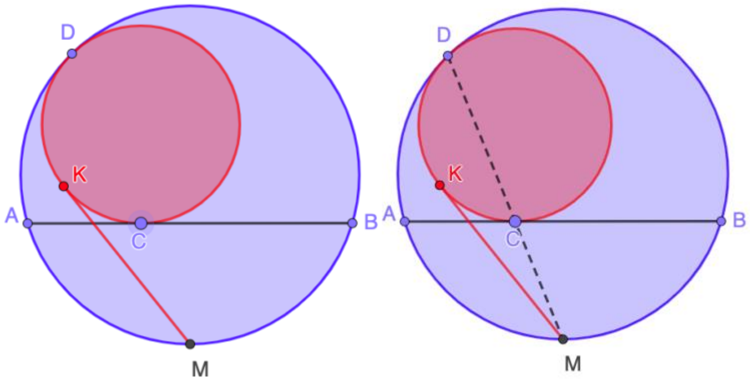
[1] В такой технике можно оформлять и готовые доказательства теорем или решения задач (см. альбом Павла Воронина «Все задачи ОГЭ на окружности» https://www.geogebra.org/m/xrqxq4zt), но в данной коллекции этого нет.

Ещё пример: §1 [задача 36](#).

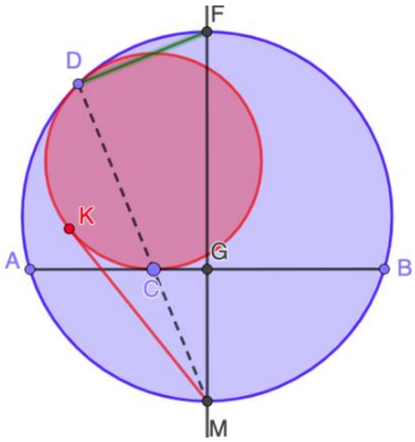
6. Подсказка к решению

Точный чертёж иногда помогает заметить вспомогательный факт, который не даёт ответ прямо, но позволяет решить задачу.

Пример: §6 [задача 38](#). *Хорда AB разбивает круг на два сегмента. В один из них вписали произвольную окружность. Докажите, что длина касательной к этой окружности, проведённая из середины дуги другого сегмента, не зависит от выбора вписанной в сегмент окружности.*

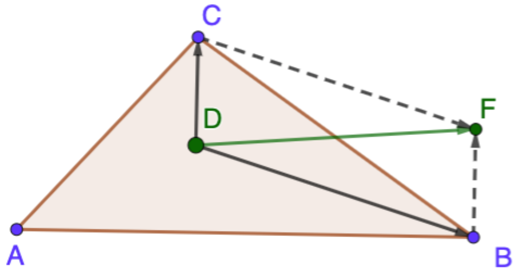


Ученик варьирует вписанную окружность и замечает, что точки M, C, D всегда остаются на одной прямой[2]. Это ключ к решению задачи. Теперь можно понять, что по теореме о квадрате касательной $MK^2 = MC \cdot MD$, а в силу подобия прямоугольных треугольников MCG и MFD верно равенство $MC \cdot MD = MG \cdot MF = const$ — не зависит от вписанной окружности.



Ещё пример: §7 модель «[Ищем точку в треугольнике](#)». *В произвольном треугольнике ABC постройте такую точку D, что сумма векторов $\boldsymbol{DA} + \boldsymbol{DB} + \boldsymbol{DC}$ равна $\mathbf{0}$.*

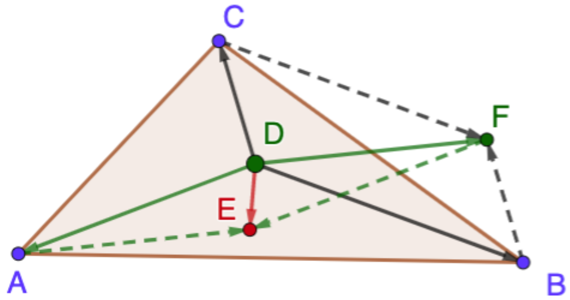
Сначала складываем два вектора $\boldsymbol{DB}$ и $\boldsymbol{DC}$ по правилу параллелограмма (это важно для решения) и замечаем, про при шевелении точки D середина отрезка DF остаётся неподвижной (так как она совпадает с точкой M — серединой отрезка BC).



---

[2] Это лемма Архимеда, её можно доказать через подобие треугольников DMO и DCO_1, где O – центр большой окружности, O_1 – центр малой

Далее складываются векторы $\boldsymbol{DA}$ и $\boldsymbol{DF}$ и нам надо движением точки D добиться превращения их суммы в $\boldsymbol{0}$. Нетрудно понять, что это происходит, когда D лежит на медиане AM. А кто сразу не понял, может подвигать, увидеть, а потом доказать.



Эта же идея группировки векторов и поиска неподвижных точек развивается в следующей модели (§7 задача 34, которую без модели, «на бумаге», школьники решают с большим трудом).

