Глава 5. Знакомство с окружностью. Построения. Геометрическое место точек.

Встреча с вопросом порождает желание узнавать новое. Правда, при выполнении двух условий: вопрос должен быть понятен, а ответ - неизвестен.

Хуже всего - когда вопрос еще не понятен, а ответ уже кажется известным:

- *(Учитель читает задание из учебника)* Через данную точку плоскости проведите прямую перпендикулярную данной.
- *(Ученик)* Ой, а тут картинки нет! Так и должно быть?
- Да, все верно.
- А как это тогда, данной? То есть самому надо точку и прямую нарисовать?
- Нет, не совсем, это значит, что нужно решить задачу для любой точки и прямой, описать общий алгоритм.
- То есть рисовать не надо?
- Нет, рисовать, конечно, надо, но… Ладно, давай пока считать, что данная - это нарисованная.
- А, тогда понятно. Это очень легко сделать по клеточкам.
- Имеется в виду на белой бумаге.
- Тогда с помощью угольника.
- Помнишь, мы обсуждали, что можно использовать только циркуль и линейку?
- Тогда давайте приложим угол линейки к прямой…
- Линейка у нас тонкая, без углов.
- Где вы такие линейки видели? Ну тогда совместим деление линейки с прямой, а саму линейку…
- И без делений.
- ...

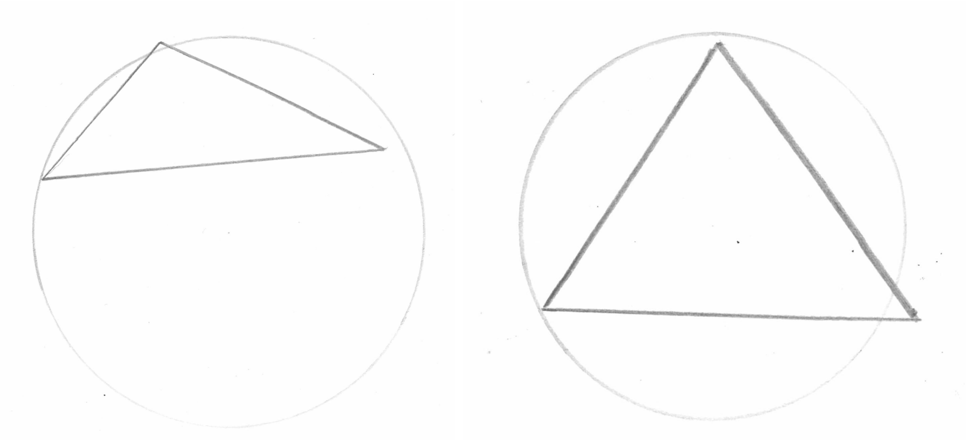
Объяснить, что значит “данный”, чем можно пользоваться и какие операции можно производить циркулем и линейкой чуть ли не труднее, чем собственно решить задачу. Главная же сложность - объяснить, к чему вообще все эти ограничения. Зачем мучиться с циркулем и какой-то несуществующей линейкой, если перпендикулярную прямую проводит угольник?

Есть ли у нас самих твердый ответ на этот вопрос? Да, Древние Греки решали задачи только циркулем и линейкой, но не все же традиции мы наследуем из Древней Греции.

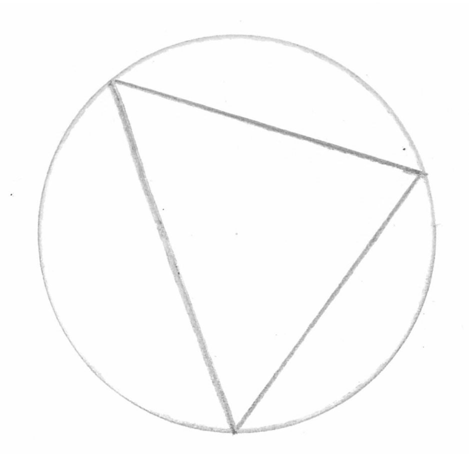
Предлагая ученикам задачи на построение мы вынуждены спрашивать себя: “Зачем мы действительно предлагаем задачи на построение? Какую цель преследуем? Как мы объясним эту цель ученикам? Может быть, задачи на построение вообще не нужны?”

Посмотрим на три ситуации, в которых ученикам бы пригодились навыки построения.

> **Ситуация первая.** Для решения задачи потребовалось нарисовать треугольник, вписанный в окружность. Ученики стараются, но окружность никак не желает пройти через все три вершины треугольника.

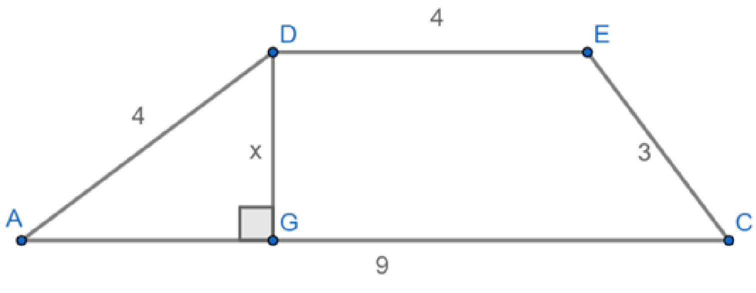


“Вы поменяйте порядок действий,” - подсказывает учитель: “нарисуйте сначала окружность, а уже потом начертите треугольник.” Чертежи тут же получаются.

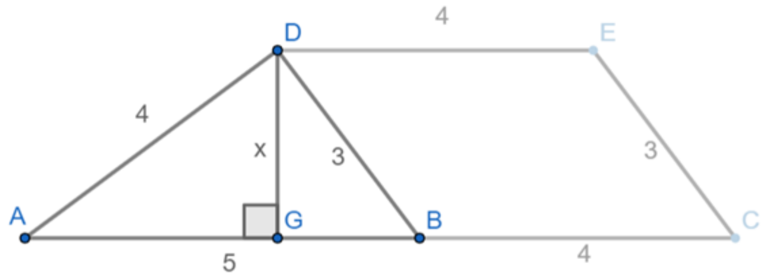


Элементы чертежа нельзя рисовать в произвольном порядке. Один из навыков, приобретаемых в задачах на построение - правильно определять порядок шагов создания чертежа. Если ученик овладел этим навыком, то у него будут получаться более качественные чертежи. С качественным чертежом будет легче решить задачу.

Ситуация вторая. Класс решает задачу: найти высоту трапеции с основаниями 4 и 9 и боковыми сторонами 4 и 3. Задача не решается и учитель обращается к опыту построения трапеции по ее сторонам.



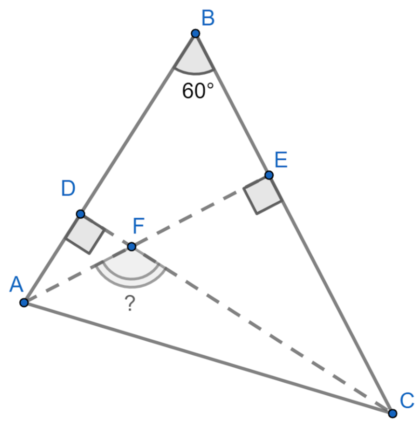
“Смотрите, в трапеции известны стороны. Как бы вы ее строили, если бы хотели получить максимально точный чертеж?” - спрашивает учитель. “Сначала бы построили треугольник из боковых сторон и разности оснований, а затем пристроили параллелограмм.”



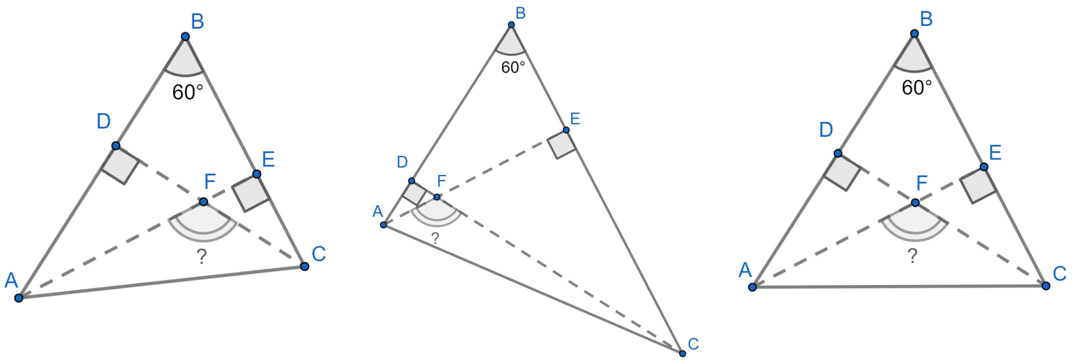
Теперь идея решения стала понятной: нужно найти высоту в треугольнике со сторонами 3, 4 и 5. Он, кстати, оказался прямоугольным.

Часто понять, как построен чертеж - это решить половину задачи. Пока строишь чертеж, открываешь для себя новые свойства. Иногда построение чертежа даже может навести на идею дополнительного построения.

Ситуация 3. Ученик ищет угол между высотами в треугольнике, в котором известен только один из углов. Через некоторое время он обращается за помощью к учителю.



- Извините, у меня получилось, что угол при вершине A - 60°. Но я что-то запутался и не уверен, что это правильно
- Погоди, а разве ты можешь его найти? Тебе же известен всего один угол треугольника, остальные могут быть какими угодно. Вот смотри:



- Посмотри внимательно на чертежи: какие углы не меняются?
- Кажется, BAE и BCD. Попробую поискать их.

В геометрии конструкции можно условно поделить на жесткие (которые однозначно заданы своими свойствами, двигать в них ничего нельзя) и нежесткие (которые можно менять, не нарушая свойства). Работая с задачами на построение, ученики начинают чувствовать, какие длины и углы определены однозначно (и, значит, их можно найти), а какие подвижны[1].

Во всех трех ситуациях решалась обычная геометрическая задача, а задача на построение возникала в процессе решения. Построения помогали создать качественный чертеж, сделать дополнительное построение и проверить решение на правильность. Мы решали привычную задачу, а для ее решения нам требовались новые идеи. Ровно эта ситуация описана в начале главы: вопрос понятен, а ответ неизвестен.

В этой главе я покажу, как ставя перед учениками понятные задачи раскрыть все основные навыки в задачах на построение. Создавая качественный чертёж к задаче, они приобретут навык описания алгоритма построения и познакомятся с идеей анализа чертежа. Рисуя картинки по образцу, узнают все основные геометрические места точек. Наконец, оглядываясь назад, мы проанализируем все известные нам построения и поймем, что для их выполнения было достаточно всего двух инструментов: циркуля и линейки. Но прежде всего нужно познакомиться с окружностью и привыкнуть к ней.

Знакомство с окружностью

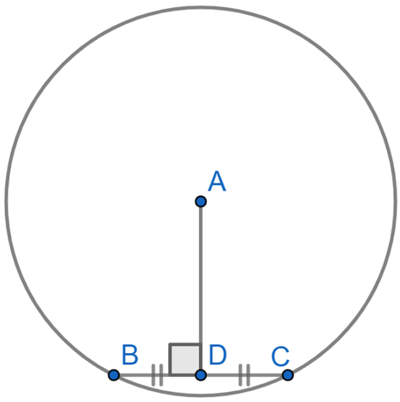
Сложность: базовая

Давайте рассмотрим задачу, которая без определенной подготовки вызывает недоумение у учеников, и попробуем понять, в чем ее трудность.

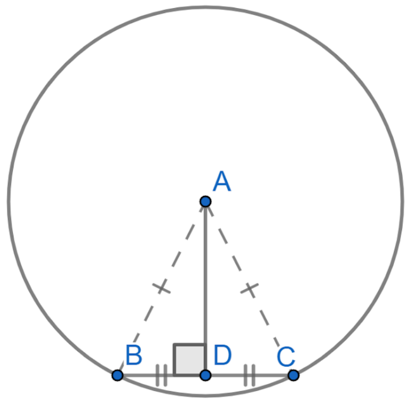
> **Задача.** Из центра окружности на хорду опустили перпендикуляр. Докажите, что основание перпендикуляра разделило хорду пополам.
>
> **Решение.** Посмотрим на чертеж и сделаем дополнительное построение: проведем радиусы к концам хорды. При этом образовался равнобедренный треугольник.
> В этом треугольнике перпендикуляр является высотой, а, значит и медианой. Следовательно, точка D делит хорду BC пополам.

---

[1] Особенно помогает работа в программах динамической геометрии.



Чертеж без дополнительных построений



Чертеж с дополнительными построениями

В этой задаче две трудности. Первая техническая: решая задачу мы не остаемся внутри темы, а вынуждены использовать теоремы из других тем.

