М. М. Галламов

Программа по элементарной матиматике

Содержание

Пояснительная записка

Данная программа включает в себя материал по элементарной математике не вошедший как в Госстандарт, так и на изучение которого в Госстандарте выделено недостаточное количество часов. Программа рассчитана на учащихся 5–11 классов. Каждый раздел и тему можно изучать в течение всех семи лет обучения, что дает возможность не перегружать обучаемых и достаточно глубоко изучить ту или иную тему или раздел элементарной математики. Причем нет необходимости изучать все предложенные разделы и темы в течение всего периода обучения -это физически невозможно. Как правило, наибольший интерес вызывают те темы и разделы программы, которые связаны с олимпиадной математикой. При реализации программы — это необходимо учитывать. Обучение по данной программе осуществляется в три этапа. Эти этапы в программе не указаны, но мы их опишем.

I этап — обучение учащихся 5–6 классов и симеклассников первого полугодия. Обучение на первом этапе длится 2,5 года. На этом этапе основной целью является

1. Выработка и развитие элементарных представлений, образов о необходимых абстрактных математических понятиях для дальнейшего изучения.
2. Овладение простыми способами и приемами решения нестандартных задач.
3. Выявление индивидуальных особенностей и качеств обучаемого, а также их развитие и воспитание необходимых навыков.
4. Знакомство с олимпиадной математикой.

Изучаются элементарные принципы, методы, способы, технические приемы, а также ознакомление с принципами математическими рассуждениями, математической культурой, историей математической открытий и биографией математиков.

II этап — обучение учащихся с середины седьмого класса по девятый класс. Обучение на втором этапе также длится 2,5 года. Это самый важный и напряженный этап обучения. Обучение по программе ДМО включает в себя

1. Изучение абстрактных математических понятий.
2. Знакомство с элементами некоторых теорий.
3. Овладение приемами математических доказательств.
4. Выработка навыков математического мышления.
5. Приложение математики и её история.
6. Олимпиадную математику.

III этап — обучение учащихся 10 - 11 классов. Обучение на третьем этапе длится 2 года. На этом этапе основной целью является

1. Подготовка к будующей профессии через исследовательские проекты, связанные с теоретическими исследованиями не только в области самой математики, но и её применении в физике, информатике, экономике

криптографии, химии, биологии, экологии, медицине, философии, юриспруденции, искусстве, архитектуре, музыке, астрономии, технике, строительстве и т. д.

2. Олимпиадную математику.
3. Поступление в вуз через олимпиады.

Образно эти этапы можно характеризовать так: I — детство; II — отрочество; III — юность.

Структура программы такова. Программа состоит из одиннадцати разделов:

1. Арифметика.
2. Алгебра.
3. Анализ.
4. Дискретная математика.
5. Теория вероятностей и математическая статистика.
6. Планиметрия.
7. Стереометрия.
8. Дискретная геометрия.
9. Комбинаторная геометрия.
10. Топология;
11. Математические рассуждения.

Каждый раздел расписывается по темам. Темы подробно не расписываются, а указывается подробно литература, что дает возможность изучать материал со своих позиций и подготовленности аудитории, а также указаны некоторые границы излагаемого материала (см. приложение на стр. 28). Выделение разделов программы, отбор тем и литературы основан на личном опыте и научных интересах автора. Вследствие чего к каждому разделу даются необходимые пояснения в виде преамбулы.

Количество часов на изучение каждой темы отводиться по необходимости — в зависимости от реальных условий: подготовленности и интересов аудитории и преподавателя.

Форма реализации программы

Программа реализуется на базе такой организационной структуры как школы дополнительного математического образования (ШДМО); общие положения, организационная структура, формы обучения в которой приводятся ниже.

1. *Общие положения.*

   ШДМО представляет собой одну из форм дополнительного математического образования мотивированных учащихся 5–11 классов, в основу которой кладется принцип обучения, а воспитания осуществляется через созидание. Полное обучение в ШДМО составляет 7 лет, начиная с пятого класса. Несмотря на это учащийся может приступить к занятиям в школе в любой момент в первые три года обучения. Через 2–3 года обучения в школе обучаемый приобретает такие навыки самостоятельной работы, что дальше вполне может продолжать свое обучение по индивидуальной программе. Программа школы ориентирована на качественное и глубокое математическое образование вне зависимости от места проживания обучаемого — в мегаполисе или глухой деревушке, а также его уровня подготовки. Основой обучения является систематические и регулярные занятия, рассчитанные на прилежании и трудолюбии обучаемого.

2. *Организационная структура.*
   (a) Учебный год в ЩДМО состоит из двух частей: Первая часть учебного года состоит из 30 учебных недель с сентября по май следующего года, вторая часть представляет собой выездную летную математическую школу.
   (b) Группы формируются по классам их 15–20 человек. В каждой группе не менее двух преподавателей.
   (c) Ведется учебный журнал группы, в котором отражаются результаты текущей работы обучаемых, их посещаемость, а также указывается тема проводимого занятия и резудьтаты индивидуальных заданий.
   (d) За каждую четверть обучаемому выдается ведомость, оценивающая его результаты работы в четверти по каждому виду занятий, в мае конце — за первую часть учебного года в ЩДМО.
   (e) По результатам работы в выездных математических школах выдаются отдельные ведомости.
   (f) Преподаватель обязан представлять, изложенные темы и индивидуальные задания в электронном виде.
3. *Формы обучения.*
   (a) Формы обучения в ЩДМО могут: очная, очно-заочная, дистанционная.
   (b) Очная форма обучения осуществляется посредством пяти видов занятий:
      i. Аудиторные занятия,
      ii. Консультации и прием индивидуальных заданий,
      iii. Исследовательская работа, 4) олимпиадная математика и
      iv. Выездная математическая школа как летняя, так и зимняя.
   (c) Виды занятий:
      i. Аудиторные занятия проходят один раз в неделю: для 5–6 классов 2 часа в неделю, 7 класс 3 часа в неделю и 8–9 класс 4 часа в неделю
      ii. Консультации и прием индивидуальных заданий два раза в неделю 5–6 класс 4 часа в неделю, 7 класс 6 часов в неделю и 8–9 класс 8 часов в неделю. Они могут проводится как индивидуально, так и коллективно. Причем учащийся обязан приходить на такие заниятия не менее однго раза в недлею.
      iii. Исследовательская работа проводится в следующем виде — каждому обучаемому выдается тема доклада и список литературы. В конце учебного года обучаемый должен выступить с докладом на конференции в рамках ЩДМО. На подготовку каждого доклада ученика к конференции за

руководство в 5–6 классе 4 часа, в 7 классе 6 часов и в 8–9 классах 8 часов в первой части учебного года ШДМО.

iv. Олимпиадная математика представляет собой вид занятий, включающий в себя математические турниры различного вида (письменная и устная олимпиады, математический бой, математическая регата и другие). Математические турниры должны проводится не менее 5 раз в учебном году и не реже один раз в четверть. На учебный год за подготовку и проведение математических турниров выделяется в 5–6 классах — 50 часов, в 8 классе — 60 часов и в 8–9 классах — 70 часов

v. Выездная математическая школа особо важный вид занятий, как для обучения, так и для воспитания. Количество часов, выделяемое на такую школу лучше проводить из расчета на один день.

   5–6 классы 3 часа аудиторных занятий, 3 часа консультаций и прием индивидуальных занятий, 2 часа на воспитательные мероприятия, если в этот день проводиться математический турнир, то 10 часов с учетом подготовки материалов к турниру. Итого в общей сложности 8 или 12 часов.

   7–9 классы 4 часа аудиторных занятий, 4 часа консультаций и прием индивидуальных занятий, если в этот день проводиться математический турнир, то 12 часов и 2 часа на воспитательные мероприятия. Итого в общей сложности 10 или 14 часов.

