Симметричные неравенства

М.А. Горелов

Доклад посвящен решению задач на доказательство неравенств. Каждая такая задача сводится к задаче оптимизации. Последние решаются с помощью необходимых условий, основанных на использовании свойств симметрии исходного неравенства. По сравнению с традиционными методами это обычно позволяет значительно сократить алгебраические выкладки. Кроме того, показывается, что такой общий математический прием, как использование симметрии, может быть систематически введен в школьную практику. Читатель без труда найдет в олимпиадных сборниках другие задачи нужной степени сложности, решаемые данным методом.

1. Тринадцатое доказательство

Нашей ближайшей целью будет доказательство неравенства Коши[1] между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 ... a_k}.$$

Это неравенство выполняется для всех неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Левая часть этого неравенства называется средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Со времени возникновения этого понятия термин «арифметика» немного поменял свое значение, но происхождение названия «среднее арифметическое» остается понятным: в его основе лежит основная арифметическая операция – сложение.

Правая часть неравенства называется средним геометрическим. Это название, видимо, связано со следующим обстоятельством. Во время появления этого понятия еще не знали иррациональных чисел. Поэтому среднее геометрическое $G=\sqrt{ab}$ двух чисел a и b определяли с помощью пропорции $\dfrac{a}{G}=\dfrac{G}{a}$. А такие пропорции изучались геометрическими средствами (с помощью теоремы Фалеса и родственных ей утверждений).

Перепишем неравенство Коши в эквивалентной форме

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_k}{k}\right)^k \geq a_1 a_2 ... a_k.$$

Левая и правая части этого неравенства – однородные многочлены степени k. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\dfrac{a_1+a_2+...+a_k}{k}=1$ или $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$.

Будем искать максимальное значение функции $\Phi(a_1,a_2,...,a_k)=a_1 a_2 ... a_k$ по всем неотрицательным значениям переменных, удовлетворяющим равенству $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$. Если мы убедимся, что это максимальное значение равно 1, задача будет решена. Пусть искомое максимальное значение равно $\Phi(b_1,b_2,...,b_k)$.

Выберем какие-нибудь две переменные, например, a_1 и a_2 и рассмотрим функцию двух переменных $F(a_1,a_2)=a_1 a_2 b_3 \ldots b_k$. Число $F(b_1,b_2)$ будет наибольшим значением функции $F(a_1,a_2)$ на множестве неотрицательных чисел a_1 и a_2, удовлетворяющих равенству $a_1+a_2+b_3\ldots+b_k=k$.

[1] Огюстен Луи Коши (1789–1857) – французский математик. Он известен оригинальными результатами в самых разных областях математики, от теории чисел до геометрии и механики. Но большое внимание он уделял и систематизации накопленных к тому времени знаний. В частности, в 1821 г. вышел в свет его «Курс анализа Королевской политехнической школы», в котором было опубликовано доказательство неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Это доказательство до сих пор остается наиболее популярным.

Выразив переменную a_2 из этого равенства, получим функцию одной переменной $f(a_1)=a_1(k–b_3–…–b_k–a_1)b_3…b_k$. Значение a_2 неотрицательно, если $a_1\le k–b_3–…–b_k$. Поэтому максимальное значение этой функции на отрезке $[0,k–b_3–…–b_k]$ равно $f(b_1)$.

Но $F(b_1,b_2)=F(b_2,b_1)$, следовательно, $f(b_1)=f(k–b_3–…–b_k–b_1)$, то есть максимум функции $f(a_1)$ на отрезке $[0,k–b_3–…–b_k]$ достигается при $a_1=b_1$ и при $a_1=k–b_3–…–b_k–b_1$. Но функция $f(a_1)$ – это хорошо знакомый всем квадратный трехчлен. Она не может иметь двух разных точек максимума внутри отрезка. Значит, выполняется одно из двух условий: либо одно из чисел b_1 иди b_2 равно нулю, либо $b_1=b_2$.

В первом случае значение функции $F(b_1,b_2)$ равно нулю, что уж конечно не может быть ее максимальным значением. Поэтому имеет место второе условие.

Но вместо переменных a_1и a_2 можно было выбрать любые две переменные и придти к аналогичному равенству. Значит, в точке максимума функции $\Phi(b_1,b_2,...,b_k)$ значения всех переменных равны, а, следовательно, равны 1. Но тогда и значение функции равно 1, что и требовалось доказать.

Отметим одно важное обстоятельство. Мы пользовались *необходимыми* условиями, и нашли всего одну точку максимума. Следовательно, точка максимума действительно единственна, и равенство в неравенстве Коши достигается тогда и только тогда, когда все числа равны. Во многих применениях неравенства Коши это имеет существенное значение.

На выделение случаев, когда в доказанном неравенстве имеет место равенство, следует обращать внимание и в других задачах. В дальнейшем я не буду делать этого, но только потому, что эти вопросы решаются относительно несложно, а постоянное упоминание случаев равенства делает изложение слишком тяжеловесным.

В классической книге Э. Беккенбаха[2] и Р. Беллмана[3] «Неравенства»[4] (см. [ББе07]) имеется двенадцать доказательств неравенства Коши. Выше приведено еще одно. Какой в этом смысл? Все дело в методе. Области применения разных методов часто пересекаются, но, как правило, не совпадают. В оставшейся части работы мы будем разбираться в возможностях предложенного выше метода.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию приведенного доказательства. Мы нарисуем картинки для случая трех переменных a_1, a_2, a_3.

Каждому набору a_1, a_2, a_3 значений переменных соответствует в трехмерном пространстве точка с координатами (a_1,a_2,a_3). Равенство $a_1+a_2+a_3=3$ задает в этом пространстве плоскость, проходящую через точки с координатами (3,0,0), (0,3,0) и (0,0,3). Неравенства $a_1\ge0$, $a_2\ge0$, $a_3\ge0$ вырезают на данной плоскости правильный треугольник с вершинами в этих точках (см. рис. 1). Нарисуем этот треугольник отдельно (рис. 2).

---

[2] Эдвин Форд Беккенбах (1906–1982) – американский математик. С неравенством Беккенбаха мы еще столкнемся ниже

[3] Ричард Беллман (1920–1984) – американский математик, создатель метода динамического программирования.

[4] Молодому читателю можно рекомендовать книгу тех же авторов [ББе61].