7. Проверяем/открываем/опознаём теорему

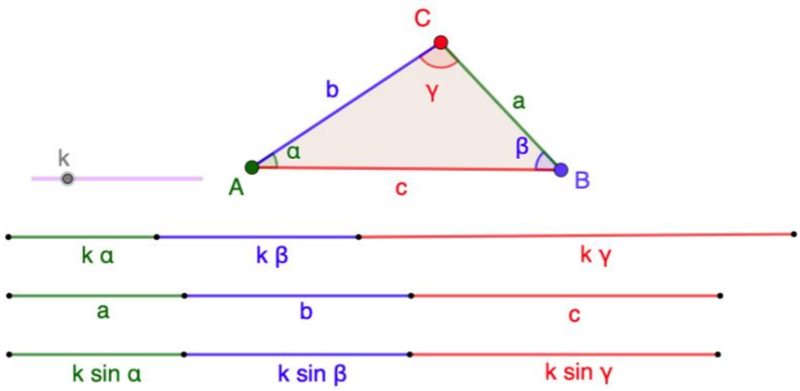
Учителя знают, что перед тем, как формулировать и доказывать новую теорему, полезно актуализировать контекст: например, вспомнить частный случай, который будет обобщён этой теоремой (как теорема косинусов обобщает теорему Пифагора, см. §3 модель «Готовимся к теореме косинусов») и попросить угадать формулировку для общего случая. Или же высказать естественное, но неверное предположение и попросить опровергнуть его, приведя контрпример (например, перед формулировкой теоремы синусов предположить, что стороны треугольника пропорциональны его углам), и т.д. Такой разговор готовит почву для лучшего запоминания и осознания теоремы, и жалеть на это времени не стоит. Интерактивные математические среды позволяют пойти ещё дальше и сделать так, что подготовленный ученик самостоятельно с помощью модели откроет и сформулирует новую, даже непростую, теорему.

Пример: §2 модель «Проверяем теорему синусов для треугольников». *Пропорциональны ли стороны треугольника его противолежащим углам? Пропорциональны ли они синусам противолежащих углов? Подберите нужный коэффициент k, двигая ползунок. Измените треугольник и подберите коэффициент ещё раз.*

Предлагаются две конкурирующие гипотезы. Для произвольного неравнобедренного треугольника проверяем, что можно подобрать значение параметра k, такое что

$$a = k\sin\alpha, \qquad b = k\sin\beta, \qquad c = k\sin\gamma$$

(уравняв три пары отрезков), а с углами такого проделать не удаётся.



Пример: §2 модель «Открываем теорему синусов для хорд».

Первый шаг. Окружность переменного радиуса проходит через две фиксированные точки B и C. На экран выведены следующие величины: радиус окружности R, угол $\angle BAC = \alpha$, $\sin\alpha$, $2R\sin\alpha$. Ученики замечают, что все они изменяются, кроме последней.

Второй шаг. Окружность зафиксирована, точка A «бегает» по ней. Надо объяснить, почему $2R\sin\alpha$ постоянно в этом случае. Это легко: R постоянно, α в силу теоремы о вписанном угле постоянно на каждой из двух дуг BC, а синусы углов, дополняющих друг друга до 180°, равны.

Третий шаг (подсказка). Поскольку $2R\sin\alpha$ не зависит от положения точки A на окружности, выберем удобное расположение точки A: пусть BA будет диаметром. Тогда угол BCA прямой как опирающийся на диаметр, и верно равенство

$$BC = AB \cdot \sin\alpha = 2R\sin\alpha.$$

Теперь всё ясно: при движении окружности на первом шаге точки B и C не двигались, поэтому $BC = const$ и величина $2R\sin\alpha$ не изменялась.

Замечание. Пришлось придумать специальную конструкцию, которая позволяет визуализировать теорему синусов для хорд. Это позволяет «придать интригу» этому факту. Однако есть риск, что школьники в результате запомнят не саму теорему, а процесс поиска, подвижную окружность и прочий необязательный антураж. Может быть, лучше давать эту модель (как и две следующие) ***после*** формулировки и доказательства самой теоремы, как пример её нестандартного применения.

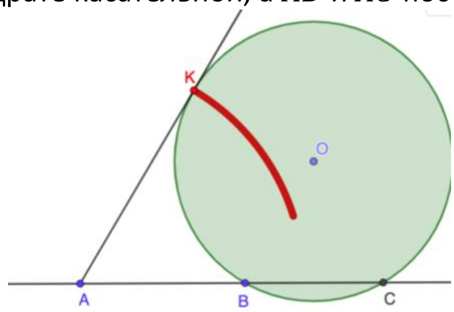
Другие примеры: §5 модели «Открываем новую теорему вместе» (теорема Менелая), «Опознайте теорему» (теорема Чевы).

8. Новая задача.

Динамические чертежи позволяют вводить в оборот новые неожиданные задачи с запоминающимся результатом, которые без динамики выглядели бы скучно и искусственно.