Раздел I. Арифметика

Преамбула.

Подраздел I.1. Классическая арифметика (см. приложение, стр. 28)

Темы:
I.1.1. Приемы и средства арифметических вычислений (см. приложение, стр. 28).
I.1.2. Арифметика остатков.
I.1.3. Алгоритм Евклида.
I.1.4. Основная теорема арифметики.
I.1.5. Простые числа.
I.1.6. Фигурные числа.
I.1.7. Цепные дроби.
I.1.8. Системы счисления.
I.1.9. История классической арифметики.

Подраздел I.2. Абстрактная арифметика

Темы:
I.2.1. Натуральные числа. Целые числа. Рациональные числа.
I.2.2. Комплексные, дуальные и двойные числа, кватернионы.
I.2.3. p-адические числа.
I.2.4. Элементы нестандартного анализа. Неархимедовы поля.
Сюреальные (сверхвещественные) числа по Конвею.
I.2.5. Целые комплексные числа Гаусса.

Подраздел I.3. Элементарная теория чисел

Темы:
I.3.1. Простые, полупростые числа. Числа Ферма, Мерсенна и другие замечательные числа натурального ряда.
I.3.2. Теория делимости.
I.3.3. Важнейшие функции теории чисел.
I.3.4. Сравнения.
I.3.5. Классические теоремы теории чисел (теоремы Ферма, Эйлера, Вильсона и др.).
I.3.6. Теория разбиений (Partitio Numeromum) — разбиение натурального числа на слагаемые изучается при помощи степенных рядов.
I.3.7. История теории чисел.

Подраздел I.4. Диофантовы уравнения

Темы:
I.4.1. Линейные диофантовы уравнения.
I.4.2. Нелинейные диофантовы уравнения.
I.4.3. Арифметические методы решения диофантовы уравнения.
I.4.4. Алгебраические методы решения диофантовы уравнения.
I.4.5. Геометрические методы решения диофантовы уравнения.
I.4.6. История диофантовых уравнений.

Подраздел I.5. Применение компьютеров в арифметике

Овладаение навыками работы с соответсвующими пакетами програма, каие например как Mathcad, Matрдфи, Mapl, Axioma и другие.

Исследовательские вопросы по разделу I. Арифметика.

Литература раздела I.

Раздел II. Алгебра

Преамбула.

Подраздел II.1. Элементарная алгебра

Темы: II.1.1. Обыкновенные и десятичные дроби. Целые, рациональные, иррациональные алгебраические, трансцендентные и комплексные числа.
II.1.2. Множества. Отображения множеств: многочлены, рациональные и алгебраические иррациональные функции. Алгебраическая точка зрения.
II.1.3. Алгебраические свойства линейных, показательных, логарифмических, степенных и тригонометрических функций.
II.1.4. Тождественные преобразования. Сочетания и бином Ньютона.
II.1.5. Уравнение, неравенства и системы, сводящиеся к алгебраическим. Задачи на составление уравнений и неравенств.
II.1.6. Последовательности, ряды, суммы и произведения.

Подраздел II.2. Многочлены

Темы:
II.2.1. Операции над многочленами (сложение, вычитание, умножение, деление, разложение на множители, интерполирование).
II.2.2.Алгебраические уравнения.
Подтемы:
II.2.2.1. *Алгебраические уравнения: решение уравнений третей и четвертой степени, основная теорема алгебры, уравнения частного вида, рациональные и иррациональные уравнения, уравнения с модулями.*
II.2.2.2. *О разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.*

II.2.3. Корни многочленов и геометрические построение чисел с помощью циркуля и линейки.
II.2.4. Системы уравнений, содержащие модули, многочлены, рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Алгебраические методы их решения.
II.2.5. Многочлены специального вида (многочлены Бернулли, Гаусса, Лагранжа, Люка, Фибоначчи, Чебышева, симметрические, целозначные, круговые).
II.2.6. Алгебраическое определения дифферецирования многочленов. II.2.7. Многочлены от многих переменных.
Подтемы:
II.2.7.1. *Симметрические многочлены и их применение к разложению на множители, вычислению сумм, освобождению от иррациональности, решению уравнений, неравенств, систем, нахождению максимумов и минимумов.*
II.2.7.2. *Многочлены от многих переменных.*

Подраздел II.3. Линейная алгебра

Темы:
II.3.1. Определители и решение систем линейных уравнений.
II.3.2. Векторные пространства и исследование систем линейных уравнений.
II.3.3. Линейные преобразования плоскости и трехмерного пространства.
II.3.4. Аффинная группа преобразований плоскости и трехмерного пространства и её подгруппы.
II.3.5. Системы линейные неравенства и линейное программирование.

Подраздел II.4. Элементы алгебраической геометрии

Темы: II.4.1. Линейные уравнения от многих пременных и их рациональные корни. Геометрические методы решения.
II.4.2. Алгебраические кривые второго порядка и их рациональные корни. Подтемы:
II.4.2.1. *Рациональные корни (пифагоровы тройки) уравнения . Геометрические методы решения.*
II.4.2.2. *Рациональные корни уравнения (уравнение Пелля). Геометрические методы решения.*
II.4.2.3. *Кривые второго порядка (коники) и рациональные корни.*
II.4.3. Некоторые алгебраические кривые выше второго порядка и их рациональные корни.
II.4.4. Системы нелинейных алгебраических уравнений и рациональные решения.

Подраздел II.5. Неравенства

Темы:
II.5.1. Числовые неравенства.

II.5.2. Классические неравенства и следствия из них.
II.5.3. Алгебраические методы решение неравенств (метод симметрии и подстановки). Метод математической индукции (неравенство Йенсена и др.). Метод монотонных последовательностей (неравенство Чебышева и др.).
II.5.4. Средне взвешенные величины и соотношения между ними (неравенство Мюрхеда).
II.5.5. Элементарное введение в теорию мажоризации.

Подраздел II.6. Абстрактная алгебра

Темы:
II.6.1. Необычные алгебры: алгебра множеств, алгебра логики.
II.6.2. Отношения и его интерпретация на различных структурах.
II.6.3. Упорядоченные множества. Первое знакомство с абстрактным алгебраическим понятием — решетки.
II.6.4. Преобразования и перестановки.
II.6.5. Понятие группы. Группы подстановок. Изоморфные группы. Теорема Келли. Циклические группы. Группы самосовмещений. Инвариантные подгруппы. Гомоморфные отображения. Разбиение группы на классы по данной подгруппе. Факторгруппа.
II.6.6. Поля. Кольца. Идеалы.
II.6.7. Группы Галуа.
II.6.8. Алгебры над полем действительных чисел (алгебраические методы построения числовых систем).

Подраздел II.7. Применение компьютеров в алгебре

Овладаение навыками работы с соответсвующими пакетами програма, каие например как Mathcad, Matрдфи, Mapl, Axioma и другие.

История алгебры.

Исследовательские вопросы по разделу II. Алгебра.

Литература к разделу II.

Раздел III. Математический анализ

Преамбула.

Подраздел III.1. Элементарные функции и их графики

Темы:
III.1.1. Функции, определяемые многочленами.
III.1.2. Дробно-рациональные функции.
III.1.3. Алгебраические иррациональные функции.
III.1.4. Элементарные трансцендентные функции. Часть I. Показательные,

логарифмические и произвольные степенные функции.
III.1.5. Элементарные трансцендентные функции. Часть II.Основные тригонометрические функции. Угол и его измерение.
III.1.6. Аксиоматическое определение функций: линейной, показательной, логарифмической, степенной, косинуса и синуса. Применением к решениям функциональных уравнений.
III.1.7. Обратные функции.
III.1.8. Применение элементарных функций и их графиков.