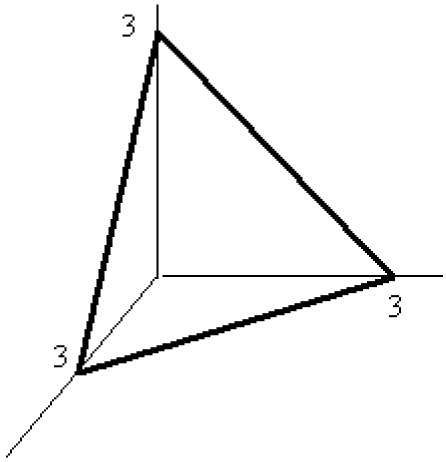

Рис. 1

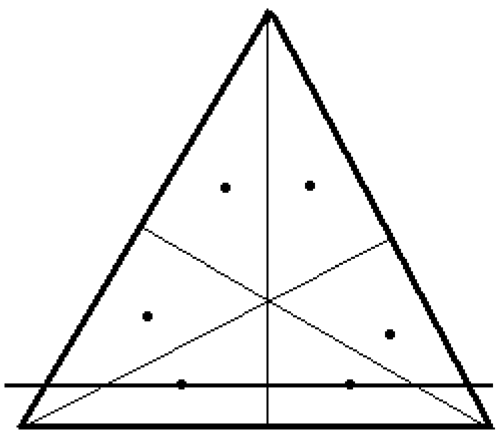

Рис. 2

Отметим на этом рисунке точку (b_1,b_2,b_3), в которой достигается максимум функции $\Phi(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3$. На границе треугольника функция принимает нулевое значение, значит, точка максимума должна лежать внутри треугольника.

В силу коммутативности сложения точки (b_1,b_3,b_2), (b_3,b_2,b_1), (b_2,b_1,b_3), (b_3,b_1,b_2) и (b_2,b_3,b_1) лежат в том же треугольнике. Первые три из них получаются из исходной точки симметриями относительно высот треугольника. Оставшиеся две получаются из точки (b_1,b_2,b_3) поворотами на 120° и 240° относительно центра треугольника. В силу коммутативности умножения, функция $\Phi(a_1, a_2, a_3)$ принимает в этих точках такое же, а, следовательно, максимальное значение.

Допустим, что среди трех точек (b_1,b_3,b_2), (b_3,b_2,b_1), (b_2,b_1,b_3) имеется хотя бы одна, отличная от (b_1,b_2,b_3). Проведем через нее и точку (b_1,b_2,b_3) прямую. Она пересечет наш треугольник по некоторому отрезку. Сужение функции $\Phi(a_1, a_2, a_3)$ на этот отрезок будет иметь максимумы в двух выбранных точках. Но это сужение – квадратный трехчлен. Поэтому оно не может иметь двух точек максимума. Полученное противоречие доказывает, что все четыре точки (b_1,b_2,b_3), (b_1,b_3,b_2), (b_3,b_2,b_1), (b_2,b_1,b_3) совпадают с центром треугольника. А в центре треугольника значение функции $\Phi(a_1, a_2, a_3) = 1$.

2. Симметрические неравенства

Задача 1. (Московская олимпиада, 1963) a, b, c – любые положительные числа. Докажите, что $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

Решение. Умножим неравенство на наименьший общий знаменатель и перенесем все слагаемые в левую часть. Получим неравенство вида $\Phi(a,b,c)\geq 0$. Вид функции $\Phi(a,b,c)$ нетрудно найти, но даже это нам не потребуется. Достаточно понимать, что $\Phi(a,b,c)$ – симметрический однородный многочлен третьей степени.

Задача будет решена, если мы докажем, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geq 0$ справедливо для всех *неотрицательных* значений переменных[5]. А теперь можно использовать стандартные рассуждения, которые вряд ли стоит теперь повторять. В результате мы придем к тому, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geq 0$ достаточно проверить в трех случаях:

1) $a=b=c=\frac{1}{3}$,

2) $a=b=\frac{1}{2}$, $c=0$.

3) $a=1$, $b=c=0$.

В первых двух случаях неравенство $\Phi(a,b,c)\geq 0$ равносильно исходному, поэтому можно проверять последнее. Это уже банальные вычисления, но и их можно немного упростить. В силу того, что исходное неравенство однородно (степени 0), оно выполняется при $a=b=c=\frac{1}{3}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется при $a=b=c=1$. А в этом случае левая часть неравенства как раз равна $\frac{3}{2}$. Точно также проверка случая 2) сводится к вычислению левой части данного в условии неравенства при $a=b=1$, $c=0$.

Остается разобраться со случаем 3). Если мы умножим данное в условии неравенство на наименьший общий знаменатель, и подставим значения $a=1$, $b=c=0$, то в правой части полученного неравенства окажется нуль. А многочлен в левой части имеет только положительные коэффициенты, поэтому его значение в интересующей нас точке, уж во всяком случае, неотрицательно. Это завершает решение задачи.

Заметим, что при решении двух последних задач мы ссылались на свойства кубических многочленов только для сокращения рассуждений. На самом деле, использовавшиеся там многочлены от одной переменной имеют вторую степень. Чтобы это понять, лучше вместо переменной a использовать переменную $t=a–b$. С использованием равенства $a+b=1–c_0$ через t можно выразить a и b и подставить в $F(a,b)$. В силу того, что исходный многочлен $\Phi(a,b,c)$ не менялся при перестановке переменных a и b, получившийся многочлен $g(t)$ будет четным. А поскольку его степень не превосходит трех, то на самом деле она равна 2 или 0.

Результат последней задачи называют неравенством Несбита[6] (A.M. Nesbitt) в честь математика, опубликовавшего эту задачу в 1903 г. Неравенство Несбита имеет большое число обобщений и аналогов. Одно из них рассмотрим прямо сейчас.

Следующая задача была предложена в 1990 г. в журнале American Mathematical Monthly (задача E3263). Ниже она сформулирована так, как в журнале, включая звездочку, обозначающую повышенную трудность.

Задача 2. Для $1\leq k\leq n$ рассмотрим функцию

[5] Так как многочлен – функция непрерывная, из того, что неравенство $\Phi(a,b,c)\geq 0$ справедливо при всех положительных значениях переменных, следует, что оно выполняется и при всех неотрицательных числах a, b, c. Разумеется, обратное верно всегда. Поэтому, усиливая утверждение, мы, по сути, ничего не меняем.

[6] В другом контексте имя автора этой задачи мне не встречалось.

$$\Phi_k(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{a_1}{1-a_1}\cdot\frac{a_2}{1-a_2}\cdot...\cdot\frac{a_k}{1-a_k}+...+\frac{a_{n-k+1}}{1-a_{n-k+1}}\cdot\frac{a_{n-k+2}}{1-a_{n-k+2}}\cdot...\cdot\frac{a_n}{1-a_n},$$

где в сумму входят слагаемые, отвечающие всем наборам индексов $1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n$. Пусть $M_k(n)$ – наибольшее значение этой функции для всех положительных значений переменных $a_1,a_2,\ldots,a_n$, удовлетворяющих условию $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$. Нетрудно видеть, что $M_n(n)=(n-1)^{-n}$.