Вторая трудность смысловая. Посмотрим на первый чертеж без дополнительного построения. На нем перпендикуляр весит как бы в воздухе: не понятно, что с ним делать. Для того, чтобы начать работать, нам пришлось сделать дополнительное построение. Но почему мы сделали такое построение? Потому что мы вспомнили определение окружности:

> **Определение.** Окружность - множество точек, находящихся на заданном расстоянии от данной точки. Эта точка называется центром окружности.

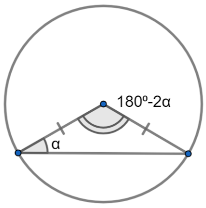
Работать с равнобедренным треугольником легко: только нарисовал его и сразу бросаются в глаза свойства: и углы при основании равны, и высота ровно посередине треугольника. С окружностью все обстоит сложнее: смотришь на нее и видишь только что-то круглое. Например, при обсуждении определения происходит такой диалог:

> ***Учитель*** *рисует окружность и просит дать ее определение.*
>
> **Ученики:** Окружность - это кривая без углов.
>
> ***Учитель*** *рисует произвольную гладкую кривую.*
>
> **Ученики:** Нет, ну симметричная фигура без углов!
>
> ***Учитель*** *рисует овал.*
>
> **Ученики:** Не сплюснутый овал! Совсем симметричная!
>
> **Учитель:** Как это: совсем симметричная? Вспомните, а как вы рисуете окружность?
>
> **Ученики:** Циркулем! Ставим иглу в центр и крутим.
>
> **Учитель:** Заметьте, что при этом раствор циркуля не меняется. Тогда расстояние от иглы до карандаша всегда…
>
> **Ученики:** будет одинаковым. То есть все точки на окружности всегда на одинаковом расстоянии от центра.
>
> **Учитель:** Верно. Давайте окончательно сформулируем определение окружности...

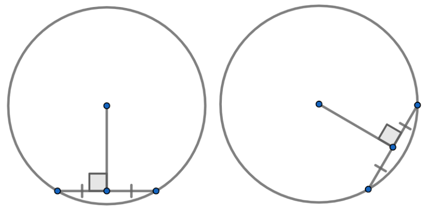
Окружность - абстрактная кривая, с которой приходится работать по определению. Это всегда психологически трудно, особенно пока радиусы не проведены. Я ярко помню это ощущение: смотришь на задачу, а в голове только крутится: “Как это вообще можно доказать?” Пока не спросишь себя: “А что мне, собственно, дано?”, задачу не решишь.

Цель знакомства с окружностью в первую очередь пропедевтическая: снять страх перед новым объектом, научить превращать этот страх в проведение радиусов. Ничего страшного, если не запомнятся отдельные факты: к ним можно вернуться в восьмом классе. Важно общее умение работать с окружностью.

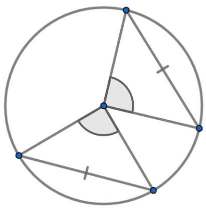
Тем не менее конструкций, с которыми можно работать в этой теме также предостаточно. Я не буду приводить здесь конкретные задачи[2], но покажу основные конструкции с комментариями, что на них можно обсуждать. Что включать в уроки - зависит от класса. Необходимый минимум - первые три чертежа.



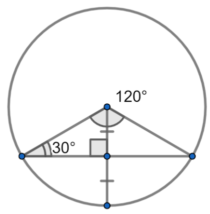
Равнобедренный треугольник в окружности.
Базовая конструкция. Совершенно не обязательно находить углы этого треугольника в общем виде, достаточно решать задачу в конкретных числах.



Радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
Конструкция понятная, пока она расположена симметрично, но стоит повернуть и заметить ее намного труднее. Полезно решить и прямую, и обратную задачу.

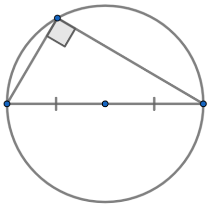


Равные хорды видны из центра окружности под равными углами.
Здесь также можно обсуждать и прямую и обратную задачу

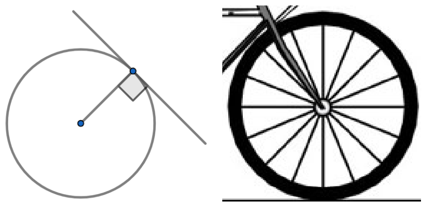


Серединный перпендикуляр к радиусу виден из центра под углом 120°.
Сложная конструкция, к которой нужно предварительно вспомнить теорему об угле в 30 градусов. Отличная возможность вернуть теорему в оперативную память.

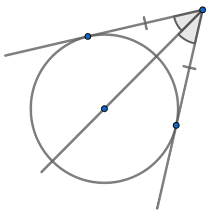
[2] Их можно найти в учебнике А.Г. Мерзляка, а также в задачнике М.А.Волчкевича “Уроки геометрии в здачах” (главы “Знакомство с окружностью-1” и “Знакомство с окружностью-2”.



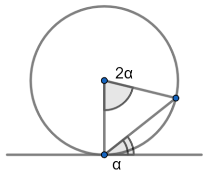
Угол опирающийся на диаметр - прямой.
Эта теорема создана для удивления. Знакомство можно проводить в форме эксперимента: просить каждого отметить на окружности точку, измерить угол транспортиром. Окружность у каждого своя, точка - своя, а угол - одинаковый. Отличная пропедевтика вписанного угла. Позволяет держать в оперативной памяти медиану прямоугольного треугольника.



Касательная перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
У теоремы очень сложное доказательство, поэтому обычно мы ее не доказываем. Как ни странно, теорема интуитивно не очевидна. Иллюстрация из окружающего мира: велосипедная спица перпендикулярна земле в момент касания обода.



Отрезки касательных из точки к окружности равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между касательными.
Конструкция очень пригодится далее (центр вписанной окружности, критерий описанного четырехугольника, подобие) и хорошо показывает, как вообще работать с окружностью (проводить радиус в точку касания).
Конструкцию можно рассматривать, как самостоятельную задачу и особенно не отрабатывать: задачи на равенство отрезков касательных имею мало отношения к окружности и будут позже.



Угол между касательной и хордой в два раза меньше угла, под которым видна эта хорда из центра.
Формулировка очень сложная и ее можно не касаться, а просто решать частные случаи задачи. Рассматривать разные значения (например, 80°) центрального угла и находить угол между касательной и хордой. После нескольких попыток сформулировать закономерность. Доказывать ли закономерность после - зависит от класса.

Как нарисовать хороший чертеж?

Сложность: базовая

При решении задач, описанных в этом разделе, ученики должны визуально представлять, что такое параллелограмм, диагональ параллелограмма, трапеция, равнобокая трапеция, прямоугольная трапеция, шестиугольник, диагональ шестиугольника. Можно показать картинки и быстро вспомнить в начале урока.

Ниже приведены две картины. Они имеют одинаковое название, но разных авторов[3].

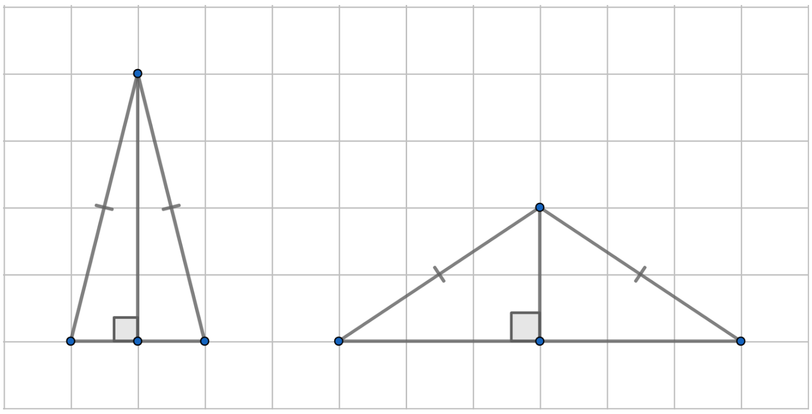
[3] Правая картина - одна из 44 очень разных фантазий Пабло Пикассо на тему “Менин” Веласкеса. Все они хранятся в музее художника в Барселоне.

Менины
Диего Веласкес

Менины
Пабло Пикассо

Одинаковые ли это картины? Видимо, нет. Одинаковый выбор названия и схожесть композиции (на второй картине можно найти всех персонажей первой!) не делает картины одинаковыми.

А теперь посмотрим на два чертежа:

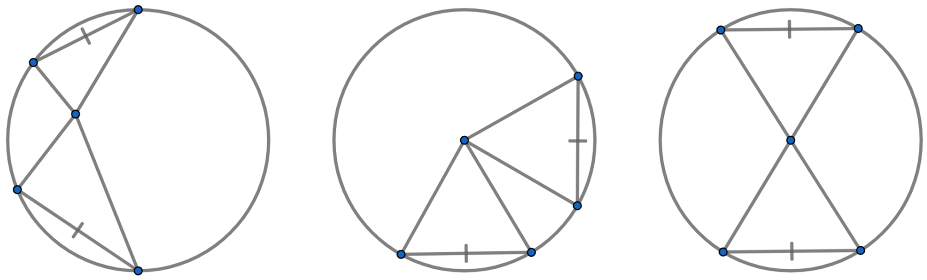


Два равнобедренных треугольника

Одинаковые ли это чертежи? На этот вопрос нельзя ответить, пока нет задачи, к которой они относятся. Если мы доказываем теорему о высоте равнобедренного треугольника, то оба чертежа подходят. Если же речь идет о том, что нужно посчитать площадь фигуры по клеточкам, то первый и второй чертеж принципиально отличаются. Это приводит нас к ключевому выводу:

О качестве чертежа нельзя говорить, пока нет задачи, к которой он относится.

Предложим классу три чертежа к одной задаче и попросим выбрать наилучший.



Три чертежа к задаче: “Докажите, что равные хорды видны из центра окружности под равными углами.”

Первый чертеж явно не самый удачный: хорды не похожи на равные, а центр окружности точно не на своем месте. Между двумя оставшимися чертежами голоса могут разделиться. Приведу пример аргумента за третий чертеж: “Задачу на третьем чертеже решать явно проще, так как там можно дополнительно использовать вертикальные углы.”

Отличный повод для разговора: в условии ничего нет про вертикальные углы. Чертеж только путает нам карты: возникает риск написать в решении то, чем нельзя пользоваться. Из-за чертежа с дополнительными свойствами можно принять частный случай за общий и записать неверное доказательство. Поэтому произвольный треугольник лучше никогда не рисовать равнобедренным, а параллелограмму вредно превращаться в прямоугольник.

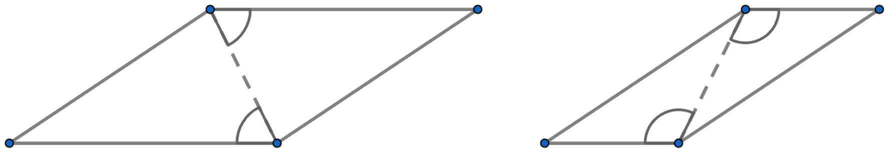
Обобщим:

Качественный чертеж имеет все свойства из условия, но не добавляет новых.

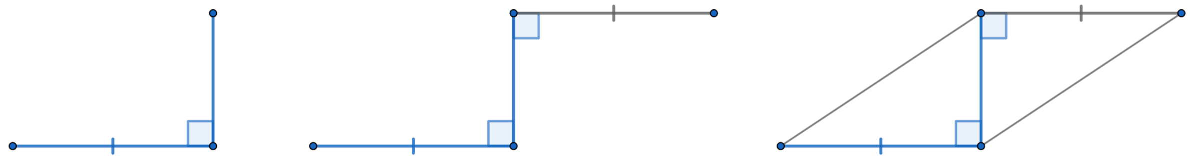
Попробуем нарисовать чертёж по следующему условию:

> **Задача.** Нарисуйте параллелограмм, у которого одна из диагоналей перпендикулярна одной из сторон.

Пробуем нарисовать: рисуем параллелограмм, проводим диагональ. Не получилось. Рисуем еще раз: параллелограмм, диагональ. Снова не то!



Попробуем иначе. Каждый раз у нас не получалось создать прямой угол. Начнем рисовать с него[4]. Нарисуем одну сторону. Пристроим диагональ. Отложим противоположную сторону. Соединим концы. Вот, теперь то, что нужно.



Это третий вывод:

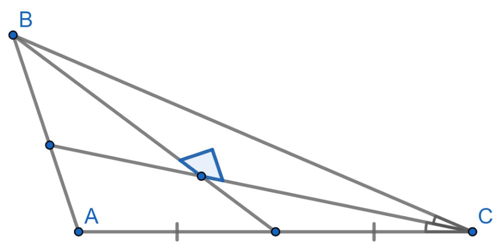
Прежде чем делать чертеж, нужно подумать о порядке рисования элементов.

Качественный чертеж может дать подсказку: например, можно визуально сообразить равенство каких треугольников можно доказывать. Наоборот, на плохом чертеже даже очевидные свойства можно не заметить.