Подраздел III.2. Пределы

Темы:
III.2.1. Пределы последовательностей и функций.
III.2.2. Пределы последовательностей функций. Свойства непрерывных функций.
III.2.3. Приложения.

Подраздел III.3. Теория действительного числа и модели её реализации

Темы:
III.3.1. Основные подходы к определению вещественного числа.
III.3.2. p-адические числа.
III.3.3. Элементы нестандартного анализа. Неархимедовы поля. Сюреальные (сверхвещественные) числа по Конвею.
III.3.4. Разложение действительных чисел на четыре класса:
1) рациональные числа, 2) алгебраические иррациональные числа,
3) трансцендентные конечного порядка числа, допускающие аппроксимацию конечного порядка (теоремы Л. Дирихле и А. Я. Хинчина),
4) трансцендентные бесконечного порядка числа, допускающие аппроксимацию любого порядка (числа Лиувилля).

Подраздел III.4 Дифференцированное исчисление и его приложения

Темы:
III.4.1. Производня и дифференциал. Интерпритации производной.
III.4.2. Применение производной к исследованью графиков.
III.4.3. Формула Тейлора и ей применение. III.4.4. Применение производной в геометрии, физике, эконмоике.
III.4.5. Производная в физических задач.

Подраздел III.5. Интегральное исчисление и его приложения

Темы:
III.5.1. Операции инегрирования и диффенцирования.

III.5.2. Интеграл и мера.
III.5.3. Применение интеграла в геометрии.
III.5.4. Применение интеграла при решении физических задач.

Подраздел III.6. Ряды

Темы:
III.6.1. Частичные суммы бесконечных послдевовательнотей.
III.6.2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
III.6.3. Ряды элементарных функций.
III.6.4. Расходящие ряды.
III.6.5. Операции над рядами.

Подраздел III.7. Элементарные методы дифференциальных уравнений

Темы:
III.7.1. Дифереациальные уравнения элементарных функций.
III.7.2. Векторные поля и дифференцилаьные уравнения.
III.7.2. Диферецилальные уравнения в геомерии, физике, экономике, биологгии и экологии.

Подраздел III.8. Специальные функции

Темы:
III.8.1. Специальные многочлены (см. тему II.2.5 из 10).
III.8.1. Экспоненциальные функции. Гиперболические функции

Подраздел III.9. Математический анализ на решетках

Темы:
III.9.1. Конечные разности.
III.9.2. Решеточное дифференцирование и интегрирование.
III.9.3. Дискретные дифференциальные уравнения.

Подраздел III.10. Численные методы

Темы:
III.10.1. Приближенное вычисление посредсвом производной и рядов.
III.10.1. Метод конечных разностей.

Подраздел III.11. Элементарные функции комплексного переменного

Темы:
III.11.1. Комплексные числа. Комплексная плоскость и её преобразования.
III.11.2. Числовые функции комплексного переменного. III.11.3. Функция

квадратного корня комплексного переменного. III.11.4. Экспоненциальная и логарифмическая функции комплексного переменного.

Подраздел III.12. Применение компьютеров в математическом анализе

Овладаение навыками работы с соответсвующими пакетами програма, каие например как Mathcad, Matрдфи, Mapl, Axioma и другие.

История математического анализа.

Исследовательские вопросы по разделу III. Математический анализ.

Литература к разделу III.

Раздел IV. Дискретная математика

Преамбула.

Подраздел IV.1. Комбинаторика

Темы:
IV.1.1. Теоремы существования: чередование, принцип Дирихле.
IV.1.2. Элементы комбинаторики.
Подтемы — основные понятия и методы комбинаторики:
IV.1.2.1. *Классические задачи комбинаторики.*
IV.1.2.2. *Применение арифметических операций в комбинаторике.*
IV.1.2.3. *Технический прием вычисление вариантов — „шары и перегородки“.*
IV.1.2.4. *Формула „включений и исключений“ её применение и обощения.*
IV.1.2.5. *Алгебраические методы в комбинаторике: рекурентые сообношения, производящие функции, ладейные полиномы.*
IV.1.2.6. *Комбинаторные тождества.*
IV.1.2.7. *Геометрические методы в комбинаторике: таблицы, диаграммы, конфигурации, графы и метод траекторий.*
IV.1.2.8. *Примечательные числа комбинаторики.*

Подраздел IV.2. Игры

Темы:
IV.2.1. Детерминированые игры. Игры на симметрию. Выигрышные позиции и др.
IV.2.2. Игры и система счиления.
IV.2.3. Логические игры.
IV.2.4. Математические головоломки.
IV.2.5. Турниры, погони.
IV.2.6. Элементы дифференцируемых игр.

Подраздел IV.3. Логические этюды

Темы:
IV.3.1. Логические задачи.
IV.3.2. Переправы, взвешивание, переливание, дележ, конструкции.
IV.3.3. Занимательные задачи, ребусы, головоломки, логические игры.

Подраздел IV.4. Графы

Темы:
IV.4.1. Основные понятия, свойства и операции над графами.
IV.4.2. Связные, плоские графы.
IV.4.3. Раскраски и графы.
IV.4.4. Ориентированные графы.
IV.4.5. Экстремальные графы.
IV.4.6. Задачи, решаемые с помощью графов.
IV.4.7. Группы и их графы.

Подраздел IV.5. Вычислительная математика и алгоритмы

Темы:
IV.5.1. Пакеты программ для численных рассчетов и их геометрическое представление.
IV.5.2. Численное решения уравнений и систем методом итерации, методом касательных (Ньютона).
IV.5.3. Определения коэффициентов многочлена по его заданным значениям — задача итерполяции.
IV.5.4. Построение функции по заданным точкам с наперед указанными свойствами — задача экстраполяции.
IV.5.5. Приближение функции алгебраическими и тригонометрическими полиномами — задача аппроксимациии.

Подраздел IV.6. Математическая логика и нормальные дизъюнктивные формы (НДФ)

Темы:
IV.6.1. Основные поянитя и операции математической логики. Интерпритаци на операций моделях математической логики.
IV.6.2. Представление доказательств теорем, алгоритмов, решение здач и других логических выводов на языке математической логики.
IV.6.3. Логические игры и математическая логика.
IV.6.4. Комбинатрика и математическая логика.
IV.6.5. Математическая логика, графы, задачи на разрезание и электрические цепи.

Подраздел IV.7. Кодирование

Темы:
IV.7.1. Подстановочное и перестановочное кодирование и методы их декодирования — частотный и сравнения по модулю.
IV.7.2. Кодирования вероянностными методами и их декодирование. Оптимальный коды Фано, Шеннона, Хаффмена.
IV.7.3. Помехоустойчисое кодирование. Методы устранения ошибок. Код Хемминга.
IV.7.4. Линейные коды.
IV.7.5. Коды справляющие несимметричные ошибки. Циклические коды. Границы возможного в кодировании и совершенные коды.
IV.7.6. Применение компьютеров в кодировании и декодировании.

Подраздел IV.8. Моделирование

Подраздел IV.9. Применение компьютеров в дискретной математике

История дискретной математики.

Исследовательские вопросы по разделу IV. Дискретная математика.

Литература к разделу IV.

Раздел V. Теория вероятностей и математическая статистика

Преамбула.

Подраздел V.1. Различные подходы к теории вероятностей

Темы:
V.1.1. Классическая вероятностная модель (комбинаторный подход к теории вероятностей).
V.1.2. Геометрический подход к теории вероятностей.
V.1.3. Концепция теории вероятностей по Мизесу (Р. Э. Мизес 19.4.1883 – 14.7.1958) V.1.4. Аксиоматизация теории вероятностей по Бернштейну (С. Н. Бернштейну 5.3.1880 – 26.10.1968).
V.1.5. Формализация случайных событий.
V.1.6. История развития и становление теории вероятностей.