а) Докажите, что $M_2(n)=1$.

б) Докажите, что $M_3(4)=4/27$.

в*) Для каких пар k, n, удовлетворяющих условию $3\le k\le n$ верно равенство $M_k(n)=C_n^k(n-1)^{-k}$? (C_n^k – число сочетаний).

Решение. Прежде всего, обсудим, почему эта задача обобщает неравенство Несбита? В левой части неравенства Несбита стоит однородная функция степени ноль. А потому его достаточно доказать для случая $a+b+c=1$. Но тогда его можно записать в виде $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}\ge\frac{3}{2}$. В левой части этого неравенство стоит функция $\Phi_1(a,b,c)$. Правда, в этой задаче ищется минимум этой функции (наибольшего значения, очевидно, нет).

Равенство $M_n(n)=(n-1)^{-n}$, о котором говорится перед условием, сводится к неравенству $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_k)\ge(k-1)^k a_1a_2\ldots a_k$, которое доказывается аналогично неравенству Коши.

Теперь приступим непосредственно к решению. Положим $m_2(n)=1$ и $m_k(n)=C_n^k(n-1)^{-k}$ при $k>2$ и докажем неравенство $\Phi_k(a_1,a_2,...,a_n)\ge m_k(n)$.

Умножим это неравенство на произведение $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)$ и докажем, что получившееся неравенство выполняется для всех *неотрицательных* значений переменных, в сумме дающих единицу. В правой части будет стоять указанное произведение, умноженное на константу, т.е. в правую часть каждая из переменных $a_1,a_2,\ldots,a_n$ будет входить в первой степени. В левой части будет стоять n слагаемых, в каждое из которых будет входить сомножителем либо a_i, либо $1-a_i$, но не оба этих выражения вместе. Поэтому и в левую часть каждая переменная будет входить в первой степени. А потому, если мы перенесем правую часть налево и зафиксируем значения всех переменных, кроме двух, то получим многочлен второй степени относительно двух оставшихся переменных. Значит, рассуждения, использовавшиеся в тринадцатом доказательстве неравенства Коши, пройдут дословно.

В результате мы придем к тому, что неравенство достаточно доказать для случая, когда l переменных положительны и равны между собой, а остальные равны нулю ($l=1,2,\ldots,n$).

При $l=1$ в правой части стоит ноль, а в левой – сумма очевидно неотрицательных слагаемых. Поэтому этот случай очевиден. А при $l>1$ полученное неравенство равносильно исходному, значит, его можно и проверять.

Если $k>l$, то значение максимизируемой функции равно нулю, и все очевидно.

При $l\ge k$ значения положительных переменных равны $1/l$, а значение функции $\Phi_k(a_1,a_2,...,a_n)$ равно $C_l^k\cdot\frac{1}{(l-1)^k}$. Из этих чисел нужно выбрать наибольшее.

Дальнейшие рассуждения придется проводить для каждого пункта отдельно.

В пункте а) имеем $C_l^2\cdot\frac{1}{(l-1)^2}=\frac{l(l-1)}{2}\cdot\frac{1}{(l-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{l-1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{l-1}\right)$. Очевидно, это выражение уменьшается с ростом l, поэтому наибольшее значение соответствует $l=2$ и равно единице.

Обращаясь к пункту б) рассмотрим значения

$$C_l^3\cdot\frac{1}{(l-1)^3}=\frac{l(l-1)(l-2)}{6}\cdot\frac{1}{(l-1)^3}=\frac{1}{6}\cdot\frac{l^2-2l}{l^2-2l+1}=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{l^2-2l+1}\right)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{(l-1)^2}\right).$$

Это выражение растет с ростом l, а потому наибольшее значение достигается при $l=n$. При $n=4$ получим ответ на поставленный вопрос.

А, кроме того, здесь содержится ключ к общему случаю. А именно, при $k>3$ имеем

$$C_l^k\cdot\frac{1}{(l-1)^k}=\frac{l(l-1)...(l-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{(l-1)^k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{l(l-2)}{(l-1)^2}\cdot\frac{l-3}{l-1}\cdot...\cdot\frac{l-k+1}{(l-1)}=$$

$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{(l-1)^2}\right)\left(1-\frac{2}{l-1}\right)...\left(1-\frac{k-2}{l-1}\right).$$

Это выражение также возрастает с ростом l, поэтому максимум функции $\Phi_k(a_1,a_2,...,a_n)$ достигается, когда значения всех переменных равны, то есть утверждение их пункта в) справедливо при всех $n\geq3$.

Стоило ли тут ставить звездочку?

3. Неравенства для сторон треугольника

Рассмотрим немного более сложный пример.

Задача 3. (Международная олимпиада, 1964) Обозначим через a, b, c длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq3abc$.

Решение. Прежде всего, заметим, что в силу однородности можно считать, что периметр треугольника равен 12. Нарисуем картинки, аналогичные изображенным на рис. 1 и 2. Числам a, b, c соответствуют точки правильного треугольника, высекаемого на плоскости, проходящей через точки (12,0,0), (0,12,0) и (0,0,12) координатными плоскостями. Кроме того, должны выполняться неравенства $a<b+c$, $b<a+c$ и $c<a+b$. Эти точки заполняют внутренность меньшего правильного треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника. Докажем, что данное в условии неравенство справедливо даже при выполнении условий $a\leq b+c$, $b\leq a+c$ и $c\leq a+b$.

Теперь мы попадаем в привычную ситуацию и, повторив стандартные рассуждения, придем к выводу, что неравенство достаточно проверить в трех случаях:

1) Имеют место все три неравенства $a<b+c$, $b<a+c$ и $c<a+b$ и тогда $a=b=c=4$. В этом случае доказываемое неравенство обращается в равенство.

2) Ровно одно из неравенств $a\leq b+c$, $b\leq a+c$ и $c\leq a+b$ обращается в равенство. Если это первое неравенство, то тогда $a=6$, $b=c=3$. В этом случае приходим к верному неравенству $108<162$.

3) Два из неравенств $a\leq b+c$, $b\leq a+c$ и $c\leq a+b$ обращаются в равенство. Если это первые два неравенства, то $a=b=6$ и $c=0$. В этом случае данное неравенство обращается в равенство.

Все случаи разобраны и задача решена.

4. Неравенство Минковского

Иногда бывает удобно доказывать неравенства, вычисляя минимум вспомогательной функции не при фиксированной сумме переменных, а при фиксированном произведении. Продемонстрируем это на примере результата, полученного Германом Минковским[7].