Рассмотрим, например, такую задачу:

> **Задача.** В треугольнике биссектриса одного из углов перпендикулярна медиане, проведенной из другой вершины. Докажите, что в этом треугольнике одна из сторон в два раза больше другой.

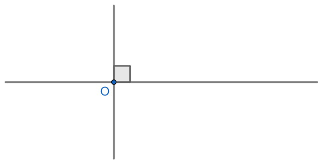
Делаем чертеж: рисуем треугольник, проводим в нем биссектрису и медиану.



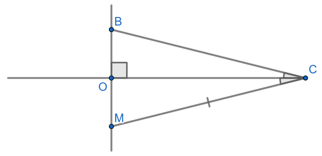
Да, на перпендикулярность не очень похоже. Честно говоря, даже трудно сообразить, какая сторона должна быть в два раза больше другой. Может быть AC в два раза больше AB?

Попробуем сделать качественный чертеж. Перпендикулярность соблюсти не получилось, с нее и начнем.

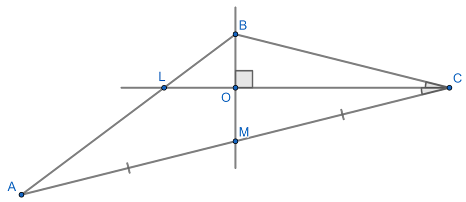
[4] Речь здесь не идет о построении циркулем и линейкой. Рисовать можно любыми подручными материалами и даже по клеточкам. Формальные построения пока не нужны, они только запутают ребят. Речь о построениях циркулем и линейкой пойдет в конце главы.



Начинаем с крестика: будущих медианы и биссектрисы



Отмечаем вершину треугольника, откладываем в разные стороны равные углы до пересечения с медианой



BM - медиана, значит M - середина стороны. Удваиваем отрезок CM, чтобы получить вершину треугольника.

С хорошим чертежом задача сразу становится простой. Во-первых, визуально сразу видно, что это AC в два раза больше, чем BC (а вовсе не AB). Во-вторых, понятно, как это доказывать. Треугольник BCM равнобедренный (его высота совпадает с биссектрисой). Значит, $BC = MC$. Кроме того, $MC = \frac{1}{2}AC$,значит $BC = MC = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось.

Качественный чертеж помогает решить задачу.

Ниже приведена подборка задач, в которых также нужно понять порядок построений, прежде чем приступать к черчению. Главная идея в задачах с окружностью: начинать с окружности проще, чем пытаться пристроить окружность к готовому чертежу. Последняя задача - типичная конструкция из последней задачи ОГЭ.

1. Начертите параллелограмм, у которого диагональ перпендикулярна стороне.
2. Начертите параллелограмм, у которого высота делит сторону, к которой она проведена, пополам
3. Начертите параллелограмм, у которого одна из диагоналей равна одной из сторон.
4. Начертите шестиугольник, у которого диагонали пересекаются в одной точке.
5. Начертите прямоугольную трапецию с перпендикулярными диагоналями
6. Начертите равнобокую трапецию с перпендикулярными диагоналями.
7.
    a. Начертите треугольник, у которого одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис.
    b. Докажите, что в этом нем одна сторона в два раза больше другой.
8.
    a. Начертите треугольник, в котором перпендикуляр, опущенный из одной вершины треугольника на одну из его медиан делит эту медиану пополам.
    b. Докажите, что в этом треугольнике одна из сторон в два раза больше другой.
9. Начертите не являющийся квадратом четырехугольник ABCD, у которого AB=BC, а углы B и D прямые.
10. Начертите трапецию а) вписанную в окружность; б) описанную вокруг окружности
11. Начертите прямоугольную трапецию и окружность так, чтобы окружность проходила через две вершины трапеции и касалась боковой стороны, перпендикулярной основаниям

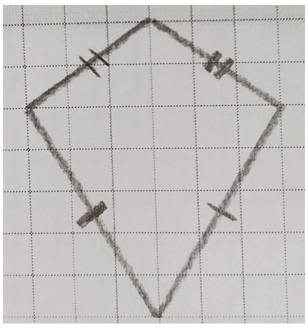
Обратите внимание: в этой главе не было сказано ни одного слова о построениях: ученики просто рисовали чертежи к задачам. Задание было понятно и привычно, набор чертежных инструментов никак не ограничивался.

Подборка же задач толкала к тому, чтобы начинать думать о чертеже не как о рисунке, а как о реализации алгоритма: если придумать правильный порядок действий, чертеж сможет нарисовать кто угодно. Без правильного порядка не помогут никакие художественные таланты.

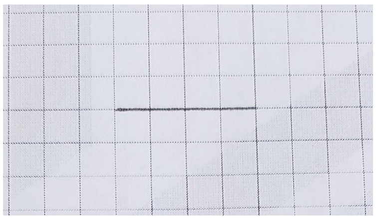
Чтобы идея алгоритма отложилась, полезно не только создавать чертежи, но и просить описывать порядок действий (в том числе и письменно на самостоятельной работе).

Как анализ помогает в создании хорошего чертежа?
Сложность: базовая
Попробуем нарисовать дельтоид (фигуру, состоящую из двух равнобедренных треугольников с общим основанием) на белой бумаге:

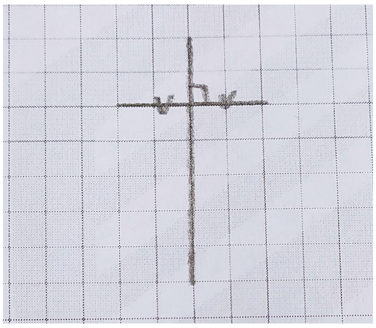
Неплохо, но явно не идеально. А теперь попробуем сделать то же самое, но на клетчатой бумаге.



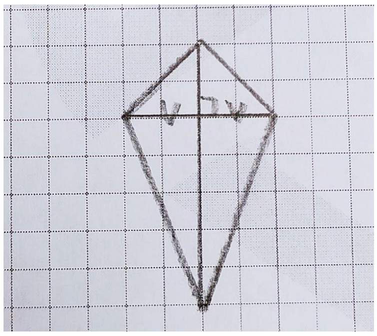
Как клеточная бумага помогает при создании чертежа? Она позволяет воспользоваться соображениями симметрии. И верхний, и нижний равнобедренный треугольники обладают общей осью симметрии. При создании чертежа мы этим наверняка пользовались, только не проговаривали вслух. А что если мы захотим научить другого человека рисовать дельтоид, что мы ему скажем? Видимо, примерно следующее:



Нарисуй отрезок



Проведи к нему серединный перпендикуляр



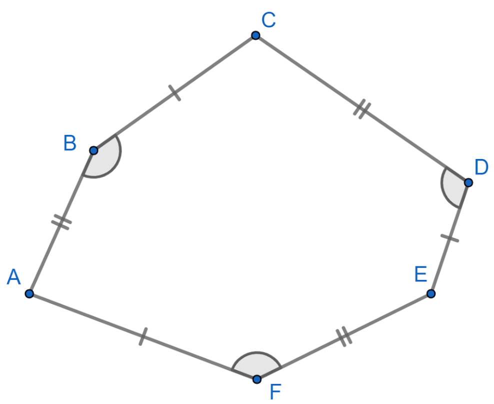
Соедини две точки на перпендикуляре с концами исходного отрезка

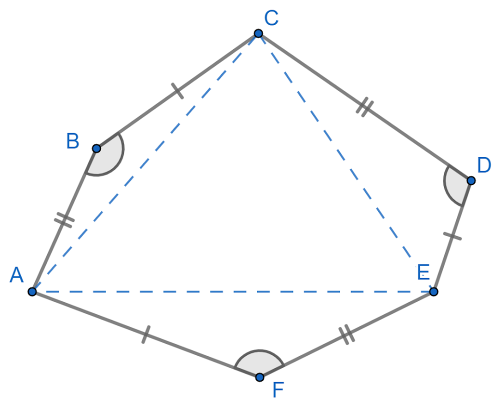
Чтобы нарисовать хороший дельтоид нужно хорошо (хотя бы интуитивно) понимать свойства, которыми он обладает.

Рассмотрим другую задачу с похожей идеей.

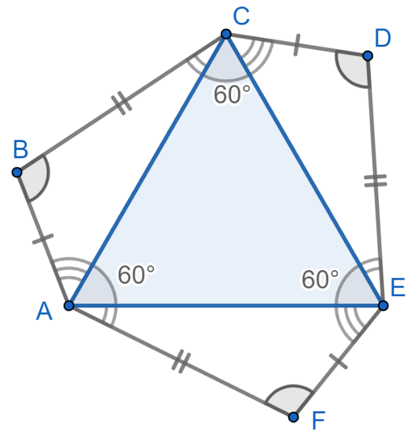
> **Задача.** В шестиугольнике ABCDEF AB=CD=EF, BC=DE=FA, $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA$. Докажите, что и оставшиеся три угла равны между собой.

Сходу трудно даже понять, что сказано в условии. Нарисуем черновой шестиугольник и попробуем отметить то, что дано.





В глаза бросаются недостроенные равные треугольники. Проведем отрезки AC, CE и EA и посмотрим, что получится. Треугольники ABC, CDE, EFA равны по первому признаку. Следовательно, равны отрезки AC, CE и EA. Тогда треугольник ACE - равносторонний. Это ключ к созданию хорошего чертежа.



Рисуем равносторонний треугольник и пристраиваем к нему три равных[5]. Получаем требуемый чертеж.

Теперь легко решить задачу: видно что углы FAB, BCD и DEF равны, так как их величина равна сумме трех углов: угла в 60 градусов и углов, отмеченных двумя и тремя дугами. Без черновика и его анализа мы не смогли бы это заметить.

Понимание того, как устроен чертеж, помогает решать задачу.

Для того чтобы создать качественный чертеж, нужно:
- сделать черновик;
- проанализировать его и найти дополнительные свойства;
- сделать чистовую версию чертежа.

Ниже приведена подборка задач. В некоторых задачах нужно заполнить заготовку. В этих случаях заготовки в двух версиях: черновая и чистовая. Важно, что нужно именно дополнить заготовку, а не нарисовать свой чертеж с такими свойствами: если рисовать свой, то может измениться порядок построений (то, что на заготовке не будет нарисовано первым) и тогда не потребуется идея анализа.

1. Как нарисовать дельтоид, чтобы он выглядел правдоподобно?
2. На рисунке 1 отметьте точки B и C так, чтобы M было серединой BC, а AB=AC.
3. Отметьте на стороне BC (рисунок 2) такую точку M, что $\angle DMC = \angle ABC$
4. Отметьте на стороне AB (рисунок 3) такую точку M, что $\angle DMA + \angle MAC = 180^{\circ}$
5. Отметьте на луче CE (рисунок 4) точку M так, чтобы угол AMB был прямым.

[5] Это совершенно необязательно (даже не нужно) делать циркулем и линейкой. Просто на глаз. Как показывает практика, понимание того как устроен чертеж, улучшает его качество даже если чертежные инструменты не были использованы.

Рисунок 1

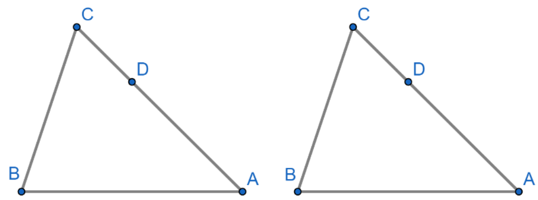


Рисунок 2

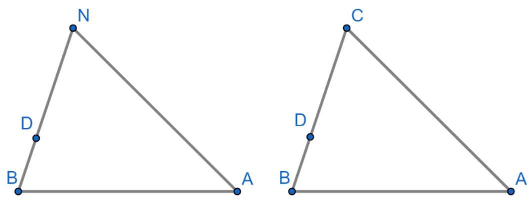


Рисунок 3

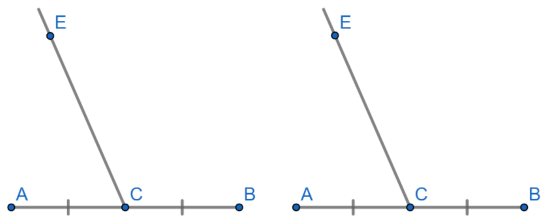


Рисунок 4

6.

a. Начертите не являющийся правильным шестиугольник ABCDEF, у которого AB=CD=EF, BC=DE=FA, а также равны $\angle ABC = \angle CDE = \angle EFA$

b. Докажите, что оставшиеся три угла также равны между собой

7. Сделайте черновой чертеж, проведите анализ и затем сделайте чистовой чертеж по следующему условию: “В пятиугольнике ABCDE AB=CD, BC=DE, $\angle ABC = \angle CDE$”

Как и в прошлом разделе, мы все еще не притронулись к идее построений. Просто рисовали чертежи и доделывали заготовки. Идея анализа возникла сама собой, как необходимость для того, чтобы чертеж получался качественным.