Подраздел V.2. Аксиоматическое построение теории вероятностей по Колмогорову (А. Н. Колмогоров (25.4.1903–20.10.1987))

Темы:
V.2.1. Аксиомы теории вероятностей.
V.2.2. Случайные величины и их числовые характеристики.
V.2.3. Условные вероятности.
V.2.4. Независимость и закон больших чисел.

Подраздел V.3. Цепи Маркова (А. А. Марков 14.6.1856 – 20.7.1922)

Темы:
V.3.1. Что такое марковские цепи? V.3.2. Марковские цепи в космонавтике, швейном производстве, при исследовании качества продукции и надежности сложных систем, оптимальной стратегии профилактики, обеспечении бесперебойной работы конвейера, оптимизации процесса, а также при обучении компьтера.
V.3.3. Марковские цепи в химии и физике.
V.3.4. Марковские цепи в спорте.
V.3.5. Марковские цепи в текстологии, социологии и демографии.

Подраздел V.4. Вероятность и информация

Темы:
V.4.1. Энтропия и информация.
V.4.2. Решение некоторых логических задач с помощью подсчета информации.
V.4.3. Приложение теории информации к вопросу передачи сообщений по линиям связи (письменная речь, устная речь, музыка ,телевизионные изображения, фототелеграммы, пропускная способность реальных линий связи, генетическая информация).

Подраздел V.5. Вероятность в физике

Темы:
V.5.1. Эволюция представлений о физическом мире.
V.5.2. Вероятность в классической физике.
V.5.3. Вероятность в микромире.

Подраздел V.6. Вероятность в биологии

Темы:
V.5.1. Статистический характер законов классической генетики.
V.5.2. Теория мишени.

Подраздел V.7. Математическая статистика

Темы:
V.7.1. Случайная выборка и её математическая формализация.
V.7.2. Методы оценивания результатов опыта

Подраздел V.8. Парадоксы теории вероятностей и математической статистики

Темы:
V.8.1. Классические парадоксы теории вероятностей.
V.8.2. Парадоксы в математической статистике.
V.8.3. Парадоксы случайных процессов.
V.8.3. Парадоксы в основаниях теории вероятностей.

Подраздел V.9. Применение компьютеров в теории вероятностей и математической статистики

История теории вероятностей и математической статистики.

Исследовательские вопросы по разделу V. Теории вероятностей и математическая статистика.

Литература к разделу V.

Раздел VI. Планиметрия

Преамбула.

Подраздел VI.1. Основания геометрии

Темы:
VI.1.1. Аксиоматика Гильбетра (Д. Гильбетр 23.1.1862 – 14.2.1943).
VI.1.2. Аксиоматика Вейля (Г. К. Х. Вейль 9.11.1885 – 8.12.1955).
VI.1.3. Аксиоматика Донеддю еклидовой плоскости (см. http://lib.mexmat.ru/books/53058).
VI.1.4. Прямые следствия из аксиомы соединения и порядка. Модели геометрий с аксиомами соединения и порядка.
VI.1.5. Прямые следствия из аксиомы конгруэнтности, равенства, изометрии. Модели геометрий без аксиомы параллельности.
VI.1.6. Эквивалентные формулировки аксиомы параллельности.
VI.1.7. Аксиомы непрерывности, полноты, Архимеда (287 до н. э. – 212 до н. э.) и определение предела.

Подраздел VI.2. Основания методы и факты планиметрии

Темы:
VI.2.1. Построение линий с экстремеными свойствами методом Г. А. Щварца 1843–1921) — метод зеркального отражения.
VI.2.2. Пропорциональные отрезки.
VI.2.3. Равенство и подобие фигур.
VI.2.4. Основные факты об углах, треугольниках, четыреугольниках и акружностях.
VI.2.5. Основные задачи на построение.
VI.2.6. Метод площадей.
VI.2.7. Метод координат.
VI.2.8. Метод векторов.
VI.2.9. Задачи на вычисления.
VI.2.10. Задачи на доказательстов.
VI.2.11. Геометрические неравенства.
VI.2.12. Метод математической индукции в геометрии.

Подраздел VI.3. Преобразоваия в плоскости

Темы:
VI.3.1. Движение плоскости.
VI.3.2. Подобия и аффиные преобразования.
VI.3.3. Инверсия.

Подраздел VI.4. Геометрические построения на плоскости

Темы:
VI.4.1. Постоение геометрического места точек.
VI.4.2. Преобразование подобия.
VI.4.3. Метод обратного хода.
VI.4.4. Метод преобразования фигур.
VI.4.5. Методы симетрии и спрямления.
VI.4.6. Метод вращения.
VI.4.7. Метод инверсии.
VI.4.8. Применение алгебры.
VI.4.9. Общие методы построения.
VI.4.10. Построения с ограниченными возможностями.

Подраздел VI.5. Основные фигуры: окружность и теругольник

Темы:

Подраздел VI.6. Мноугольники

Темы:

Подраздел VI.7. Кривые второго порядка

Темы:

Подраздел VI.8. Алгебраические методы планиметрии

Подраздел VI.9. Длина и площадь

Темы:

Подраздел VI.10. Изопериметрические задачи

Темы:
VI.10.1. Изопереметрические задачи и история их развития.
VI.10.2. Основная теорема о изопереметрах и вопросы существования эктремальных элементов. Экстремальные свойства по площади круга и треугольника с фиксированным основанием.
VI.10.3. Существования среди равновеликих фигур фигур с минимальным периметром. Обобщение понятия подобия.
VI.10.4. Круг и его части.
VI.10.5. Вписанные и правильные многоугольки.
VI.10.6. Простанственная изопереметрия.
VI.10.7. Физическая илллюстрация и применение полученных результвов в технике.

Подраздел VI.11. Геометрия с точки зрения механики — геометрия масс

Темы:
VI.11.1. Математический центр масс (МЦМ).
VI.11.2. Декартовы координаты ЦМ. Теоремы Гюльдена — первая теорема о площади поверхности вращения и вторая теорема вращения о объеме тела вращения. Применение к неравенствам.
VI.11.3. Комплексные массы.
VI.11.4. Момент инерции.
VI.11.5. Барицентрические координаты (*Б*-координаты) на плоскости, в трехмерном и многомерном пространстве.
VI.11.6. *Б*-координаты . *Б*-координаты в многомерных пространствах
VI.11.7. Применение барицентрических модели в топологии, химии, металлургии, колометрии (цветоизмерении), в популяционной генетике (закон

Харди – Вайнберга равновесного состояния популяции, т. е. такая, при которой дочернее поколение имеет такое же распределение генотипов, что и родительское поколение).

Подраздел VI.12. Кинематические методы в геометрии

Темы:

Подраздел VI.13. Элементы проективной геометрии

Темы:

Подраздел VI.14. Элементы геометрии Лобачевского

Темы:

Подраздел VI.15. Геометрические эксперементы на компьютере

Темы:

История планиметрии.

Исследовательские вопросы по разделу VI. Планиметрия.

Литература к разделу VI.

Раздел VII. Стереометрия

Преамбула.

Подраздел VII.1. Основные факты стереометрии

Подраздел VII.2. Построения в пространстве

Темы:

Подраздел VII.3. Основные фигуры: тетраэдр и сфера

Темы:

Подраздел VII.4. Многогранники

Темы:

Подраздел VII.4. Поверхности в простансте

Темы:

Подраздел VII.5. Крачшайщие линии

Темы:

Подраздел VII.6. Алгебрические методы в стереометрии

Темы:

Подраздел VII.7. Объем и площадь

Темы:

Подраздел VII.8. Сферическая геометрия

Темы:

Подраздел VII.9. Знакомство с многомерным пространством

Темы:

История стереометрии.