Для неотрицательных чисел $x_1, x_2,\ldots,x_k$ и $y_1, y_2,\ldots,y_k$ справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{(x_1+y_1)(x_2+y_2)...(x_k+y_k)}\geq\sqrt[k]{x_1x_2...x_k}+\sqrt[k]{y_1y_2...y_k}\ .$$

Прежде всего, воспользуемся свойством однородности этого неравенства. Если одно из чисел $x_1, x_2,\ldots,x_k$ равно нулю, неравенство очевидно. В противном случае неравенство можно поделить на $\sqrt[k]{x_1x_2...x_k}$:

[7] Герман Минковский (1864–1909) – немецкий математик, сумевший объединить геометрию с теорией чисел и физикой. Один из учителей Альберта Эйнштейна.

$$\sqrt[k]{\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left(1+\frac{y_2}{x_2}\right)...\left(1+\frac{y_k}{x_k}\right)} \geq 1+\sqrt[k]{\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}\cdot...\frac{y_k}{x_k}}.$$

Введем новые переменные $a_1=\frac{y_1}{x_1},\ a_2=\frac{y_2}{x_2},...,a_k=\frac{y_k}{x_k}$. Доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\sqrt[k]{(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_k)} \geq 1+\sqrt[k]{a_1a_2...a_k}.$$

Фиксируем произвольное положительное число C и будем искать наименьшее значение функции $\Phi(a_1,a_2,\ldots a_k)=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_k)$ при условии $a_1a_2\ldots a_k=C$. Достаточно доказать, что искомый минимум достигается при $a_1=a_2=\ldots=a_k$.

Допустим противное. Тогда, не ограничивая общности можно считать, что этот минимум достигается в некоторой точке $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$ такой, что $b_1\neq b_2$.

Тогда функция двух переменных $F(a_1,a_2)=\Phi(a_1,a_2,b_3\ldots b_k)$ достигает наименьшего значения на множестве переменных, удовлетворяющих условию $a_1a_2=c=\frac{C}{b_3b_4...b_k}$, в двух точках (a_1,a_2) и (a_2,a_1).

Значит, функция одной переменной $f(t)=\Phi\left(\sqrt{a_1a_2}t,\frac{\sqrt{a_1a_2}}{t}\right)$ достигает наименьшего значения при $t=\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$ и при $t=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}$.

Но такая функция не может достигать минимума в двух разных точках. В самом деле. Эта функция имеет вид $f(t)=\alpha t+\frac{\beta}{t}+\gamma$, где α, β, γ – некоторые константы. Если m – наименьшее значение этой функции, то функция $f(t)-m$ всюду неотрицательна, и равна нулю в двух разных точках. Тогда и функция $t(f(t)-m)$ всюду неотрицательна и равна нулю в двух точках, то есть принимает наименьшее значение при двух разных значениях t. Но этого не может быть, так как $t(f(t)-m)$ – квадратный трехчлен.

Полученное противоречие доказывает неравенство Минковского.

5. Циклические неравенства

Термином «симметрический» выражают, в известном смысле, максимальную степень симметрии. Чуть меньший, но все же, значительный интерес, представляют некоторые другие классы неравенств.

Рассмотрим функции k переменных $x_1,x_2,\ldots,x_k$. Допустим, что функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ остается неизменной при циклической перестановке переменных $x_1\to x_2$, $x_2\to x_3,\ldots$, $x_{k-1}\to x_k$, $x_k\to x_1$, то есть $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=f(x_2,x_3,\ldots,x_k,x_1)$. Тогда $f(x_2,x_3,\ldots,x_k,x_1)=f(x_3,x_4,\ldots,x_1,x_2)$ и по сделанному предположению $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)=f(x_3,x_4,\ldots,x_1,x_2)$, то есть функция остается неизменной при перестановке $x_1\to x_3$, $x_2\to x_4,\ldots,x_{k-1}\to x_1$, $x_k\to x_2$. Продолжая подобные рассуждения, мы найдем k перестановок, включая тождественную, которые не меняют рассматриваемую функцию.

Если этими перестановками исчерпывается список всех перестановок, при которых функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ остается неизменной, то неравенство $f(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geq 0$ называется циклическим.

Если вернуться к описанной выше геометрической интерпретации, то можно заметить, что циклическое неравенство не меняется при поворотах изображенного на рисунках 1 и 2 треугольника на 120° и 240° вокруг его центра, и меняется при осевых симметриях.

Например, циклическим является неравенство $a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a\geq 0$. Это неравенство не слишком интересно, поскольку оно почти очевидным образом сводится к неравенству Коши. Но есть и менее очевидные примеры.

Задача 4. (III этап Всероссийской олимпиады, 1993 г.) Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство $1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2$.

Решение. Докажем левое неравенство. Избавившись от знаменателя, приведем его к эквивалентному виду

$$(a+b)(b+c)(c+a)<a(b+c)(c+a)+b(a+b)(c+a)+c(a+b)(b+c). \qquad (1)$$

Докажем сначала, что для всех *неотрицательных* значений переменных выполняется нестрогое неравенство

$$(a+b)(b+c)(c+a)\leq a(b+c)(c+a)+b(a+b)(c+a)+c(a+b)(b+c). \qquad (2)$$

Пусть $\Phi(a,b,c)$ – разность левой и правой частей неравенства (2). Так как этот многочлен однородный, можно доказывать его только для тех значений переменных, которые удовлетворяют равенству $a+b+c=3$. Пусть максимальное значение многочлена $\Phi(a,b,c)$ на этом множестве равно $\Phi(a_0,b_0,c_0)$. Поскольку неравенство циклическое, значение $\Phi(b_0,c_0,a_0)$ тоже будет максимальным.

Допустим, что все три числа a_0,b_0,c_0 положительны, и среди них есть, по крайней мере, два различных. Рассмотрим функцию $f(t)=\Phi(ta_0+(1-t)b_0,tb_0+(1-t)c_0,tc_0+(1-t)a_0)$. Очевидно, $f(0)=\Phi(b_0,c_0,a_0)$, а $f(1)=\Phi(a_0,b_0,c_0)$. Условия $ta_0+(1-t)b_0\geq 0$, $tb_0+(1-t)c_0\geq 0$ и $tc_0+(1-t)a_0\geq 0$ задают некоторый отрезок, внутри[8] которого лежат точки $t=0$ и $t=1$. Значит, функция $f(t)$ принимает максимальное значение на этом отрезке в двух внутренних точках. Но $f(t)$ – это многочлен третьей степени[9], и такого быть не может. Получено противоречие.

Таким образом, сделанное в предыдущем абзаце предположение неверно, и остается две возможности: все три числа a_0,b_0,c_0 равны 1, или среди этих трех чисел есть ноль.