Знакомство с ГМТ

Сложность: повышенная

В прошлом разделе мы познакомились с идеей анализа: прежде чем рисовать готовый чертеж, нужно было нарисовать черновик и найти у него дополнительные свойства. Иногда при анализе обнаруживается, что свойство заключается в том, что точка лежит на пересечении двух кривых (например, прямой или окружности). В этом случае говорят, что точка лежит на пересечении двух геометрических мест точек.

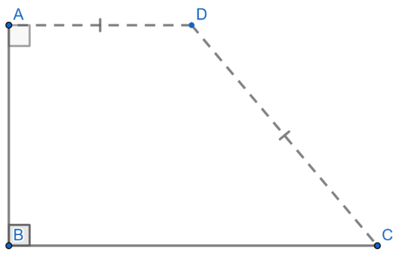
Рассмотрим, например, такую задачу[6]:

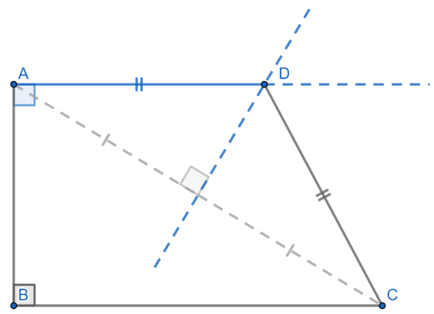
> **Задача.** На плоскости отмечены точки A, B, C, так что $\angle ABC = 90^{\circ}$ и $AB \neq BC$. Отметьте точку D так, чтобы ABCD стало прямоугольной трапецией с основанием BC, у которой $AD = DC$.

---

[6] Эта задача очень нравится мне тем, что ее решение не очень просто найти “на глаз”, что еще раз легитимизирует идею анализа и ГМТ.

Решение. Сделаем черновик. Видим, что с одной стороны, точка D лежит на перпендикуляре к прямой AB через точку A. С другой стороны, треугольник ADC должен быть равнобедренным, а, значит, точка D должна лежать на оси симметрии отрезка AC, то есть на серединном перпендикуляре. Проводим две эти прямые и получаем на пересечении точку D.





Комментарий. В задаче важно, что точки A, B, C уже отмечены. Если бы точки можно было бы ставить в другом порядке, то задача решалась бы без ГМТ: можно было бы начать построение с равнобедренного треугольника ADC, а затем найти место для точки B.

В принципе, любое множество точек, определяемых своим свойством, можно назвать геометрическим местом точек с данным свойством. Наиболее часто в задачах возникают пять ГМТ[7], поэтому с ними стоит познакомиться отдельно:

- геометрическое место точек, равноудаленных от концов отрезка;
- геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла;
- геометрическое место точек, находящихся на данном расстоянии от данной точки;
- геометрическое место точек, находящихся на заданном расстоянии от данной прямой;
- геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

Прежде чем строить, давайте разберемся с непривычными формулировками (именно они составляют львиную долю трудности). Во всех ГМТ фигурирует слово данный. Его можно понимать. как “выбранный кем-то”. Тогда, например, третье ГМТ можно читать так:

- геометрическое место точек, находящихся на выбранном кем-то расстоянии от выбранной кем-то точки.

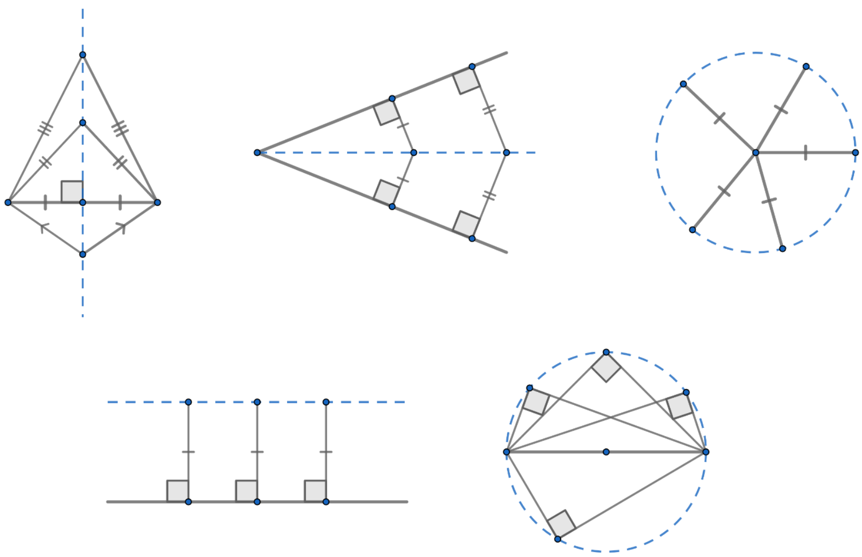
[7] В восьмом классе добавится еще одно: точки, из которых угол виден под данным углом.

Ага, понятно, то есть кто-то выбрал точку и расстояние, а нам нужно сообразить, где находятся все такие точки.

В тексте также встречаются сложный термин “равноудаленный”, то есть “находящийся на одинаковом расстоянии от”. Особенно трудно словосочетание “равноудаленных от сторон угла”. Здесь нужно сообразить не только что такое равноудаленность, но и то, что расстояние от точки до прямой - длина опущенного перпендикуляра.

Теперь действуем так: пробуем на глаз подобрать несколько точек и провести через них кривую. Когда кривая проведена, нужно объяснить, почему именно она подходит.

Получатся, соответственно: серединный перпендикуляр к отрезку. биссектриса угла, окружность по центру и радиусу, пара параллельных прямых и окружность построенная на диаметре.



Пять основных ГМТ

Я не буду приводить здесь доказательства этих ГМТ, думаю, что читатель без труда восстановит их самостоятельно. Замечу только, что строгость этих доказательств может очень сильно варьироваться от уровня класса.

Строго говоря, для обоснования потребуется доказать две теоремы:

- все точки, лежащие на данной кривой, обладают необходимым свойством;
- никаких других точек, обладающих этим свойством нет.

Другими словами, прямую и обратную теорему.

На мой взгляд, в непрофильном классе проводить и прямое, и обратное доказательство нет необходимости: на него совсем нет запроса и оно не будет понято. Зато может сломать динамику урока и создать ощущение, что ГМТ - что-то скучное и непонятное.

Градации строгости могут варьироваться. Например, можно доказать теоремы только в одну сторону, но сообщить, что, вообще говоря, нужно доказать и обратную. Можно оставить разговор о наличии обратной теоремы на потом. Я ограничиваюсь совсем иллюстративным разговором. После него ребята понимают, что доказать теоремы явно можно, но вряд ли могут сделать это сами.

Если вы все же решили говорить о прямой и обратной теоремах, то можно опираться на контрпримеры. Например, можно строить обсуждение так:

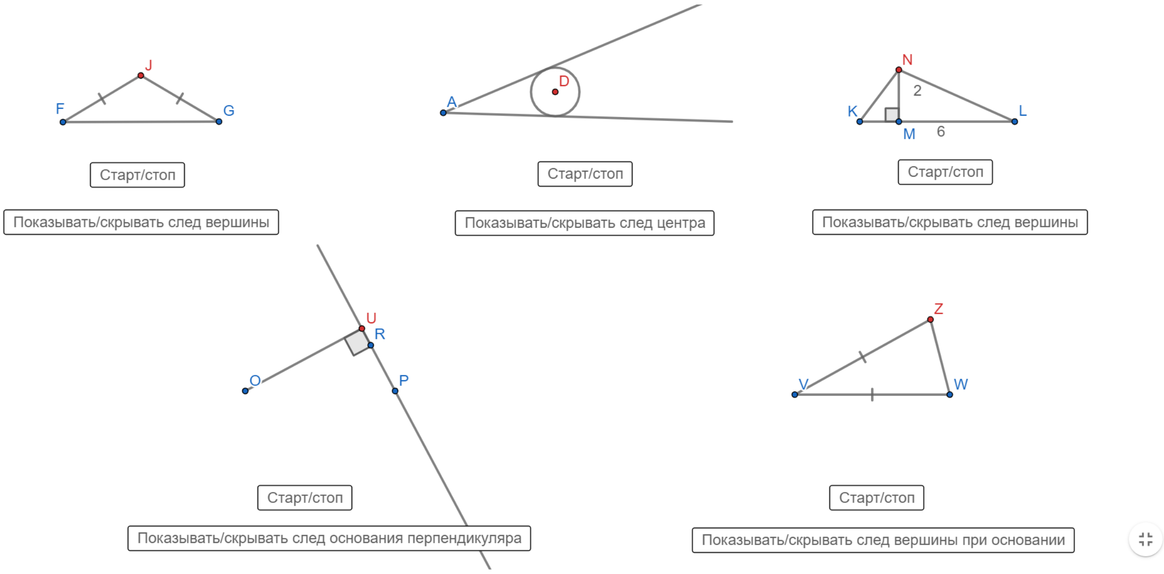
> **Учитель:** Вы уже знаете, что окружность - геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки. Давайте разберемся, что это значит.
>
> ***Учитель*** *рисует окружность и еще несколько точек.*
>
> **Учитель:** Скажите, можно ли сказать, что на доске геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки?
>
> **Ученики:** Нет!
>
> **Учитель:** А почему?
>
> **Ученики:** Потому что есть точки на другом расстоянии.
>
> ***Учитель*** *рисует полуокружность.*
>
> **Учитель:** А это геометрическое место точек, находящихся равноудаленных от данной точки:
>
> **Ученики *(вразнобой)*:** Да! Нет!
>
> **Учитель:** Приведите аргументы в пользу обоих точек зрения.
>
> **Первый ученик:** Все точки, что мы нарисовали, подходят!
>
> **Второй ученик:** Да, но есть же и другие.
>
> **Учитель:** Точно. Когда мы говорим про ГМТ мы должны описать все точки, которые подходят, и не включить лишних. Когда мы доказываем, что что-то является ГМТ, нужно будет доказывать две теоремы: доказать, что все описанные точки подходят, а никакие другие - не подходят.

ГМТ редко сформулировано так, как написано в учебнике. Чаще всего привычные объекты прячутся за непривычной формулировкой. Например, вместо равных отрезков будет равнобедренный треугольник или радиусы окружности. В этом случае нужно распознать знакомое ГМТ за незнакомой оболочкой.

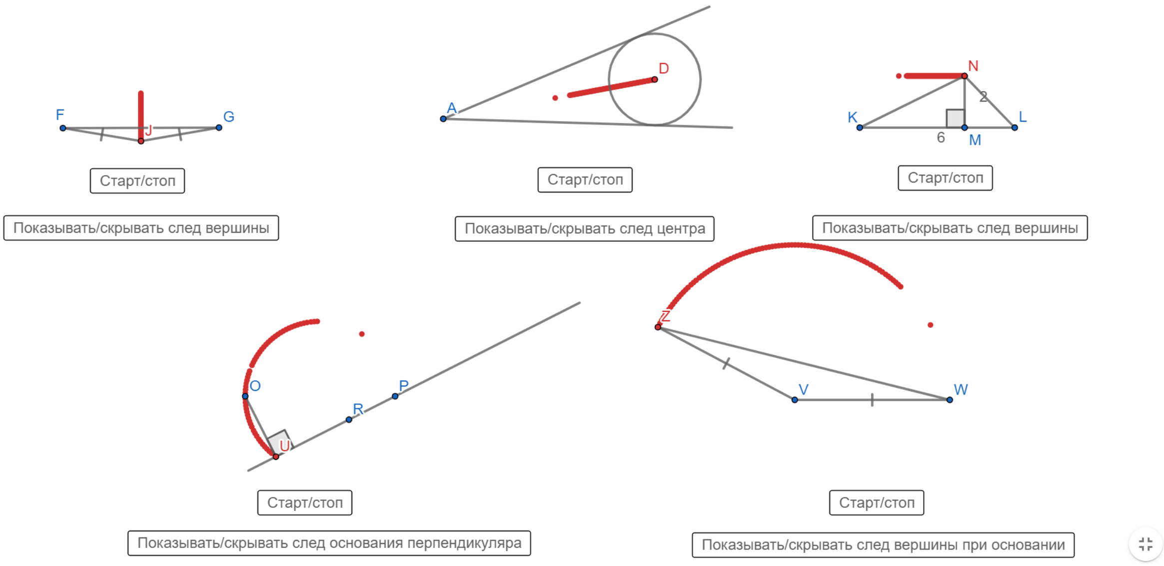
Вот пример математического диктанта на эту идею.