Исследовательские вопросы по разделу VII. Стереометрия.

Литература к разделу VII.

Раздел VIII. Дискретная геометрия

Преамбула.

Подраздел VIII.1. Полимино. Паркеты

Темы:

Подраздел VIII.2. Целочисленные решетки

Темы:
VIII.3.1. Первое знакомство с целочисленными решетками. Многоугольники с вершинами в узлах, их эйлерова характеристика, формула Пика.
VIII.3.2. Плоские точечные системы. Количество целочисленных точек в круге. Приближение рациональными числами. Счет целых точек в контурах.
VIII.3.3. Количество целочисленных точек в квадрате, треугольнике и эллипсе.

Подраздел VIII.3. Конфигурации

Темы:

Подраздел VIII.4.Конечные геометрии

Темы:

Подраздел VIII.5. Математические бильярды. Конечные динамические системы. Большая теорема Понселье

Темы:

Подраздел VIII.6. Фракталы

Темы:

Подраздел VIII.7. Применение компьютеров в дискретной геометрии

Темы:

История дискретной геометрии.

Исследовательские вопросы по разделу VIII. Фракталы.

Литература к разделу VIII.

Раздел IX. Комбинаторная геометрия

Преамбула.

Подраздел IX.1. Задачи на разрезание

Темы:

Подраздел IX.2. Задачи на разрезание

Темы:

Подраздел IX.3. Задачи о расположении фигур

Темы:

Подраздел IX.4. Задачи о покрытии фигуры

Подраздел IX.5. Задачи о разбиении фигуры

Темы:

Подраздел IX.6. Применение компьютеров при рассчетых в комбинаторной геометрии

Темы:

История комбинаторной геометрит.

Исследовательские вопросы по разделу IX. Комбинаторная геометрия.

Литература к разделу IX.

Раздел X. Топология

Преамбула.

Подраздел X.1. Наглядная топология

Темы:

Подраздел X.2. Топология линии

Темы:

Подраздел X.3. Топология поверхности

Темы:

Подраздел X.4. Элементы алгебраической топологии

Темы:

Подраздел X.5. Применение компьютеров при рассчетых в топологии

Темы:

История топологии.

Исследовательские вопросы по разделу X. Топология.

Литература к разделу X.

Раздел XI. Математические рассуждения

Преамбула.

Подраздел XI.1.Фундаментальные принципы математического рассуждения (принцип исключенного третьего, принцип математической индукции, теоремы существования, метод обратного хода, анализ, синтез, аналогии, обобщения, интерпретирование)

Темы:

Подраздел XI.2. Язык математической логики

Темы:

Подраздел XI.3. Язык анализа

Темы:

Подраздел XI.4. Язык теории множеств

Темы:

Подраздел XI.5. Язык алгебры

Темы:

Подраздел XI.6. Язык геометрии

Темы:

Подраздел XI.7. Язык топологии

Темы:

Подраздел XI.8. Язык комбинаторики

Темы:

Подраздел XI.9. Язык теории вероятностей и математической статистики

Темы:

История математического рассуждения.

Исследовательские вопросы по разделу XI. Математические рассуждения.

Литература к разделу XI.

Приложение

Анонс. Для более полного восприятия данной программы Вашему вниманию предагается путеводитель по теме I. 1. 1. “Приемы и средства арифметических вычислений“ подраздела классическая арифметика раздела арифметика. В данной теме указывеются вопросы, которые могут быть изучены, с необходимыми пояснениями и источниками. В них можно почерпнуть соответствующую информацию, как в стандартной форме, так и в интернет-ресурсе. Каждый цитируемый материал снабжен указанием на какой уровень подготовки он рассчитан. В конце предлагаются исследовательские вопромы по данной теме для школьников.

Как включенный материал, так цитируемые источники и исследовательские вопросы по данной теме не могут быть исчерпывающими в силу не полноты знаний автора и постоянного развития данной тематики. Автор будет благодарен всем кто выскажет по этому поводу свои предложения и замечания. За ранее приношу свои благодарности.

§ 1. Путеводитель по теме I.1.1. Приемы и средства арифметических вычислений

- *Арифметические вычисления* — это вычисления, совершаемые посредством алгоритмов над целыми числами с помощью: четырех арифметических операций — сложения, вычитания, умножения и деления, необязательно конечное число раз (бесконечные периодические и цепные дроби), графических или геометрических методов (см. ссылку 5–7 к вопросу 1.1.2 темы 1), а также каких-нибудь других средств.
- *Приемы* — это технические способы осуществления вычисленй над целыми числами в соответсвующем представлении. Представления целых чисел разнообразно — это различные числовые систеы так, например, системы счисления как десятеричная или фибоначчиева, p-адические числа([**?**]), сюреальные числа ([**?**]), геометрическая как точки линии, физическая как величины измерений или характериситка состояние некоторой системыи, в частности, компьютера, технические как абак, счеты или палочки Непера и другие.
- *Средство* — это среда осуществления арифметических вычислений, в которой представлены целые числа, при этом они могут быть теоретическими, физическими, техническими или биологичскими как наш мозг.

1.1. Вопросы по теме I.1.1.

1.1.1. *Арифметические операции с целыми числами.*

Литература.

1. [14; И. Я. Депман. *История арифметики.* Пособие для учителей]. См. III. Действия над целыми числами. 1. Устные вычисления. 2. Арифметические таблицы. 3. Таблицы умножения. 4. Расширенная таблица умножения. 5. Расширенные таблицы умножения в России.

6. Арифметические действия. 7. Обоснование арифметических действий в школьных учебниках. 8. Законы арифметических действий. 9. Символы в математике. 10. Арифметические символы. 11. К истории отдельных арифметических действий. VI. Практические „правила“ в учебниках арифметики 1. Пропорции. 2. Тройное правило. 3. Задачи на смешение. 4. Задачи на пропорциональное деление. 5. Метод ложного положения. 6. «Девичье» или «слепое» правило. 7. Политическая арифметика. VII. Арифметические забавы и занимательные задачи в учебниках арифметики; [4; БС],
http://math.ru/lib/book/djvu/istoria/depman.djvu ,
http://math.ru/lib/files/djvu/istoria/depman.djvu .

2. [1; И. В. Арнольд. *Теоретическая арифметика.* Для преподаветелей]. Здесь читатель найдет теорию количественного натурального числа по Кантору, теорию натуральных чисел и двустороннего натурального ряда Грассмана, теорию пар для введения отрицательных, дробных и комплексных чисел. См. Гл. I. Количественные натуральные числа. Гл. II. Порядковое натуральное число. § 20. Теория арифметических действий по Грассману; [2; БС],
http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/teor_arifm.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/klassik/teor_arifm.djvu .

3. [34; ЭЭМ. Книга 1. *Арифметика.* Под ред. П. С Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. Для преподавателей].
Издание „Энциклопедии элементарной математики“ задумано Академией педагогических наук РСФСР как пособие для учителей математики средней школы и студентов физико-математических факультетов педагогических и учительских институтов. Его назначение — дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики. Книга не может служить для первоначального изучения предмета. Она предназначена для людей, изучавших элементарную математику и уже ставших или готовящихся стать преподавателем элементарной математики. См. Устный и письменный счет. Вспомагательные средства вычисления (*В. М. Брадис*);
http://www.math.ru/lib/book/djvu/encikl/enc-el-1.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/encikl/enc-el-1.djvu .