В первом случае $\Phi(1,1,1)=-4<0$, и если этот случай имеет место, то задача решена.

Во втором случае можно, не ограничивая общности, считать $c=0$, и тогда неравенство сводится к очевидному $ab(a+b)\leq a^2b+ab(a+b)$. Это неравенство обращается в равенство, если одно из чисел равно нулю.

Итак, мы установили, что неравенство (2) имеет место для всех *неотрицательных* значений переменных, и равенство в нем достигается, только если, по крайней мере, две переменных равны нулю. Но тогда для всех положительных значений переменных имеет место строгое неравенство (1).

Левое неравенство доказано. Правое можно вывести из него двумя способами, основанными на слегка скрытой симметрии.

Во-первых, в силу равенства[10]

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=1-\frac{b}{a+b}+1-\frac{c}{b+c}+1-\frac{a}{c+a}=3-\left(\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}\right)$$

правое неравенство можно получить из левого очевидной заменой переменных a на b, b на a и c на c.

Кроме того, данная система неравенств превращается в эквивалентную при замене переменных $a\to\frac{1}{a}$, $b\to\frac{1}{b}$, $c\to\frac{1}{c}$.

---

[8] По сделанному предположению числа a_0,b_0,c_0 строго положительны!

[9] вот теперь действительно третьей.

[10] Прибавление или вычитание единицы к такого рода дробям очень часто бывает полезным. Например, неравенство Несбита таким образом сводится к неравенству между средним араифметическим и средним гармоническим

6. Замены переменных

До сих пор мы пользовались двумя видами симметрии неравенств: их инвариантностью относительно умножения всех переменных на одно и то же число и инвариантностью относительно перестановок переменных. Группа симметрий неравенства может содержать и другие преобразования.

В общем случае проблема поиска таких преобразований является весьма сложной. Но иногда в их поиске помогает замена переменных. Продемонстрируем это на примере.

Задача 5. (Олимпиада Чехии и Словакии, 2005 г.) Пусть a, b, c – положительные числа, удовлетворяющие условию abc=1. Докажите, что

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}.$$

Решение. Применить развитую выше технику мешает «кривое» условие abc=1. Но оно же подсказывает подходящую замену переменных. Введем новые положительные переменные x, y и z так, что $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$. Тогда в силу данного условия получим $c=\frac{z}{x}$, и неравенство перепишется в виде $\frac{xz}{(x+y)(y+z)}+\frac{xy}{(x+z)(y+z)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{3}{4}$. Умножив неравенство на $(x+y)(x+z)(y+z)$, получим $4(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)\geq 3(x+y)(x+z)(y+z)$.

Это уже однородное симметрическое неравенство третьей степени. Его достаточно проверить в трех случаях: 1) $x=y=z=1$, 2) $x=y=1$, $z=0$, 3) $x=1$, $y=z=0$. Последнее не составляет труда. Задача решена.

Проанализируем, что дала замена переменных. Условие исходной задачи не менялось при любых перестановках переменных, а вот доказываемое неравенство было инвариантно только относительно циклических перестановок всех трех переменных. После замены переменных доказываемое неравенство стало симметрическим. Кроме того, оно стало однородным (это общий факт). Здесь и ключ к решению задачи.

Поучительно разобраться, где была спрятана дополнительная степень симметрии, которая проявилась при замене переменных.

Для этого заметим, что использованная замена переменных a, b, c на переменные x, y, z взаимно однозначно отображает множество

$$\{(x,y,z)\colon x>0,\ y>0,\ z>0,\ xyz=1\}$$

на множество

$$\{(a,b,c)\colon a>0,\ b>0, c>0,\ abc=1\}.$$

Чтобы найти обратное преобразование, нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=a,\\ \frac{y}{z}=b,\\ \frac{z}{x}=c,\\ xyz=1.\end{cases}$$

Разделив первое уравнение на третье и умножив результат на четвертое, получим $x^3=\frac{a}{c}$, или $x=\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$. Аналогично $y=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$ и $z=\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$.

Чтобы найти недостающее преобразование сделаем замену $x=\sqrt[3]{\frac{a}{c}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, $z=\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, переставим две переменные[11], положив $u=y$, $v=x$, $w=z$, и выполним обратное преобразование $p=\frac{u}{v}$, $q=\frac{v}{w}$, $r=\frac{w}{u}$. Получим $p=\frac{u}{v}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}}=\sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}=\frac{1}{a}$. Аналогично $q=\frac{1}{c}$ и $r=\frac{1}{b}$.

Значит, наше неравенство должно быть инвариантно относительно замены a на $\frac{1}{a}$, b на $\frac{1}{c}$ и c на $\frac{1}{b}$. Это действительно так, поскольку, например,

$$\frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}+1\right)\left(\frac{1}{c}+1\right)}=\frac{c}{(a+1)(c+1)}.$$

Могли бы вы увидеть эту симметрию без вычислений?

7. Условные неравенства

Еще раз вспомним задачу: среди всех прямоугольников с данным периметром найти прямоугольник с наибольшей площадью. У нее есть не менее интересный аналог: среди всех прямоугольников с данной площадью найти прямоугольник с наименьшим периметром. Вторую задачу можно число логически, не вдаваясь в ее геометрическую природу, свести к первой. Вот как это делается.

Мы уже знаем, что среди всех прямоугольников данного периметра P наибольшую площадь $S=\frac{P^2}{16}$ имеет квадрат. Так вот тот же квадрат имеет наименьший периметр, среди всех прямоугольников площади S.

В самом деле, допустим противное. Пусть имеется прямоугольник Π_0 площади S, периметр которого $P_0<P$. Рассмотрим тогда подобный[12] ему прямоугольник Π с коэффициентом подобия $k=\frac{P}{P_0}$. Он имеет периметр $P_0\cdot\frac{P}{P_0}=P$. А его площадь равна Sk^2. Но по предположению $k>1$. То есть мы нашли прямоугольник периметра P, площадь которого больше, чем площадь квадрата с тем же периметром. А это противоречит полученному выше результату. Значит, сделанное предположение неверно, и ответ во второй задаче тот же, что и в первой.

Полезно иметь в виду следующую геометрическую интерпретацию проведенного рассуждения. Будем отмечать на координатной плоскости точки с координатами (a,b) (см. рис. 6). Тогда прямоугольнику со сторонами a и b будет соответствовать точка этой плоскости.

[11] Именно такого преобразования не хватает для полной симметрии исходного неравенства.

[12] В геометрических задачах свойства преобразования подобия заменяют свойства однородных многочленов.