1. Нарисуйте отрезок. Где лежат вершины всех равнобедренных треугольников, для которых этот отрезок является основанием?
2. Нарисуйте угол. Где лежат центры всех окружностей, вписанных в этот угол?
3. Нарисуйте отрезок длины 6. Где лежат вершины всех треугольников, у которых этот отрезок сторона, а высота, проведенная к этой стороне - 2?
4. Поставьте две точки. Через одну точку проводят всевозможные прямые, а из другой точки на них опускают перпендикуляры. Где лежат основания этих перпендикуляров?
5. Нарисуйте отрезок. Где лежат вершины всех равнобедренных треугольников, для которых данный отрезок - боковая сторона?

Работа с ним происходит в несколько этапов: сначала класс пробует решить задачи на слух. Затем учитель выводит на проектор статичные чертежи в GeoGebra[8].



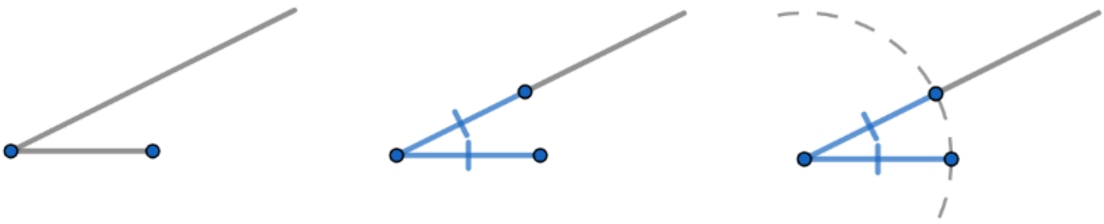
Если для каких-то картинок решить не удалось, запускается анимация. Если и это не помогло, можно включить след точки. Когда все ГМТ разгаданы, обсуждается, почему получились именно такие ГМТ



Главная трудность при использовании ГМТ в задачах в том, что обычно мы решаем не прямую задачу, а обратную. Вспомнить свойство точек на серединном перпендикуляре легко. Сложнее догадаться, когда его проводить, если в условии его не было. Например, в задаче в начале главы был не серединный перпендикуляр, а точка, являющаяся вершиной равнобедренного треугольника. Глядя всего лишь на одну точку, трудно сообразить, какую из множества кривых нужно через нее провести.

Сравните первые два рисунка ниже: на правом появились синие отрезки.

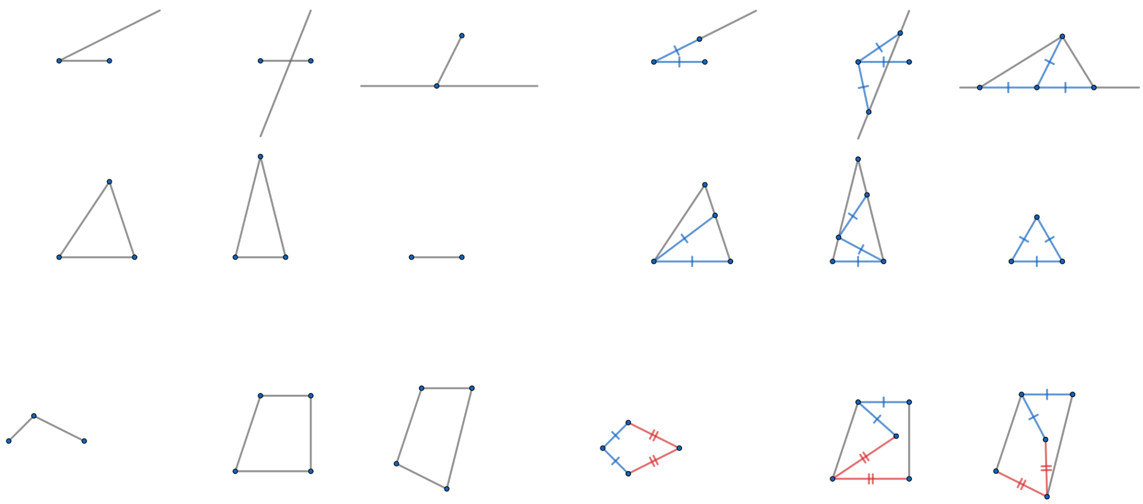
[8] Чертежи и анимацию к ним можно найти здесь: https://www.geogebra.org/m/by2e2wbz



Заготовка *Готовый чертеж* *Решение*

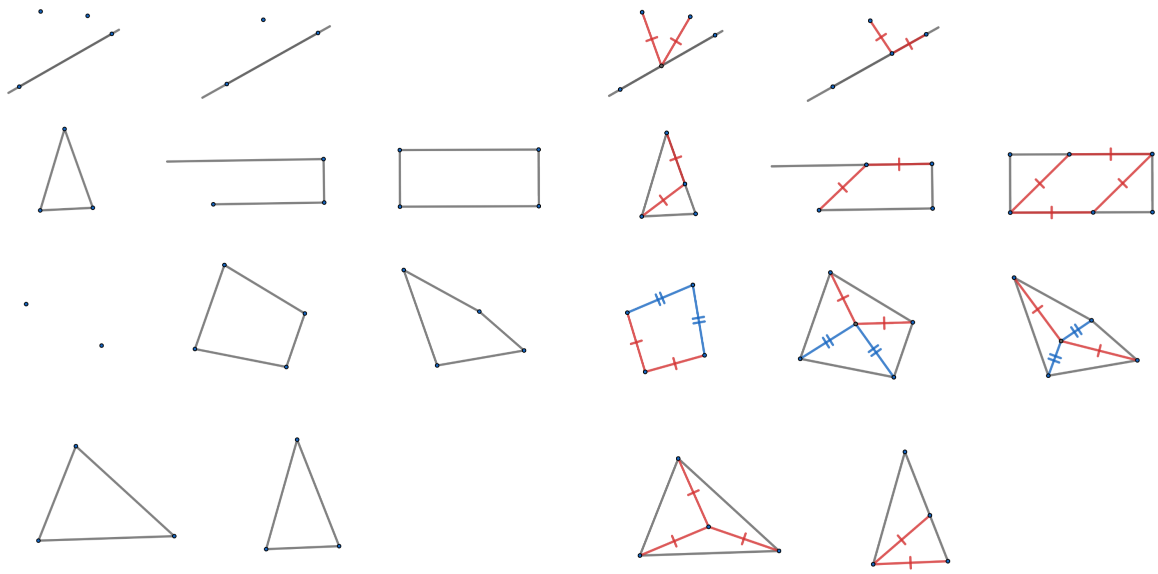
Как превратить заготовки слева в чертежи справа? Взять циркуль и провести окружность с центром в вершине угла. Радиус будет равен величине горизонтального отрезка. Точка пересечения окружности и луча - искомая.

Ниже вы найдете четыре подборки задач, в которых нужно превратить заготовки в готовые чертежи. Каждая связана с определенным ГМТ. После идут решения с комментариями, что еще в этих подборках можно обсудить. При двух часах геометрии в неделю успеть все их вряд ли возможно, так что можно решать их частично или ограничиться первыми двумя, а из двух последних решить по 1-2 задачи.
Есть два сценария урока: в GeoGebra или на бумаге[9]. Если проводить урок на бумаге, то все заготовки нужно распечатать. Кроме циркуля, линейки, карандашей я бы разрешал пользоваться и угольником, и транспортиром.

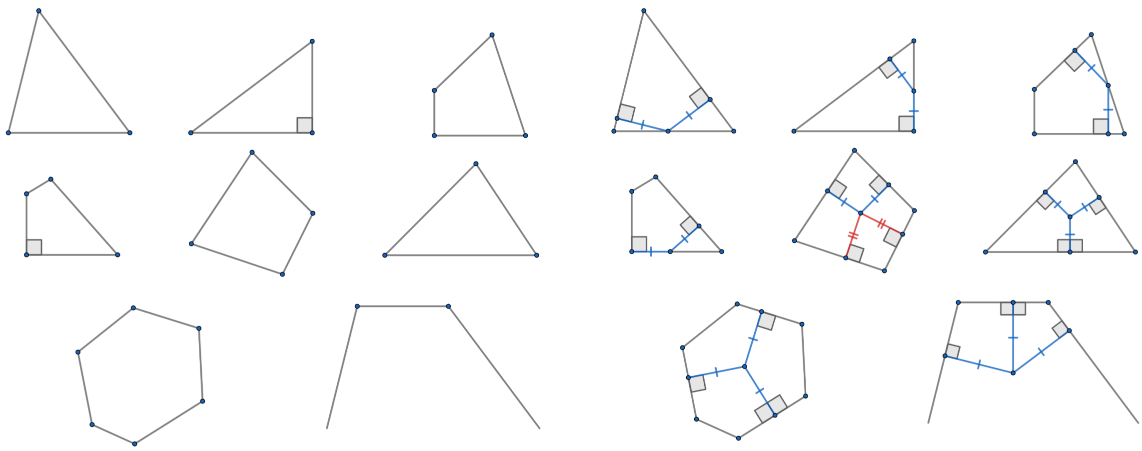


Задачи про окружность по центру и радиусу

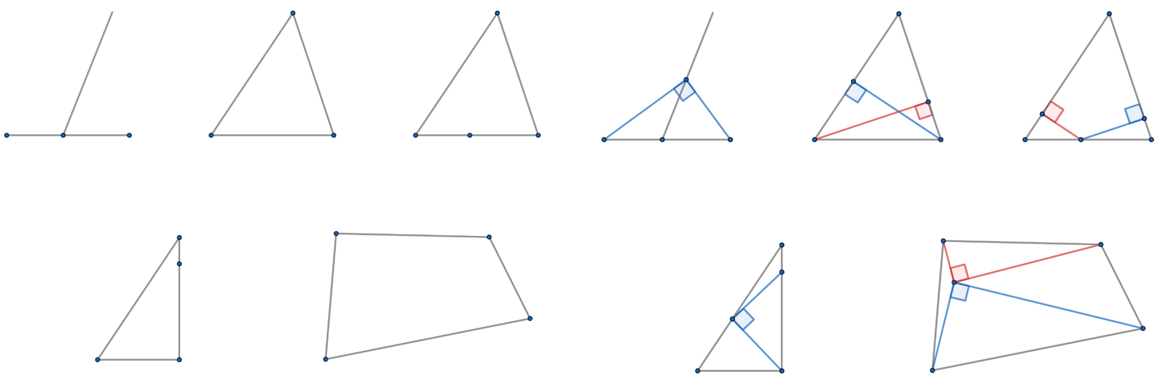
[9] Все материалы для проведения урока в GeoGebra доступны по ссылке: https://drive.google.com/drive/folders/1cLdhau62x_B965eATb2abC5-UKPiV9Um?usp=sharing



Задачи про серединные перпендикуляры

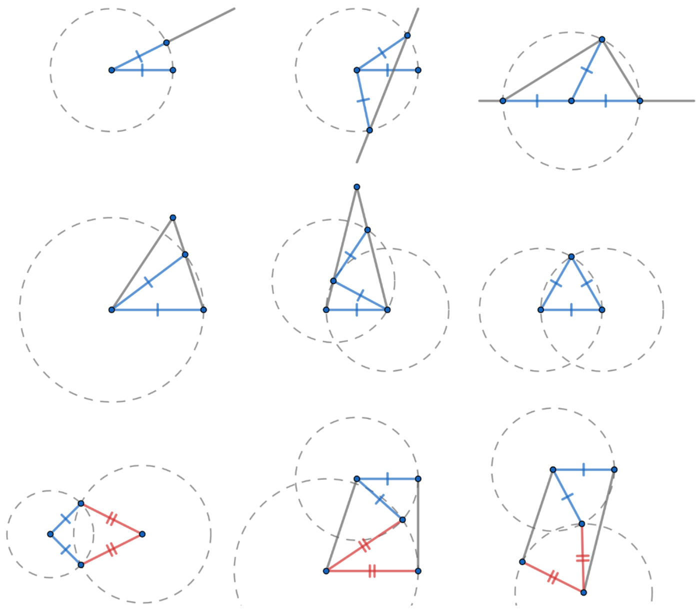


Задачи про биссектрисы



Задачи про окружность на диаметре

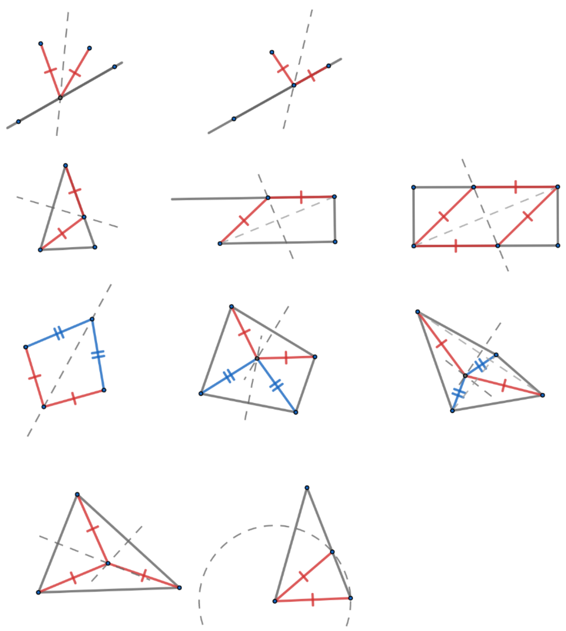
Решения и комментарии:



На третьей картинке в первом ряду полезно вспомнить сразу две теоремы: об угле опирающемся на диаметр и о медиане прямоугольного треугольника.