4. [16; Е. И. Игнатьев. *В царстве смекалки.* Для 6–11 кл.]. Книга содержит задачи занимательного характера, иеющие различную степень трудности. См. III. Как сосчитать? VI. Сказки и старинные истории. IX. Угадывание чисел. X. Игры с числами и предметами; [5; БС],
http://reslib.com/book/V_carstve_smekalki
Эту книгу издания 1915 г. можно посмотреть по адресу:
http://math.ru/lib/book/djvu/smekalka/kniga3.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/smekalka/kniga3.djvu

5. [17; Б. А. Кордемский. *Математические завлекалки.* Для 5–8 кл.]. Тексты задач составлены в такой форме, что начинающий почерпнет

очень много полезной информации об истории математики и красоте арифметики. См. Гл. 6. Маленькие тайны чисел и фигур. Гл. 7. Издалека через века (+*история*). Гл. 8. Необычное в обычном. Гл. 9. „Делаем открытие“. Гл. 11. Поэтический коледоскоп. Задачи с решениями (с. 272–295); [**?**; БС],
http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm
http://ru.wikipedia.org/wiki/Кордемский,_Борис_Анастасьевич

6. [18; Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. *Удивительный мир чисел.* Для 8–11 кл.]. Стиль изложения в этой книге таков, что он способствует развитию исследовательских качеств. См. „Если делиться число, то решение подошло“.
http://www.koob.ru/kordemskiy_b/world_numbers
http://www.klex.ru/9b3 .
7. [5; И. И. Баврин. *Сельский учитель С. А. Рачинский и его задачи устного счета.* Для 5–9 классов]. Прекрасная подборка задача для устного счета в §§ 4–5, которым С. А. Рачинский обучал крестьянских детей в конце 19-го века ([8; БС] и [9; БС]).
8. [26; А. С. Сорокин. *Техника счета.* Для 5–11 кл.]. Излагается многочисленное количество приемов как устного счета, так и интересных высислитеьных алгоритмов. Книга выпущена изд. „Знание“, которое занималось пропогандой наиболее значимых и востребованных вопросов в свое время. Эта книга еще интересна тем, что в ней предлагаются быстрдействующие вычислитеьные алгоритмы, которые можно использовать для исследовательских задач.
http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=766343
9. [27; А. В. Спивак. *Тысяча и одна задача по математике.* Для 5–7 кл.]. Имеется достаточное количество задач для проведения занятий мат. кружка по арифметическим вычислениям.
10. [33; Энциклопедия для детей. Азбука счета].
11. Задачи на сайте МЦНМО по теме „Арифметика“ — адрес:
http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=88

1.1.2. *Текстовые арифметические задачи.*

Литература.

1. [17; Б. А. Кордемский. *Математические завлекалки.* Для 5–8 кл.]..
http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm .
2. [4; И. Л. Бабинская. *Задачи математических олимпиад.* Для 5–9 кл.] Сб. составлен в основном из олимпиадных задач. См. Гл. I. Арифметика. Задачи № 1–80 (с. 5–12),
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/babinska.htm
http://reslib.com/book/Zadachi_matematicheskih_olimpiad

3. [32; Д. О. Шклярский и др. ИЗиТЭМ. АиА. Для 8–11 кл.]. См. 2. Перестановка цифр в числе. 4. Разные задачи из арифметики. Все задачи с решениями.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu

4. [20; С. Е. Рукшин. *Мат. соревнования в Ленинграде – СПб. Первые 50 лет.* Для 6–11 кл.]. Задачник представляет собой великолепную подборку олимпиадных задач как по разнообразнию тематик, так и по оригинальности методов решения. Прекрасное пособие по воспитанию цепкого и дарзского ума. См. в тематический указатель — числовые задачи.
5. [22; *Сб. задач ММО.* Составитель А. А. Леман. Для 8–11 кл.]. Настоящая киига представляет собой плод многолетней коллективной работы школьного математического кружка при МГУ, работы, активное участие в которой принимали многие студенты и преподаватели МГУ, а также школьники — участники кружка. См. § 9. Задачи с целыми числами;
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.djvu .
6. [7; Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* Вып. 18. БМК. Для 8–11 кл.]. Содержит около 450 задач, предлагавшихся на заключительных турах математических олимпиад СССР, начиная с самых первых. Задачи расположены в хронологическом порядке и снабжены решениями. Многие из них являются своеобразными математическими исследованиями, позволяющими читателям ознакомиться с идеями и методами современной математики. См. тематический путеводитель: 4. Цифры и системы счисления;
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
7. [15; Дьюдени Г. Э. *520 головоломок.* Для 5–11 кл.]. См. „Арифметические и алгебраические задачи“ (с. 9–71, задачи № 1–253).
8. [19; А. И. Островский, Б. А. Кордемский. *Геометрия помогает арифметике.* Для 5–8 кл.]. Даются графические методы решение арифметических задач.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/geom_help.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/geom_help.djvu .
9. [9; Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков. *Мат. бильярды.* Для 6–11 кл.]. Задачи на переливания решаются посредством зеркального отражения траекторий от сторон многоугольника (с. 10–13).
http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant/billiards.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-kvant/billiards.djvu .
10. Задачи на сайте МЦНМО по темам.
    (a) „Арифметика. Устный счет и т. п.“ — адрес:
    http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=89
    (b) „Арифметичские действия. Числовые тождества“ — адрес::
    http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=849
    (c) „Текстовыме задачи“ — адрес:
    http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=90

1.1.3. *Арифметические ребусы или криптарифметика.* Литература к вопросу 3 по темы I.1.1

Литература.

1. [3; А. В. Бабаш, Г.П̇. Шанкин. *История криптографии.* Для 5–11 кл.]. http://cccp.narod.ru/work/book/kgb/babash_02.html .
2. [21; А. П. Савин. *Я познаю мир: Математика: Дет. энцикл..* Для младших школьников].
3. [17; Б. А. Кордемский. *Математические завлекалки.* Для 5–8 кл.]. См. „Алфаметика — зашифрованная арифметика“ (с. 327–333). http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm .
4. [27; А. В. Спивак. *Тысяча и одна задача по математике.* Для 5–7 кл.]. См. 88. Ребусы. Задачи № 907–910 (с учетом подпунктов всего 30 задач).
5. [15; Дьюдени Г. Э. *520 головоломок.* Для 5–11 кл.]. См. „Арифметические и алгебраические задачи“ (с. 9–71, задачи № 143–158).
6. [18; Б. А. Кордемский, А. А. Ахадов. *Удивительный мир чисел.* Для 8–11 кл.]. Стиль изложения в этой книге таков, что он способствует развитию исследовательских качеств. См. „И фокусы покажем и секрет расскажем. Наш конструктор числовой поработой головой. Это ребусы из цифр, буквы, звездочки — их шифр“.
http://www.koob.ru/kordemskiy_b/world_numbers
http://www.klex.ru/9b3 .
7. [10; С. Б. Гашков. *Системы счисления и их применения.* Для 9–11 кл.]. Этот источник указан с той целью, что появилось желание познакомится, не только с методами построения магических квадратов и крипографии, но также с методами исправления ошибок — арифметические ребусы для этого являются прекрасным переходным мостиком. В данном источнике предлагается метод на оснвании числа 9 в десятеричной системе счисления. См. § 15. Признаки делимости. § 16. Арифметические коды; [26; Гл. IV. Проверка правильности вычислений] http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.29.pdf .

1.1.4. *Делимость.*

Литература.

1. [14; И. Я. Депман. *История арифметики.* Пособие для учителей]. См. II. Некоторые свойства натуральных чисел. 1. Элементарная и высшая арифметика. 2. Числа количественные и порядковые, чётные и нечётные. 3. Простые и составные числа. 4. Определение простоты чисел. 7. Делимость составных чисел. 8. Совершенные, недостаточные и избыточные числа. 12. Некоторые соотношения между отдельными числами натурального ряда; [4; БС],
http://math.ru/lib/book/djvu/istoria/depman.djvu ,
http://math.ru/lib/files/djvu/istoria/depman.djvu .
2. [13; С. А. Генкин и др. ЛМК. Для 6–9 кл.]. Книга обобщает опыт, накопленный многими поколениями преподавателей школьных маткружков при матмехе ЛГУ и ранее недоступный массовому читателю.Книга очень полезна для начинающих. СМ. Гл. 4. Делимость и остатки. 1. Простое и составное (с. 26, задачи 1–14, решения с. 244). Контрольные вопросы 1–11 (с. 27–28). 3. Несколько задач (с. 36 — 37,

задачи 46 — 52, решения с. 245).
http://www.math.ru/lib/files/djvu/len-kruzhki.djvu .