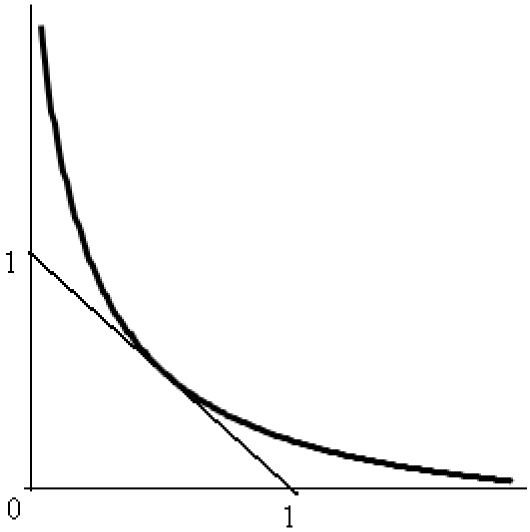

Рис. 6

Прямоугольникам с периметром P будет соответствовать отрезок прямой $2a+2b=P$. Прямоугольникам с периметром большим P будут соответствовать точки, лежащие выше этой прямой, а с меньшим периметром – точки лежащие ниже.

Прямоугольникам, имеющим площадь S, будет соответствовать ветвь гиперболы $b=\frac{S}{a}$. И опять, выше гиперболы лежат точки, соответствующие прямоугольникам большей площади, а ниже – точки соответствующие прямоугольникам меньшей площади.

Решение первой задачи говорит нам, что ветвь гиперболы целиком лежит выше прямой, и лишь в одной точке попадает на прямую. Но тогда прямая целиком лежит ниже ветви гиперболы, и лишь в одной точке попадает на гиперболу. А это и означает, что эта единственная точка и есть решение второй задачи.

Подобная схема рассуждений является довольно общей. Часто приходится доказывать, что некоторое неравенство выполняется при условии выполнения какого-то ограничения. Во многих случаях данное ограничение и доказываемое неравенство можно поменять местами. Такого рода симметрия задачи имеет весьма глубокие корни. Мы продемонстрируем пользу от нее лишь на нескольких примерах.

Задача 6. (Ленинградская олимпиада, 1980 г.) Сумма четырех положительных чисел a, b, c и d равна 1. Докажите, что $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<6$

Решение. Докажем более сильное неравенство

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}\le 4\sqrt{2}\,.$$

Нужную константу угадать нетрудно. Накопленный опыт подсказывает, что «хорошее» симметрическое неравенство часто обращается в равенство, когда значения всех переменных равны между собой.

Неравенство не очень подходит для использования нашего метода, поскольку содержит много радикалов, с которыми мы пока не работали. Попробуем избавиться от них с помощью замены переменных. Обозначим

$$p=\sqrt{4a+1},\ q=\sqrt{4b+1},\ r=\sqrt{4c+1},\ s=\sqrt{4d+1}\,.$$

Тогда

$$a=\frac{p^2-1}{4},\ b=\frac{q^2-1}{4},\ c=\frac{r^2-1}{4},\ d=\frac{s^2-1}{4},$$

и доказываемое неравенство перепишется в виде

$$p+q+r+s\le 4\sqrt{2}\,, \tag{3}$$

а данное условие примет вид

$$\frac{p^2-1}{4}+\frac{q^2-1}{4}+\frac{r^2-1}{4}+\frac{s^2-1}{4}=1,$$

или

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}=2. \qquad (4)$$

Данная задача непривычна тем, что доказываемое неравенство выглядит просто, а вот условие – сложное. Лучше бы было наоборот.

Но нам нужно доказать, что из условия (4) следует неравенство (3). А это равносильно тому, что из условия

$$p+q+r+s>4\sqrt{2}$$

следует

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}\neq 2.$$

На самом деле даже

$$\frac{p^2+q^2+r^2+s^2}{4}>2,$$

что легко доказывается стандартным методом (это частный случай неравенства, из упражнения 13).

Использованный прием основывается на следующих наглядных соображениях.

Пусть нам нужно доказать, что неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geq 0$ выполняется при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Будем рассматривать числа $x_1,x_2,\ldots,x_k$ как координаты некоторой точки. Если вы не знакомы с понятием k-мерного пространства, можете считать, что $k=2$ (или, лучше, $k=3$). Будем говорить об этих случаях. Почти всегда[13] множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$, представляет собой кривую (соответственно, поверхность), делящую плоскость (пространство) на две части: решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. Если выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geq 0$, то решение уравнения $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит в одной из этих частей, удовлетворяющей условию $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и, быть может, на самой кривой (поверхности) $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. То есть кривая (поверхность) $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от кривой (поверхности) $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$.

Но тогда и кривая (поверхность) $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ лежит по одну сторону от кривой (поверхности) $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$. Последняя кривая (поверхность) в свою очередь почти всегда разбивает плоскость (пространство) на две части: решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)>0$ и решение неравенства $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)<0$. А тогда при условии $\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=0$ либо выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\geq 0$, либо выполняется неравенство $F(x_1,x_2,\ldots,x_k)\leq 0$[14].

Таким образом, доказываемое неравенство и условие «поменялись местами». Эти рассуждения не вполне строги. Но логика решения предыдущей задачи абсолютно корректна.

Вот еще один пример того, что выгодно поменять местами условие и оказываемое неравенство.

Задача 7. (Задача М1439 из «Задачника «Кванта»», 1994 г.) Длины сторон треугольника равны a, b, и c, а длины проведенных к ним медиан равны m_a, m_b и m_c соответственно. Докажите неравенства

а) $\dfrac{m_a}{a}+\dfrac{m_b}{b}+\dfrac{m_c}{c}\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

[13] Подумайте, когда это не так, и почему такие случаи редки!

[14] Какой из этих двух случаев имеет место, зависит от конкретной задачи. Обычно выяснить это нетрудно, выбрав одну подходящую точку. Если функции F и Φ непрерывны, оба неравенства выполняться одновременно не могут.

б) $\dfrac{a}{m_a}+\dfrac{b}{m_b}+\dfrac{c}{m_c}\ge 2\sqrt{3}$.

Решение. Докажем неравенство пункта а).

Алгебраизируем задачу, воспользовавшись известными формулами для медиан треугольника

$$m_a=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2},\ m_b=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2},\ m_c=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2}.$$

Тогда доказываемое неравенство перепишется в виде

$$\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2a}+\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{2b}+\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{2c}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

или

$$\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}}+\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}\ge 3.$$

Теперь введем новые переменные

$$x=\sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2}},\ y=\sqrt{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2}},\ z=\sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}}.$$

В этих переменных доказываемое неравенство примет вид $x+y+z\ge 3$. Это неравенство, разумеется, верно не всегда, а каких-то ограничений, на первый взгляд, нет. Но это не так, и сообразить это не трудно. Исходное неравенство – однородное первой степени. Поэтому можно, не ограничивая общности, считать, что $c=1$. И тогда новые три переменные x, y и z выразятся через две старых переменных a и b. Но тогда между переменными x, y и z должна существовать связь. Попробуем ее найти.