Особо трудной неожиданно оказывается средняя задача во втором ряду. Её решают значительно хуже задач третьего ряда. Видимо, провести две окружности последовательно - труднее, чем одновременно.

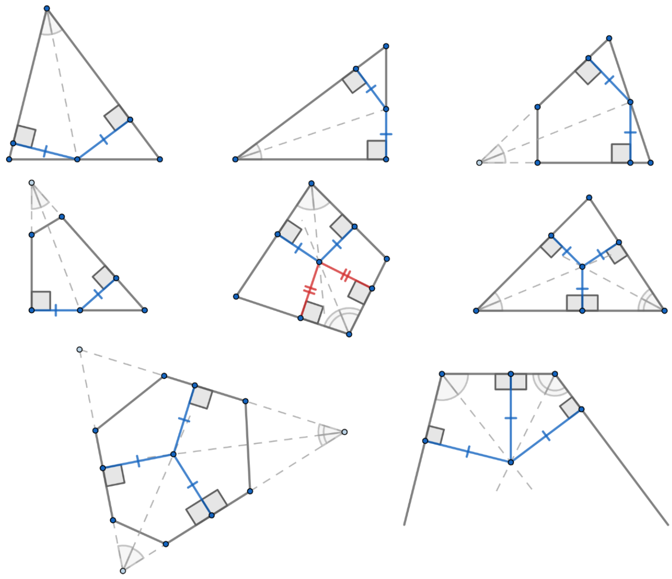
Последняя задача - повод обсудить, сколько решений может иметь задача.



Первый чертеж в третьем ряду не восстанавливается однозначно. Это повод для разговора о количестве решений задачи.

Первая задача в четвертом ряду очень важная: из нее в будущем вырастет описанная окружность треугольника. В этой задаче можно обсудить, что для решения можно брать любые два серединных перпендикуляра.

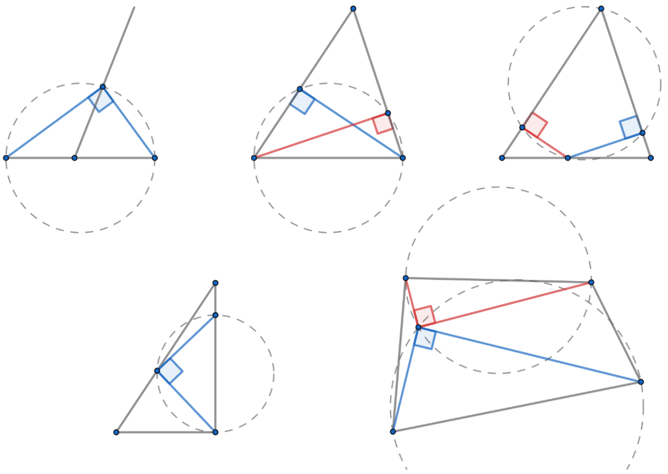
Последняя задача - ловушка. Вроде выглядит также, но равнобедренный треугольник придется получить не с помощью перпендикуляра, а с помощью окружности.



Самая трудная подборка. Классу точно потребуется подсказка в третьей задаче первого ряда, а в слабом классе ее можно опустить.

Самая важная задача - третья во втором ряду. Из нее вырастает окружность вписанная в треугольник. Опять же можно обсудить, что можно брать две любые биссектрисы.

Последний чертеж - на самом деле центр вневписанной окружности треугольника.



Довольно однотипная и несколько искусственная подборка, но, кажется, все равно очень полезная для того, чтобы привыкнуть к вспомогательной окружности.

Основные построения циркулем и линейкой

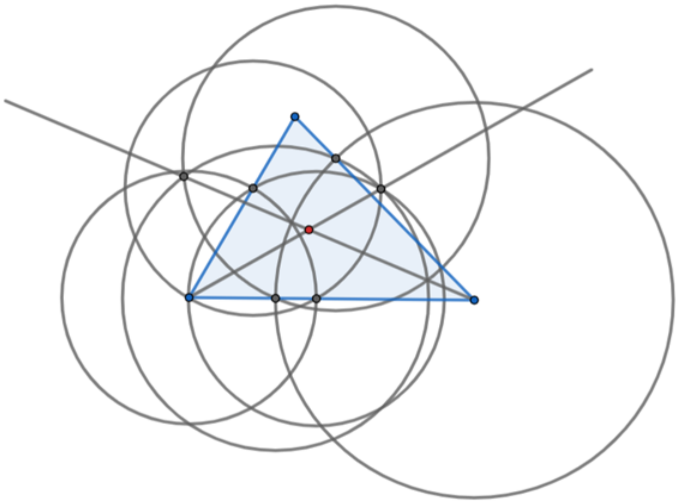
Сложность: базовая

В начале главы я много говорил о недостатках построений циркулем и линейкой. Теперь пора сказать об их достоинствах или, как минимум, о их месте в курсе.

Начну с лирического отступления. Математические науки не начинают свою жизнь с аксиом. Как не странно, сначала математики набирают опыт, рассуждая не строго. Но в какой-то момент чувствую, что то, что они делали интуитивно, пришло время формализовать. Так было с математическим анализом: появившись в веке семнадцатом (Б.Паскаль, П.Ферма, И.Ньютон, Г.Лейбниц), он был формализован только к девятнадцатому (О.Коши, Ж.Лагранж, К.Вейерштрасс). Тоже верно и про теорию вероятности: первые серьезные результаты появились в девятнадцатом веке задолго до ее формализации А.Колмогоровым.

Похожий путь проходят и семиклассники: при первом знакомстве с построениями им важно получить живой опыт. Получив его, они готовы воспринять его систематизацию.

Надо понимать, что когда в задаче просят построить что-то циркулем и линейкой, автор естественно не имеет в виду, что построения будут действительно выполнятся и уж точно не циркулем и линейкой. На практике это просто невозможно. Чтобы убедиться в этом можно посмотреть на чертеж ниже. На нем я построил циркулем и линейкой центр вписанной окружности треугольника[10].



Центр вписанной окружности, построенный циркулем и линейкой.

Не смотря на то, что я использовал компьютерную программу, а вовсе не циркуль (грифель которого толстый и постоянно соскальзывает), мне все равно было трудно разобраться. Когда я выбирал последнюю точку, чтобы провести биссектрису, я почти запутался, так как три точки оказались очень близко между собой. Проверить правильность построения, кажется, вообще не представляется возможным.

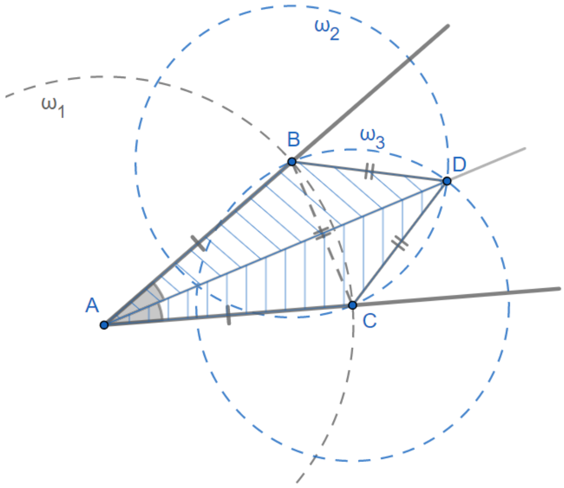
Решение задачи можно свести к аксиомам, а текст компьютерной программы свести к последовательности нулей и единиц. На практике в этом мало смысла: решение будет слишком длинным, текст программы - непонятным. То же и с чертежом: даже для простой задачи потребуется огромное количество шагов.

Что же тогда означает “построить с помощью циркуля и линейки?”
Решение задачи не нужно сводить к аксиомам, но это *можно* сделать. Построить задачу с помощью циркуля и линейки - это предложить алгоритм, который *можно* выполнить с помощью этих двух инструментов.

Как понять, что построение выполнимо с помощью циркуля и линейки?
Когда мы записываем решение задачи, мы ссылаемся на доказанные в курсе теоремы. Они в свою очередь ссылаются на другие, те на третьи и так до тех пор, пока мы не дойдем до аксиом. То же и построениями: сложные построения состоят из более простых, те из еще более простых, пока мы не дойдем до “кирпичиков” - элементарных построений.

Базовый этаж этой конструкции - всего два построения: окружность с данным центром и данным радиусом и прямая через две точки. Чтобы ребята поняли, как устроено здание, мы строим еще один этаж и выполняем еще несколько построений.

[10] О его существовании и том, как его найти пойдет речь в разделе “Вписанная и вневписанная окружность”



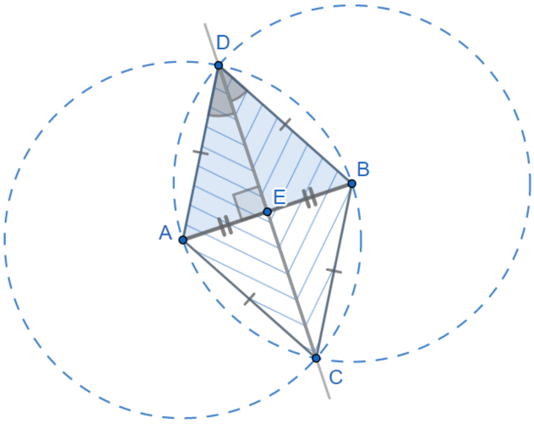
Построение биссектрисы угла

Радиус окружности ω_1 строится произвольно.

Синие окружности имеют общий радиус BC, потому равны.

Заштрихованные треугольники ABD и ACD оказываются равными по третьему признаку. Таким образом AD делит угол BAC на два равных, то есть является биссектрисой.

Комментарий: заодно мы построили равносторонний треугольник BCD.



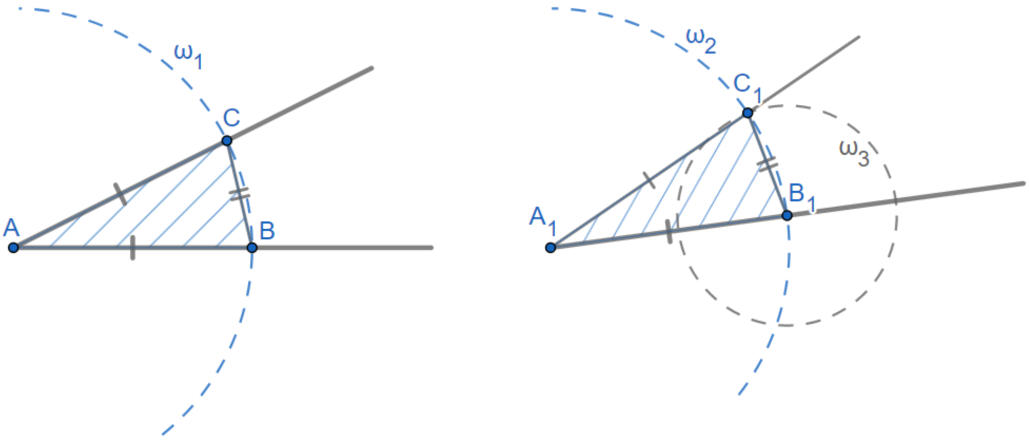
Построение серединного перпендикуляра

AB - исходный отрезок. Синие пунктирные окружности имеют равный радиус AB.

Заштрихованные треугольники ADC и BDC оказываются равными по третьему признаку.

Треугольник ADB равнобедренный, а углы ADC и BDC равны из равенства треугольников. Следовательно, DC его биссектриса, а значит и высота, и медиана. Тогда DC - серединный перпендикуляр к AB.

Комментарий: к построению серединного перпендикуляра легко сводится задача о проведении через данную точку прямой, перпендикулярной данной.



Построение угла, равного данному

Радиус окружности ω_1 выбирается произвольно, а радиус окружности ω_2 равен ему. Радиус окружности ω_3 равен СВ, и потому $BC = B_1C_1$. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, и потому равны и углы при вершинах A и A_1. Таким образом мы построили угол равный исходному.

Форма работы
Обсуждать последовательно четыре построения всем классом довольно скучно: ребята наверняка устанут на середине второго. Данный урок я традиционно провожу в особом формате.
За несколько уроков я прошу четырех добровольцев подготовить маленькие уроки про одно из построений.
На уроке класс делится на четыре группы: по одной на добровольца. Его задача - за 10 минут показать построение, помочь группе повторить и обсудить доказательство. Через 10 минут группа переходит к следующему добровольцу.