3. [32; Д. О. Шклярский и др. ИЗиТЭМ. АиА. Для 8–11 кл.]. См. 3. Задачи на делимость (с решениями); ссылку 3 из вопроса 1.1.2,
http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu .
4. [22; *Сб. задач ММО.* Составитель А. А. Леман. Для 8–11 кл.]. См. §8. Делимость чисел, §9. Задачи с целыми числами; ссылку 5 из вопроса 1.1.2,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.djvu .
5. [20; С. Е. Рукшин. *Мат. соревнования в Ленинграде — СПб.* Для 6–11 классов]. См. тематический указатель — числовые задачи; ссылку 4 из вопроса 1.1.2.
6. [23; В.Серпинский. *250 задач по элементарной теории чисел.* Для 9–11 кл.] См. I. Делимость чисел; [10; БС],
http://math.ru/lib/118 ,
http://math.ru/lib/files/djvu/serp-250-tch.djvu .

7. [7; Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* Вып. 18. БМК. Для 8–11 кл.]. См. тематический путеводитель: 3. Целые числа. Делимость"; ссылку 6 из вопроса 1.1.2,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
8. Задачи на сайте МЦНМО по теме: „Делимость. Общие свойства“ — адрес:
http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=1276

1.1.5. *Применением ММИ к вычислениям с целыми числами.*

Литература.

1. [1; И. В. Арнольд. *Теоретическая арифметика.* Для преподаветелей]. См. Гл. I. Количественные натуральные числа. § 12. Конечные множества. § 13. Принцип полной индукции. § 14. Принцип полной индукциии суждения об открытых совокупностях. § 15. Свойства конечных множеств и системы конечных количественных чисел. § 16. Натуральный ряд как бесконечная совокупность; [2; БС],
http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/teor_arifm.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/klassik/teor_arifm.djvu .
2. [13; С. А. Генкин и др. ЛМК. Для 7–9 кл.]. См. Гл. 8. 3. Классические задачи (с. 96–102); ссылку 2 из вопроса 1.1.2,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/len-kruzhki.djvu .
3. [2; Н. В. Алфутова, А. В. Устинов. *Алгебра и теория чисел.* Сб. задач для матшкол. Для 8–11 кл.]. Книга предназначена для учеников с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Значительная часть материала может быть использована для исследовательской работы школьников. Основу сб. составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995–2000 годах читался в школе-клттеркате

им. А.Н. Колмогорова при МГУ (см.xite[БС]BS A.N.Kolmogorov). См. Задачи № 1.8–14, 1.17–31, 38–40.
http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf

4. [32; Д.О. Шклярский и др. ИЗиТЭМ. АиА. Для 8–11 кл.]. См. 3. Задачи на делимость (с решениями); ссылку 3 из вопроса 1.1.2,

5. [24; И.С. Соминский. *ММИ.* Для 7–9 кл.]. См. II. Примеры и упражнения, решения;
http://www.math.ru/lib/book/plm/v03.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/plm/v03.djvu .
6. [25; И.С. Соминский и др. *О мат.индукции.* Для 7–11 кл.]. См. Часть 1. Индукция в арифметике и в алгебре 15. § 1. Док-ва тождеств; задачи арифметического характера (примеры 1–13; задачи 1–16), указания и решения;
http://bookfi.ru/g/Соминский И. С.
7. [7; Н.Б. Васильев, А.А. Егоров. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* 18. БМК. Для 8–11 классов].6
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
См. тематический путеводитель: 1. Метод индукции (с. 261); ссылку 6 из вопроса 1.1.2,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
8. Задачи на сайте МЦНМО по теме: „Индукция“ — адрес::
http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=215

1.1.6. *Арифметические операции в системах счисления с натуральным основанием.*

Замечание 1. Числа во всех известных позиционных с/с определяются операциями сложение и умножения вследствие чего они называются *аддитивно-мультипликативными.* Позиционный принцип записи чисел в таких системах оправдывается следующей теоремой элементарной теории чисел.

Теорема 1. *Пусть $q_0 = 1$ и q_1, q_2, ... последовательность отличных от единицы натуральных чисел. Тогда для любого натурального числа a можно найти одно и только одно натуральмое число n, для которого линейное уравнение*

$$x_0 + q_1x_1 + q_1q_2x_1 + \cdots + q_1q_2\cdots q_{n-1}x_{n-1} = a$$

имеет единственное решение $x_0 = a_0, x_1 = a_1, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$ в целых числах, удовлетворяющее условию: $0 \leqslant a_0 < q_1$, $0 \leqslant a_1 < q_1$, ... , $0 \leqslant a_{n-1} < q_n$

Решение a_0, a_1, ... , a_{n-1} и служит обозначением числа a в виде $\overline{a_{n-1}\ldots a_1a_0}$.

Литература.

1. [34; *ЭЭМ.* Книга 1. Арифметика, 1951. Под ред. П.С Александров, А.И. Маркушевич, А.Я. Хинчин]. См. Происхождение систем счисления (И.Г. Башмакова, А.П. Юшкевич); ссылку 3 из вопроса

1.1.1,
http://www.math.ru/lib/book/djvu/encikl/enc-el-1.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/encikl/enc-el-1.djvu .

2. [14; И. Я. Депман. *История арифметики.* Пособие для учителей]. См. 4. Устная нумерация. 5. Пальцевой счёт. 6. Системы счисления, имеющие основанием число, не равное десяти. 7. Задача Баше—Менделеева. 8. Происхождение некоторых названий чисел. 8. Происхождение некоторых названий чисел. 9. Большие числа и их наименования. 10. Письменная нумерация. 11. Вавилонские цифры. 12. Египетские цифры. 13. Греческая нумерация. 14. Славянская нумерация. 15. Римская нумерация. 16. Узловая нумерация. 17. Китайская нумерация. 18. Нумерация народа майя. 19. Индийская нумерация. 20. Арабская математика и нумерация. 21. Математика у среднеазиатских народов. 22. Абак. 23. Счёты. 24. «Счёт на линиях». 25. Происхождение некоторых арифметических терминов. 26. Индийские цифры у западноевропейских народов. 27. Индийские цифры в России. 28. Форма наших цифр. 29. Абстрактные числа. Единица как число. 30. Нуль как число. 31. Эволюция наших цифр. 32. Аксиоматическое построение арифметики. V. Именованные числа. 1. Системы мер. 2. Старые русские меры. 3. Метрическая система мер. 4. Меры времени и календарь. 5. Календарная терминология. 6. Календарь французской революции. 7. Всемирный календарь; [4; БС],
http://math.ru/lib/book/djvu/istoria/depman.djvu ,
http://math.ru/lib/files/djvu/istoria/depman.djvu .