Имеем

$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{3a^2},\ y^2=\frac{2a^2+2c^2-b^2}{3b^2},\ z^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{3c^2}.$$

Чтобы сделать числители дробей симметричными, добавим к каждой из них единичку:

$$x^2+1=\frac{2b^2+2c^2+2a^2}{3a^2},\ y^2+1=\frac{2a^2+2c^2+2b^2}{3b^2},\ z^2+1=\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{3c^2}.$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{3a^2}{2(a^2+b^2+c^2)},\ \frac{1}{y^2+1}=\frac{3b^2}{2(a^2+b^2+c^2)},\ \frac{1}{z^2+1}=\frac{3c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}.$$

Сложив эти равенства, получим искомое соотношение

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{3}{2}.$$

Теперь поменяем местами ограничение и доказываемое неравенство. Задача сведется к доказательству неравенства

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\ne\frac{3}{2}$$

при условии, что $x+y+z<3$.

Подставив, например, $x=1$, $y=z=0$, убедимся, что на самом деле нужно доказывать неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}>\frac{3}{2}.$$

Здесь мы можем забыть, что числа a, b и c обозначали длины сторон треугольника, и решать задачу для любых неотрицательных x, y и z.

Это неравенство только усиливается, когда переменная x увеличивается. Поэтому достаточно доказать, что при условии $x+y+z=3$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}\geq\frac{3}{2}.$$

Эта задача даже на беглый взгляд проще исходной. И на самом деле мы попадаем в знакомую ситуацию, и теперь решение задачи – дело техники.

Считая z параметром, перепишем неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)(x^2y^2+x^2+y^2+1)-(x^2+y^2+2)\leq 0$$

или

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{z^2+1}\right)\left(\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right)^2+x^2+y^2+1\right)-(x^2+y^2+2)\leq 0.$$

Очевидно, $\frac{1}{z^2+1}<\frac{3}{2}$. Поэтому, если z и $\frac{x+y}{2}$ постоянны, то левая часть последнего неравенства представляет собой многочлен четвертой степени с положительным старшим коэффициентом относительно переменной $t=\frac{x-y}{2}$. Такой многочлен может иметь не более одного максимума внутри отрезка.

А поскольку неравенство симметрическое, его достаточно доказать в трех случаях: 1) $x=y=z=1$; 2) $x=y=\frac{3}{2}$, $z=0$; 3) $x=3$, $y=z=0$. В первом случае неравенство обращается в равенство, а в двух других – в строгое неравенство.

Неравенство пункта б) можно доказать аналогично. А можно воспользоваться еще раз свойствами симметрии задачи. Дело в том, что если a, b, и c – длины сторон треугольника, а m_a, m_b и m_c – дины медиан этого треугольника, то из отрезков длиной m_a, m_b и m_c тоже можно составить треугольник, и длины медиан этого треугольника будут равны $\frac{3a}{4}$, $\frac{3b}{4}$ и $\frac{3c}{4}$ (см. рисунок 7). Таким образом, задача сводится к уже решенному пункту а).

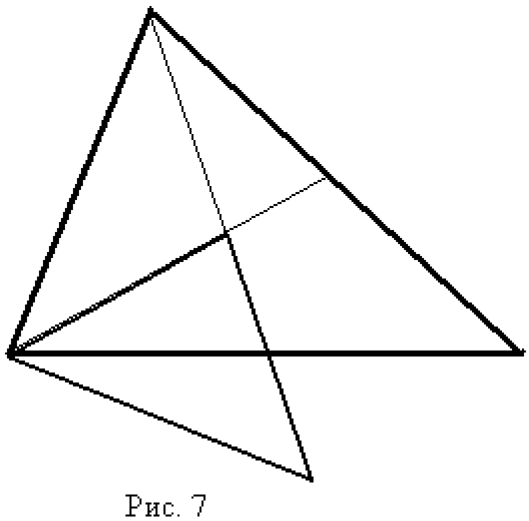

Рис. 7

8. Неравенства с малой симметрией

Рассмотрим еще один пример.

Задача 8. (Санкт-Петербургская олимпиада, 2015 г.) Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $ab+bc+ac+2abc=1$. Докажите, что $4a+b+c\geq 2$.

Решение. В этой задаче «сложное» условие и «простое» доказываемое неравенство. Поэтому разумно поменять их местами. Практически дословно повторяя рассуждения из предыдущего раздела придем к такой задаче.

Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $4a+b+c=2$. Докажите, что $ab+bc+ac+2abc\le 1$.

Эта задача уже близка к тем, которые решались выше. Только вот условие не совсем симметрично. Оно не меняется при перестановках переменных b и c, но меняется при всех остальных перестановках переменных. Но уже наличие одного такого преобразования позволяет решить задачу.

Считая a параметром, а b и c переменными, стандартными рассуждениям придем к выводу, что неравенство достаточно доказать в двух случаях:

1) $c=0$;
2) $b=c$.

Из-за малой степени симметрии, дальше упростить задачу не получается. Но уже сделанного упрощения достаточно.

В первом случае придем к доказательству неравенства $ab\le 1$ при условии $4a+b=1$. Это немедленно следует из неравенства Коши для двух чисел $4a$ и b.

Во втором случае придем к задаче доказательства неравенства $2ab+b^2+2ab^2\le 1$ при условии $2a+b=1$. Исключая с помощью условия переменную a, получим неравенство $b+(1-b)b^2\le 1$. Раскрыв скобки, получим $b^3-b^2-b+1\ge 0$, или $(b-1)(b^2-1)\ge 0$, откуда $(b-1)^2(b+1)\ge 0$, что уже очевидно.

9. Аддитивная сложность

Имеющиеся на сегодняшний день результаты, позволяют оценить число корней многочлена через число операций сложения, использующихся при его записи. Но они гораздо сложнее и менее точны, чем аналогичные результаты для операций умножения. Однако в некоторых случаях и ими можно воспользоваться.

Задача 9. Докажите, что если $n\ge 1$, то для любых неотрицательных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ выполняется неравенство $\left(\dfrac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\ge\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$.

Решение. В силу однородности неравенства можно, не ограничивая общности, считать, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$.

Будем искать минимальное значение функции $\Phi(a_1,a_2,\ldots,a_k)=\dfrac{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_k^n}{k}$ по всем неотрицательным значениям переменных, удовлетворяющим равенству $a_1+a_2+\ldots+a_k=k$. Если мы убедимся, что это минимальное значение равно 1, задача будет решена. Пусть искомое минимальное значение равно $\Phi(b_1,b_2,\ldots,b_k)$.