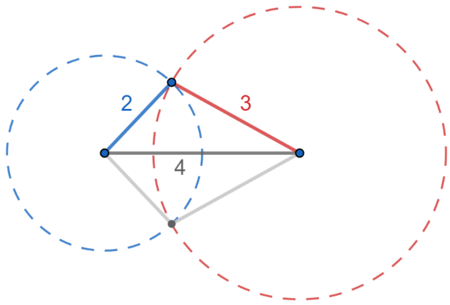
Последнее построение, которое мы обсуждаем - это построение треугольника по трем сторонам. Эта задача интересна не столько самим построением, сколько анализом его возможности.

Учитель: Используя циркуль и линейку, начертите треугольник со сторонами 2, 3 и 4 см.

Ученик *(спустя какое-то время)***:** Кажется у меня получилось.

Учитель: Ну-ка покажи… Да, верно! Расскажи, как ты строил?

Ученик: Я начертил отрезок длиной четыре сантиметра, а затем из концов отрезка провел окружности с радиусами 2 и 3 см. Взял одну из точек пересечения и соединил с концами.



Учитель: А почему этот треугольник подходит?

Ученики: Одна его сторона - 4, а две другие - радиусы окружностей, то есть два и три.

Учитель *(обращаясь к классу)***:** Поняли? Сможете повторить!

Класс: Да! *(Повторяют построения в тетради)*

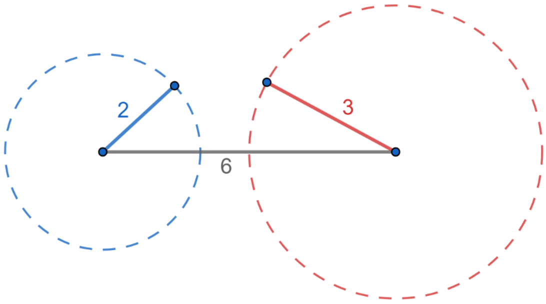
Учитель: Отлично, раз все понятно, давайте похожую задачку. Теперь постройте треугольник со сторонами 2, 3 и 6 см.

Класс берется за работу, но через минуту сталкивается с затруднением.

Класс: Ой, а не получается! Это невозможно!

Учитель: А почему невозможно?

Класс: Окружности не пересекаются.



Учитель: Кто может сформулировать, при каком условии окружности будут пересекаться?

Ученик: Когда сумма их радиусов больше третьей стороны.

Учитель: И с какой теоремой это связано?

Ученик: С неравенством треугольника. В треугольнике всегда сумма двух сторон больше третьей.

Учитель: Абсолютно верно!

Другой ученик: Извините, а обязательно больше? А если будут равны?

Учитель: Отличный вопрос. Что ты сам думаешь?

Другой ученик: Кажется, тогда окружности будут касаться и все три точки будут на одной прямой.

Возможно, у вас или у ваших учеников возник вопрос: а почему, собственно, именно циркуль и линейка? Думаю, что веской причины нет.

В не вполне серьезном диалоге в начале главы ученик предлагал провести перпендикуляр с помощью угольника. Вообще говоря, в этом нет ничего плохого. Можно добавить к инструментам построения угольник. Правда, множество конструкций при этом не расширится: перпендикуляр можно опускать только с помощью циркуля и линейки. А вот добавление транспортира класс построений существенно расширит. Например, произвольный угол не обязательно удастся разделить циркулем и линейкой на три части[11], а вот с транспортиром это, разумеется, удастся.

На мой (очень субъективный) взгляд, идея построений геометрии фундаментально присуща. А вот построения циркулем и линейкой - не более чем дань геометрической традиции.

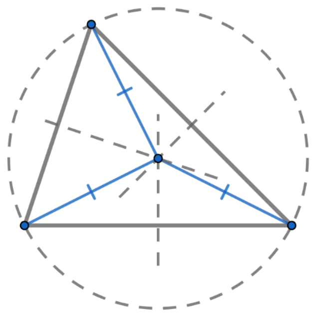
Описанная окружность.
Сложность: повышенная
Что повторить в начале урока: пять основных ГМТ; обсудить, что ГМТ можно пользоваться не только в прямую, но и в обратную сторону.

У каждого треугольника существует единственная описанная окружность. Давайте вспомним, почему это так. Сначала приведу пример неверного (или во всяком случае неполного доказательства).

---

[11]Если вы не слышали о задаче о трисекции угла, то горячо рекомендую Р.Куррант, Г.Роббинс “Что такое математика?”, глава 3, часть 1, параграфы 2 и 3.

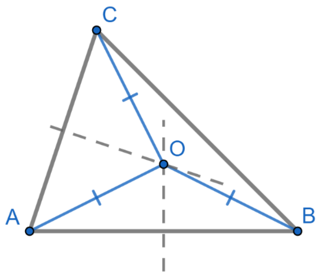
Теорема 1. Вокруг треугольника можно описать окружность, притом только одну.



Пример неполного доказательства. Центр описанной окружности равноудален от всех вершин. Следовательно он лежит на каждом серединном перпендикуляре, т.е. и в точке их пересечения. Такая точка не более, чем одна. Следовательно окружность единственная.

В этом доказательстве есть пробел: сначала нужно доказать, что серединные перпендикуляры вообще пересекаются в одной точке (для произвольных прямых, проходящих через вершины, разумеется, это не так).

Теорема 2. Серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке.



Доказательство.
Рассмотрим треугольник ABC и проведем серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC. Пусть они пересекаются в точке O.
Заметим, что AO=BO, так как O лежит на серединном перпендикуляре к AB. Аналогично, AO=CO, так как O лежит на серединном перпендикуляре к AC. Из двух равенств следует, что AO=BO=CO. Значит, BO=CO. Тогда точка O равноудалена от вершин B и C, то есть лежит на серединном перпендикуляре к BC.
Таким образом все три серединных перпендикуляра проходят через точку O, а значит пересекаются в одной точке.

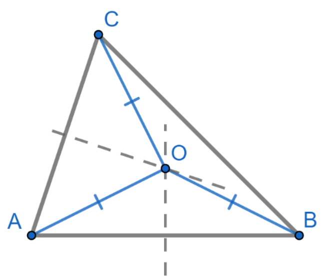
Полностью доказательство можно схематично изложить так:

1. Точка пересечения двух серединных перпендикуляров равноудалена от всех трех вершин треугольника.
2. Через эту точку проходит и третий серединный перпендикуляр.
3. Следовательно мы нашли в треугольнике точку, которая может быть центром описанной окружности.
4. Центр описанной окружности лежит на пересечении всех трех перпендикуляров, значит других таких точек нет.

Каждый шаг этого доказательства очень трудный. Фактически, это отдельная маленькая теорема. Мой опыт показывает, что рассказанные вместе, эти факты не остаются в голове. Даже простой вопрос: “Где лежит центр описанной окружности?” запускает череду тщетных попыток угадать ответ. “В точке пересечения медиан! Нет, высот! Нет, биссектрис!”

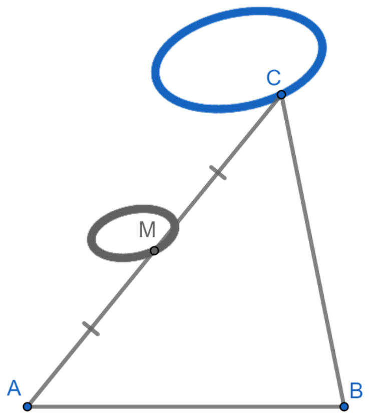
Моя гипотеза такова: если все четыре шага доказательства рассказываются вместе, то ученики тратят все усилия, чтобы понять логические переходы между ними. В итоге, ни один из шагов доказательства не остается. Решение этой проблемы - проходить теорему в несколько подходов на разных уроках.

Первый пункт доказательства - существование точки, равноудаленной от всех вершин. На самом деле, он уже был проделан несколько уроков назад в задачах на дополнение заготовок, так что нужно его только вспомнить. Эта задача специально помещалась в подборку, чтобы подготовить ребят к сложному доказательству.

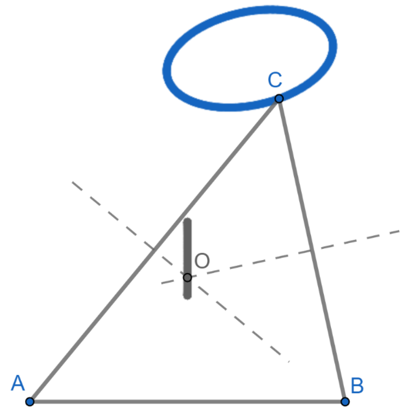


Трудность второго шага (третий серединный перпендикуляр проходит через ту же точку) заключается в том, чтобы разобраться, что именно утверждает теорема. До этого момента мы ни разу не доказывали теорему, что какие-то три прямые пересекаются в одной точке. Попробуйте спросить ребят, как такое вообще можно доказать. Готов поспорить, что в ответ прозвучит хоровое молчание. Даже для того чтобы понять формулировку, требуется дополнительная подготовка.

Один из вариантов такой подготовки - посмотреть, что происходит на динамическом чертеже[12].



Если двигать вершину треугольника свободно, то середина стороны повторяет траекторию, ...



… а точка пересечения двух серединных перпендикуляров неизменно движется по прямой.

[12] Ссылка на динамический чертеж: https://www.geogebra.org/material/edit/id/eprrm3gd

Зафиксируем отрезок AB и будем двигать точку C произвольно (на чертежах выше из эстетических соображений изображена траектория движения по эллипсу, но это совершенно не обязательно). Рассмотрим траектории разных точек треугольника.

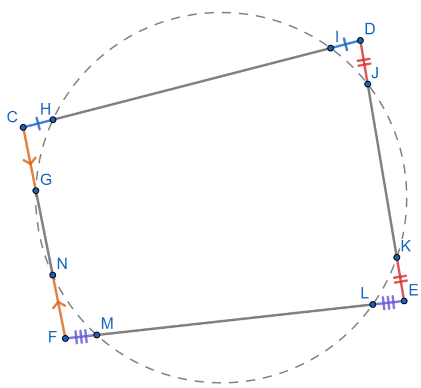
Если взять середину стороны AC, то ее траектория - уменьшенная копия траектории C[13]. А вот если взять серединные перпендикуляры к отрезкам AC и BC, то их точка пересечения ведет себя совсем иначе. Как не двигай точку C, точка O всегда скользит по прямой. Если продлить эту прямую, то становится очевидно, что O скользит по серединному перпендикуляру к отрезку AB. Теперь теорему из начала раздела можно переформулировать на динамический язык:

> **Теорема 2’** *(динамическая формулировка)***.** Если две вершины треугольника зафиксированы, а третья свободно перемещается по плоскости, то точка пересечения серединных перпендикуляров к меняющимся сторонам скользит по серединному перпендикуляру к фиксированному отрезку.

Доказывается она, разумеется, также, но кажется намного более визуально понятной.

Закончу этот раздел подборкой (очень трудной!) задач на точку пересечения серединных перпендикуляров. Все эти задачи раскрывают идеи заложенные в доказательстве теоремы об описанной окружности. В зависимости от класса можно обсуждать две, три или четыре задачи. Последние две задачи можно предложить самым сильным ученикам.

1. Где лежит центр описанной окружности треугольника? Почему? Может ли он лежать на стороне треугольника? Вне треугольника?
2. Всегда ли вокруг четырехугольника можно описать окружность?
3. На плоскости нарисована окружность, но центр не отмечен. Как его найти?
4. На окружности отметили 4 точки, а затем окружность стерли. Как ее восстановить?
5. В четырехугольнике известно, что три серединных перпендикуляра к с сторонам пересекаются в одной точке. Докажите, что и четвертый проходит через эту точку.
   Будет ли верна задача, если заменить четырехугольник на пятиугольник?
6. Окружность отсекает на сторонах треугольника равные отрезки так, как показано на рисунке. Докажите, что этот четырехугольник можно вписать в окружность.



Идеи решений:

[13] Интуитивно это ясно, но строгое доказательство требует понимания подобия и гомотетии.