Пример: §6 модель «Ищем ГМТ». *Рассмотрим все окружности с данной хордой BC и касательные к ним, проходящие через данную точку A (K – точка касания). На какой линии лежат все точки K?*

Сначала точка K пробегает по экрану без следа, и школьники могут высказать свои догадки. Затем кнопкой включаем след точки, траектория становится наглядной и гипотезу можно уточнить: все точки K лежат на окружности с центром в точке A. Достаточно доказать, что AK постоянно. Однако $AK^2 = AB \cdot AC$ в силу теоремы о квадрате касательной, а AB и AC постоянны.

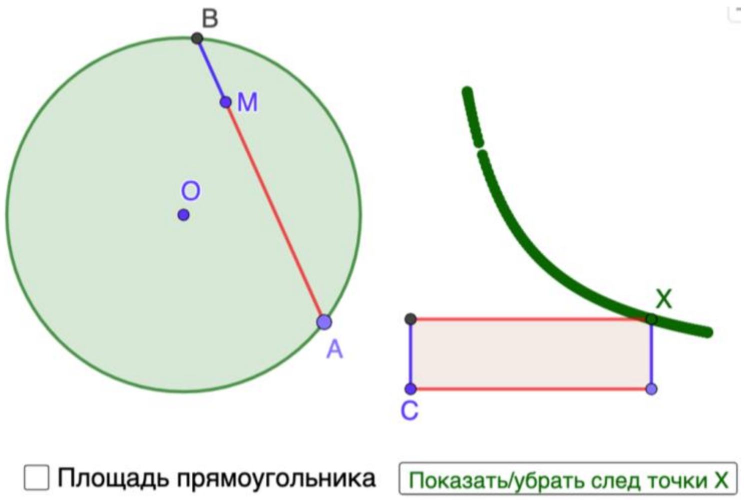


Пример: §6 модель «Демонстрация хорд». *Рассматривают все хорды AB, проходящие через данную точку M данной окружности. От данной точки C строят прямоугольники, стороны которых равны MA и MB.*

а) Как меняется площадь прямоугольника?

б) На какой линии лежит противоположная от C вершина прямоугольника X?

Площадь прямоугольника оказывается постоянна. Траекторию точки X, как и в предыдущей задаче, полезно сначала угадать (ученики предлагают и прямую, и параболу), а затем построить кнопкой. Это будет гипербола, асимптоты которой лежат на продолжении сторон прямоугольника с вершиной C.



Затем можно вынести точку M за пределы круга и посмотреть, что изменится. В обоих случаях обыгрывается тот факт, что произведение $AM \cdot BM$ не зависит от выбора хорды или секущей. Предложены две визуализации – с площадью прямоугольника и с функциональной зависимостью (обратной пропорциональностью). Особенно впечатляет возникновение гиперболы в простой задаче классической планиметрии.

Замечание. Д.А. Калинин отметил, что те модели, в которых какая-то величина оказывается неизменной, могут показаться нечестными, поскольку все операции произведены заранее. Больше доверия вызывает модель, которая строится прямо на уроке на глазах у школьников. Строить модели «на лету» удобнее не в программе GeoGebra, а в программе Математический Конструктор [4].

Техника

• *Для коллективного обсуждения* модели можно показывать на проекторе или панели в аудитории, а также делать демонстрацию экрана на дистанционном уроке.

• Ссылку на каждую модель можно выдавать ученикам *для самостоятельного изучения* с последующим устным обсуждением или фиксацией результатов в тетради.

• Кнопка ‘Create lesson’ в правом верхнем углу экрана позволяет каждую модель превратить в *классное или домашнее задание* для учеников. GeoGebra Class показывает учителю в режиме реального времени, какие манипуляции с моделью проделывает каждый ученик на своём экране, а также собирает текстовые ответы.

• Интеграция с системой Google Класс позволяет выдавать и проверять прямо в этой системе *домашние задания*, сделанные в GeoGebra.

Модели можно свободно копировать, достраивать, редактировать, что позволяет учителю доработать эти заготовки под свои нужды.

Для поддержки альбома имеется группа в телеграме [5]. Подробнее об общих принципах динамической геометрии можно прочитать в книге [6], там же есть сценарии восьми готовых занятий для учеников 6-10 классов.

Автор благодарен М.А. Волчкевичу, В.Н. Дубровскому, Г.А. Мерзону, Н.М. Нетрусовой, А.В. Шкловеру, участникам группы [5]. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-29-14217.

Литература

[1] GeoGebra http://geogebra.org/classic/geometry

[2] Волчкевич М.А. Геометрия 9 кл. М., Просвещение, 2021.

[3] Сгибнев А.И. Альбом подвижных чертежей для обучения геометрии, Математика, 2020, № 8, сс. 9-11, 22.

[4] Математический Конструктор https://urok.1c.ru/constructor/mathkit/1c/

[5] Группа «Динамическая геометрия» https://t.me/joinchat/R9GfuudXr_DA6NLw

[6] Сгибнев А.И. Геометрия на подвижных чертежах, М., МЦНМО, 2019.