Выберем какие-нибудь две переменные, например, a_1 и a_2 и рассмотрим функцию двух переменных $F(a_1,a_2)=\dfrac{a_1^n+a_2^n+b_3^n+\ldots+b_k^n}{k}$. Число $F(b_1,b_2)$ будет наименьшим значением функции $F(a_1,a_2)$, если переменные a_1 и a_2 неотрицательны и удовлетворяют равенству $a_1+a_2+b_3\ldots+b_k=k$. Но тогда в силу симметрии и число $F(b_2,b_1)$ будет минимальным значением той же функции.

Выразив a_2 через a_1, получим функцию одной переменной $f(a_1)=\dfrac{a_1^n+(k-b_2-\ldots-b_k-a_1)^n+b_3^n+\ldots+b_k^n}{k}$, которая имеет на отрезке $[0,k-b_3-\ldots-b_k]$ точки минимума $a_1=b_1$ и $a_1=b_2$. Мы попадем в знакомую ситуацию, если докажем, что двух точек разных минимума внутри отрезка такая функция иметь не может.

Для этого воспользуемся средствами дифференциального исчисления. Рассмотрим производную

$$g(a_1)=f'(a_1)=\frac{na_1^{n-1}-n(k-b_2-\ldots-b_k-a_1)^{n-1}}{k}.$$

Производная $g'(a_1)=\dfrac{n(n-1)a_1^{n-2}+n(n-1)(k-b_2-\ldots-b_k-a_1)^{n-2}}{k}$ функции $g(a_1)$ очевидно положительна. Поэтому производная $f'(a_1)$ функции $f(a_1)$ монотонна, а, следовательно, не может иметь более одного корня. А так как обращение производной в ноль является необходимым условием минимума, функция $f(a_1)$ не может иметь двух разных точек минимума внутри отрезка. Следовательно, либо $b_1=b_2$, либо одно из этих чисел равно нулю.

Поскольку подобные рассуждения могут быть проведены для любой пары переменных, все числа $b_1,b_2,\ldots,b_k$ разбиваются на две группы: в одной группе числа положительны и равны между собой, а во второй – равны нулю. Если количество чисел в первой группе равно l, то каждое из них равно k/l и $\Phi(b_1,b_2,\ldots,b_k)=\dfrac{l}{k}\cdot\left(\dfrac{k}{l}\right)^n=\left(\dfrac{k}{l}\right)^{n-1}\geq 1$ так как $\dfrac{k}{l}\geq 1$ и $n\geq 1$. Задача решена.

10. Неравенство Йенсена

Пусть функция $\varphi(x)$ вогнута. Тогда выполняется неравенство

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)}{k}\leq\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right).$$

Этот результат называют неравенством Йенсена[15].

Докажем его сначала для строго вогнутых функций. В этом нам поможет следующее простое утверждение.

Строго вогнутая функция не может иметь более одной точки максимума. В самом деле, если x и y – две различных точки максимума функции то

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}=\varphi(x),$$

что противоречит выбору точки x.

Единственность максимума – это то свойство, которое мы уже неоднократно использовали. Применим привычную схему рассуждений еще раз.

Обозначим через m наименьшее из чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$, $s=a_1+a_2+\ldots+a_k$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)$$

на множестве $x_1,x_2,\ldots,x_k$, удовлетворяющих условиям

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=s,\ x_i\geq m,\ i=1,2,\ldots,k.$$

Пусть максимум этой функции достигается в точке $(b_1,b_2,\ldots,b_k)$. Если все числа $b_1,b_2,\ldots,b_k$ равны между собой, то доказываемое неравенство обращается в равенство и все доказано. Остается убедиться, что иначе быть не может.

Пусть, например, $b_1\neq b_2$. Тогда функция $f(x)=\Phi(x,s-b_3-\ldots-b_k-x,b_3,\ldots,b_k)$ имеет на отрезке $m\leq x\leq s-b_3-\ldots-b_k-m$ две точки максимума $x=b_1$ и $x=b_2$. Но функция

$$f(x)=\varphi(x)+\varphi(s-b_3-\ldots-b_k-x)+\varphi(b_3)+\ldots+\varphi(b_k)$$

является строго вогнутой, а потому не может иметь двух точек максимума. Полученное противоречие доказывает неравенство Йенсена для строго вогнутых функций.

---

[15] Иоганн Людвиг Виллиам Вольдемар Йенсен (1859–1925) – датский математик и инженер. Он в значительной степени был самоучкой, никогда не занимал академических должностей, а занимался математикой в свободное от основной работы время. Йенсен первым начал систематическое изучение выпуклых функций. Свое знаменитое неравенство он опубликовал в 1906 г.

Для его доказательства в общем случае рассмотрим функции $\varphi_\varepsilon(x)=\varphi(x)-\varepsilon x^2$. Так как по условию функция $\varphi(x)$ вогнута, а функция $-\varepsilon x^2$ – строго вогнута при любом $\varepsilon>0$, функция $\varphi_\varepsilon(x)$ является строго вогнутой. Следовательно, как уже доказано, выполняется неравенство

$$\frac{\varphi_\varepsilon(x_1)+\varphi_\varepsilon(x_2)+\ldots+\varphi_\varepsilon(x_k)}{k}\le\varphi_\varepsilon\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right),$$

или

$$\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_k)}{k}-\varepsilon\left(\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2}{k}\right)\le\varphi\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)-\varepsilon\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)^2.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим нужный результат.

Для выпуклых функций тоже справедливо неравенство Йенсена, но, разумеется, знак «≤» нужно поменять на «≥».

Содержание полученного результата понятно: он позволяет свести доказательство сложного неравенства с k переменными к доказательству аналогичного, но более простого неравенства с двумя переменными. В большинстве практически интересных случаев и эту последнюю задачу можно упростить, благодаря критерию выпуклости.

При доказательстве неравенства Йенсена был использован следующий, очень важный методологический принцип. Допустим, нужно доказать справедливость некоторого утверждения для какого-то множества объектов. Начинать всегда следует с доказательства для типичных объектов. А затем уже, возможно, доказательство для общего случая удастся свести к уже рассмотренному частному.

В нашем примере нужно было доказать неравенство Йенсена для множества вогнутых функций. Типичными вогнутыми функциями являются строго вогнутые. Для них доказательство проходит по привычной уже схеме. А затем можно воспользоваться тем, что любая вогнутая функция может быть сколь угодно точно приближена строго вогнутой (именно так в данном случае следует понимать «типичность»).