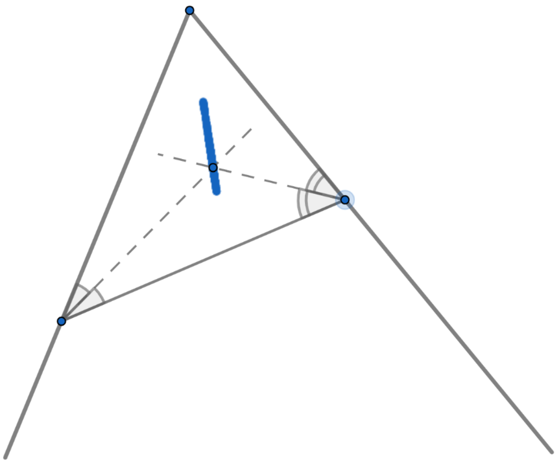
1. Мы уже знаем, что центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров. Поэкспериментировав можно убедиться, что в тупоугольных треугольниках центр описанной окружности будет лежать вне треугольника. Эксперимент показывает, что в прямоугольном треугольнике центр попадает на гипотенузу. На самом деле, мы уже доказывали, что это так, когда обсуждали, что прямой угол опирается на диаметр.
2. Не всегда. Вокруг треугольника можно описать только одну окружность. Если мы возьмем треугольник и четвертую точку **не** на описанной окружности, то вокруг такого четырехугольника точно нельзя будет описать окружность.
3. Можно отметить на окружности три точки. Тогда получится треугольник и описанная окружность. Но мы знаем, что центр описанной окружности в точке пересечения перпендикуляров.
4. Точно так же, как и в предыдущем пункте. Центр окружности равноудален от всех четырех точек. Значит, нужно провести серединные перпендикуляры к сторонам. Достаточно провести два, но если провести больше, то можно заранее сказать, что они пересекуться в одной точке.
5. Рассуждение точно такое же, как для треугольника. Точка пересечения равноудалена от первой и второй вершины, от второй и третьей, от третьей и четвертой. Значит, равноудалена от первой и четвертой. Значит, последний серединный перпендикуляр через нее проходит.
6. Проведем серединный перпендикуляр к HI. Он будет и серединным перпендикуляром к стороне CD, так как CH и ID равны (то есть середины CD и HI совпадают). Аналогично, серединные перпендикуляры к NG, ML, JK являются серединными перпендикулярами к CF, FE и ED. Но серединные перпендикуляры к HI, GN, ML, KJ пересекаются в одной точке (в центре пунктирной окружности). Значит, там же пересекаются и перпендикуляры к сторонам. А раз серединные перпендикуляры к сторонам пересекаются в одной точке, то точка их пересечения равноудалена от всех вершин и вокруг четырехугольника можно описать окружность.
   Комментарий. Заодно мы получили, что центры описанной окружности и пунктирной совпадают.

Вписанная и вневписанная окружность

Сложность: высокая

В предыдущем разделе мы фиксировали сторону треугольника и свободно двигали третью вершину. Зафиксируем теперь угол, а двум оставшимся вершинам треугольника разрешим скользить по сторонам угла. Проследим за траекторией точки пересечения биссектрис подвижных углов[14]:

[14] Ссылка на динамический чертеж: https://www.geogebra.org/geometry/vb9aadpj

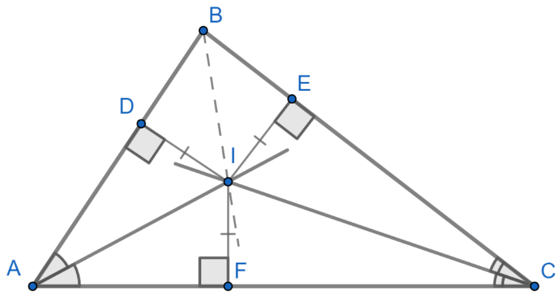


Визуально кажется, что точка движется по биссектрисе исходного угла. Так и есть. Это наблюдение можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3’ *(динамическая формулировка)***.** Если угол треугольника фиксирован, а две вершины свободно скользят по его сторонам, то точка пересечения биссектрис подвижных углов движется по биссектрисе неподвижного угла.

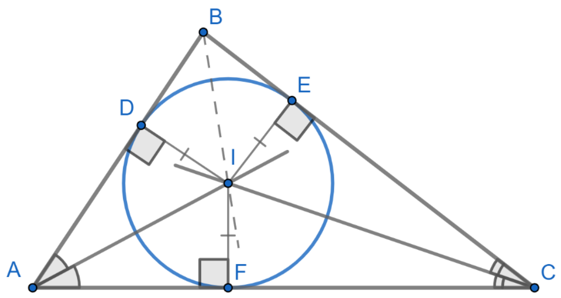
Это можно сформулировать и статически:

Теорема 3 *(статическая формулировка)***.** Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

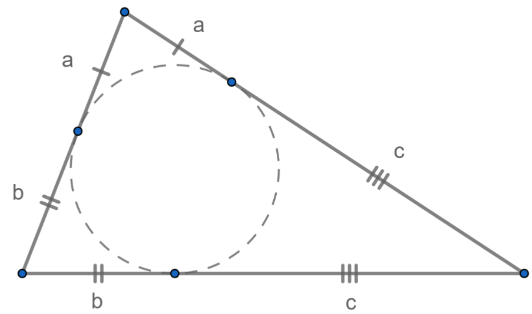


Доказательство. Рассмотрим точку пересечения двух биссектрис AI и CI и опустим перпендикуляры на стороны. Точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от его сторон. Значит DI=FI (лежат на биссектрисе AI). Аналогично, EI=FI. Получаем, что DI=FI=EI, то есть все три перпендикуляра равны. Но тогда, в частности, равны перпендикуляры DI и EI, то есть точка пересечения биссектрис двух углов равноудалена и от сторон третьего угла, то есть лежит на третьей биссектрисе. Что и требовалось доказать.

Следствие. В треугольник можно вписать окружность, притом только одну. Её центр - точка пересечения биссектрис.



Иногда, чтобы глубже понять конструкцию, нужно убрать все лишнее. Скроем центр вписанной окружности, а также радиусы. Теперь на картинке можно увидеть три пары равных касательных:



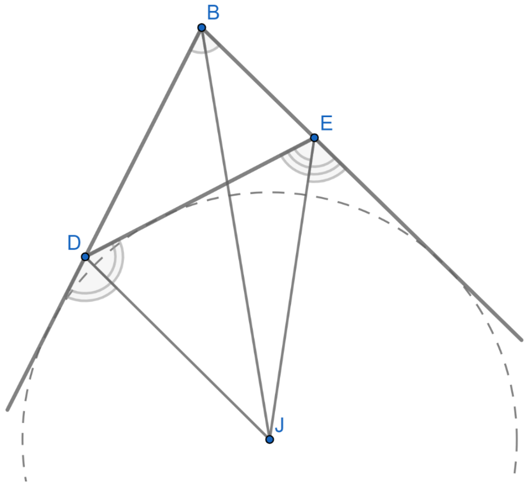
Зная стороны треугольника можно даже найти длины отрезков касания. Например, если стороны, 3, 4 и 5, то:

$$a + b = 3$$
$$b + c = 5$$
$$c + a = 4$$

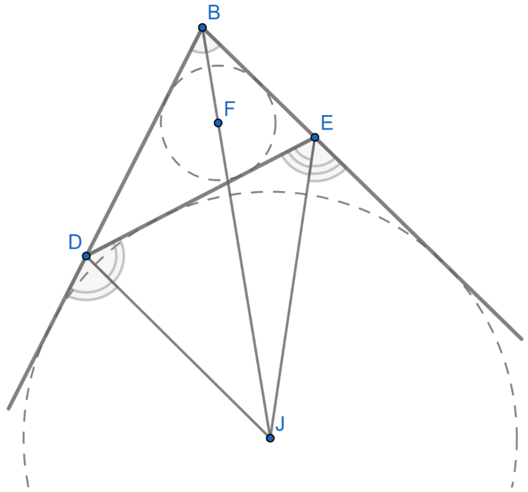
Сложив все три равенства получаем, что $2(a + b + c) = 12$, $a + b + c = 6$ (то есть полупериметр!). Отсюда находим $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. Или как остроумно заметила одна моя ученица: “Сколько штрихов на чертеже, такая и длина.”

Конструкция, связанная с биссектрисами треугольника очень богатая и обсуждать ее можно очень по разному. Например, если рассмотреть две биссектрисы не внутренних углов, а внешних, то мы получим вневписанную окружность[15]:

[15] Кстати, эту конструкцию мы уже видели, когда доделывали заготовки с биссектрисами.



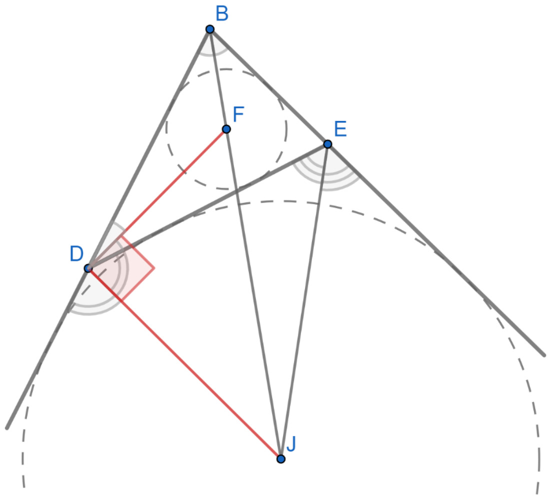
Вневписанная окружность



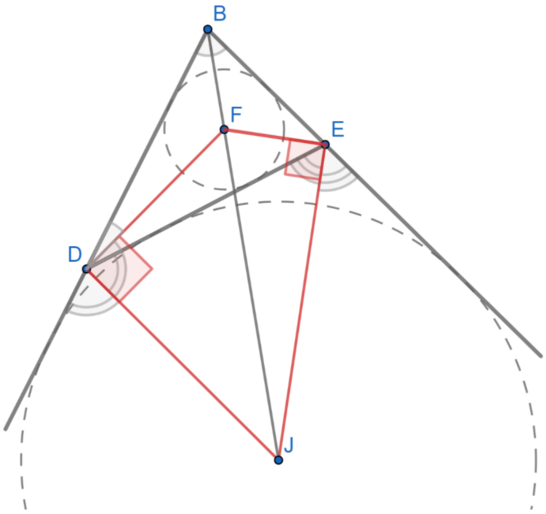
Вписанная и вневписанная окружности

Её центр также лежит на биссектрисе внутреннего угла (доказательство аналогично доказательству для вписанной окружности, необходимо рассмотреть расстояния до сторон). Изобразим вписанную и вневписанную окружность на одном чертеже. Их центры будут на одной прямой с вершиной B.

Посмотрим на угол FDG. Он всегда оказывается прямым (биссектрисы смежных углов перпендикулярны).То же верно и для угла FEJ и теперь мы получаем очень интересную ситуацию. Четырехугольник DFEJ имеет два прямых угла.

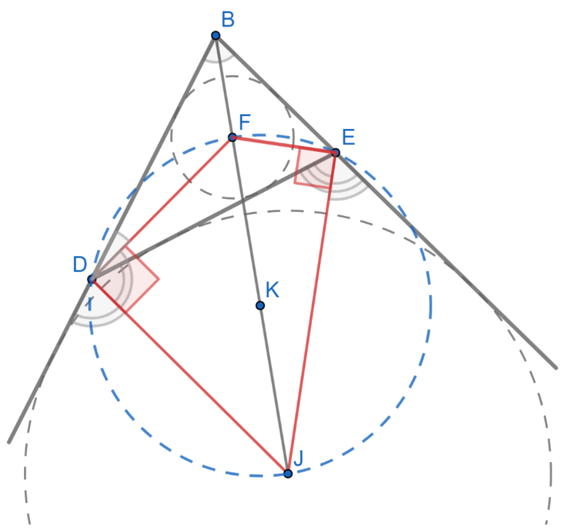


Один прямой угол



Четырехугольник с парой прямых углов

И последний шаг: если провести окружность с диаметром FJ, то получаем, что и точки D, и точка E на ней лежит (так как прямой угол опирается на диаметр). Итого на чертеже: вписанная и вневписанная окружности, три точки на одной прямой (два центра и вершина) и четыре точки на еще одной окружности (две вершины и два центра).



Ну, пожалуй, достаточно для седьмого класса.

Приложение. Планирование темы для двухчасовой и трехчасовой программ
В зависимости от числа часов геометрии тему можно проходить по-разному. В таблице собраны возможные планирования и ожидаемые результаты, в зависимости от них.

	Минимум 7 уроков	**Оптимум** 11 уроков	**Максимум** 15 уроков
Знакомство с окружностью	2 урока	2 урока	2 урока
Как нарисовать чертеж? Порядок построений. Идея анализа	2 урока	2 урока	2 урока
Азбука ГМТ	2 урока (4 ГМТ)	1 урок (4 ГМТ)	1 урок (5 ГМТ)
Доделываем заготовки. Окружность, серединный перпендикуляр, биссектриса.	По 1 задаче	По 1 уроку	По 1 уроку
Доделываем заготовки Окружность на диаметре	нет	нет	1 урок
Разные задачи на ГМТ	нет	нет	1 урок
Базовые построения циркулем и линейкой	1 урок	1 урок	1 урок
Описанная окружность.	знакомство	1 урок	1 урок
Решение задач на точку пересечения серединных перпендикуляров	нет	нет	1 урок
Вписанная окружность	знакомство	1 урок	1 урок
Вневписанная окружность	нет	нет	1 урок
Легче проходить вписанную и описанную окружность?	нет	да	да
Легче проходить вписанные углы?	нет	нет	да