3. [21; А. П. Савин. *Я познаю мир: Математика: Дет. энцикл..* Для младших школьников]. Приводятся алгоритмы умнжения и деления, которыми пользовались в Европе X–XVI веках. См. „Про умножение“, „Про деление“, с. 32–42,
4. [17; Б. А. Кордемский. *Математические завлекалки.* Для 5–8 кл.]. Приводятся алгоритмы умножение без таблицы умножения. См. „В старину и так умножали на Руси (с. 314–315). „Индийские приемы умножения“ (с. С. 316).
http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm .
5. [30; С. В. Фомин. *Системы счисления.* ППЛМ. Вып.40. Для 6–9].
http://www.math.ru/lib/book/plm/v40.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/plm/v40.djvu .
6. [35; И. М Яглом. Для 6–9]. В этой статье показывется какие числа могут выступать в качестве цифр того или иного разряда числа в заданной системе счисления.
http://kvant.mirror1.mccme.ru/1970/06/sistemy_schisleniya.htm
7. [10; С. Б. Гашков. *Системы счисления и их применения.* Для 7–9 кл.].
http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.29.pdf
В брошюре кратко изложены и занимательно описаны некоторые из наиболее популярных систем счисления, история их возникновения, а

также их применения, как старые, так и новые, как забавные, так и серьёзные. Большая её часть доступна школьникам 7–8 кл. Текст книжки написан на основе лекций, прочитанных автором в школе им. А.Н. Колмогорова при МГУ и на Малом мехмате МГУ.

8. [2; Н. В. Алфутова, А. В. Устинов. *Алгебра и теория чисел.* Сб. задач для матшкол. Для 8–11 кл.]. См. 3, задача № 2.84 — *факториальная* с/с, задача № 2.84 — *биномиальная* с/с), задача № 3.132 — *фибоначчиева* с/с),4.6. Китайская теорема об остатках — с/с в остатках, задача № 12.18 — перевод мили в километры с помощью фибоначчиевой системы; ссылку 3 из вопроса 1.1.5 из вопроса,
http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf .
9. Фибоначчиеву систему счисления см. по адресу: http://ru.wikipedia.org/wiki/Фибоначчиева_система_счисления .
10. [7; Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. *Задачи Всесоюзных математических олимпиад.* Для 9–11 кл.]. См. тематический путеводитель: 4. Цифры и системы счисления; ссылку 6 из вопроса 1.1.2,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
11. Задачи на сайте МЦНМО по теме: „Системы счисления“ — адрес:
http://www.problems.ru/view_by_subject_new.php?parent=102
12. Справочный матриал — по адресам:
http://ru.wikipedia.org/wiki/Позиционная_система_счисления ,
http://ru.wikipedia.org/wiki/Система_счисления .

1.1.7. *Арифметические операции в системах счисления с ненатуральным основанием.*

Литература.

1. [11; С. Б. Гашков. *Современная элементарная алгебра в задачах и решениях*]. Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой учебное пособие по алгебре для учащихся 10-х и 11-х классов физико-математических школ. Его основу составили записи лекций, читавшихся автором в специализированном учебно-научном центре (СУНЦ) МГУ им. М.В.Ломоносова — школе имени академика А. Н. Колмогорова, более известной под названиями ФМШ МГУ и интернат МГУ. Книга покрывает курс алгебры для учащихся 10-х классов СУНЦ (и аналогичных ему учебных заведений) и содержит основную часть обязательного курса алгебры для 11-х классов.
См. §1.1. Позиционная система счисления. Задачи и упражнения к §4.3 (с. 217–221) — задача 26 (основание системы счисления сномое чилсо равное $2i$);
http://www.alleng.ru/d/math/math104.htm .

Замечание 2. В 1957 г. американский математик Джордж Бергман ввел в рассмотрение позиционную систему с иррациональным основанием $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ [36]. Он доказал, что любое действительное число α может быть представлено в виде:

$$\alpha = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n \varphi^n$$

где $\delta_n = 0$ или 1. Доступное для школьника изложения этого материала можно найти в следующих источниках.

2. [28; Статья А. П. Стахов „Система счисления Бергмана и новые свойства натуральных чисел“] по адресу:
www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm .
В данной статье рассматриваются с/с с иррациональным основание $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Устанавливется представление натурального числа в этой с/с и получает их некоторые свойства.
3. [29; Ст. А. П. Стахов „«Золотая» арифметика как основа информационных технологий 21-го века и важный прикладной результат «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии»)“] по адресу:
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321122.htm .
В доступной для школьника форме рассказывается о алгоритмах арифметический операций в с/с Бегмана, а также — о сравнени чисел.
4. Справочный матриал — по адресам:
http://ru.wikipedia.org/wiki/Позиционная_система_счисления ,
http://ru.wikipedia.org/wiki/Система_счисления .
Существуют позиционные системы с отрицательными основаниями: -2; -3; -10. Иногда также рассматривают позиционные системы счисления с нецелочисленными основаниями: рациональными, иррациональными (основание число Фидия $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$ — золотое сечение), трансцендентными (основание число e).

1.1.8. *Алгоритмы арифметических операций над целыми числами и средства их реализации.*

Замечание 3. Понятие алгоритма на интуитивном урвоне воспримает каждый, так как посредством простых примеров создатеся образное представление о нем. Математическое понятие „алгоритм“ в обшем виде принадлежит к числу основных первоначальных математических понятий, не допускающих определения в терминах более простых понятий, как точка, прямая. Возможные уточнения понятия агоритма приводят. сторого говоря, к известному сужению этого понятия.
Из современных технических средств вычисления, конечно, прежде всего необходимо научиться пользоваться прикладные пакеты для комльютеро, да плюс к тому овладеть калькулятором на ураовне составления программ для громоздких вычисленй. Интерес также представлет для изучения наиболее рание технические средства вычислений.

Литература.

1. [8; *Математическая энциклопедия.* Гл. редактор И. М. Виноградов. Т1, 1977. Для преподавателей] См. ст. „Алгоритм“(столб. 202),

„Алгоритмов теория“ (столб. 226), „Алгоритмическая проблема“(столб. 214).

2. [34; ЭЭМ. Книга 1. *Арифметика.* Под ред. П. С Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. Для 5–11 кл.]. См. *Устный и письменный счет. Вспомогательные средства вычислений* (В. М. Брадис). Гл. I. Общие сведения о счёте и приближённых вычислениях. § 1. Общие соображения об изучении счёта в школе. § 2. Счёт устный. § 3. Счёт письменный. § 4. Вспомогательные средства вычисления.
3. [21; А. П. Савин. *Я познаю мир: Математика: Дет. энцикл..* Для младших школьников]. Приводятся алгоритмы умнжения и деления, которыми пользовались в Европе X–XVI веках. См. „Про умножение“, „Про деление“, с. 32–42, „Про компьютеры“, “Первый комьютер“, “Чарльз Бэббидж“ (первый создатель чертей комльжтера в „железе“ (1834 г.)), “Августа-Ада Лавлейс“ (дочь поэта Байрона, сотрудница Ч. Бэббиджа — разработала начатки теорию программироавния и несколько первых программа в истории человечества; один из современных языков программирования назван е1 именим — АДА), “Биты и байты“, “Языки программорования“ с. 411–429, “Норберт Винер“, „Алгоритм“, “Джон фон Нейман“, с. 430–442.
4. [17; Б. А. Кордемский. *Математические завлекалки.* Для 5–8 кл.]. Приводятся алгоритмы умножение без таблицы умножения. См. „В старину и так умножали на Руси (с. 314–315). „Индийские приемы умножения“ (с. С. 316).
   http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm .
5. [26; А. С. Сорокин. *Техника счета.* Для 5–11 кл.]. Гл. I. Методы, упрощающие сложение и вычитание. Гл. II. Методы, упрощающие умножение и деление. Гл. III. Методы, позволяюще упростить возведение числа в степень и звлечение из числа корня n-й степени. Гл. IV. Проверка правильности вычислений.
6. [11; С. Б. Гашков. *Современная элементарная алгебра в задачах и решениях.* Для 9–11 кл.]. Примеры громоздких вычыслений на колькуляторе. См. §4.4. Вычисления на калькуляторе (с. 222);
   http://www.alleng.ru/d/math/math104.htm .
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Калькулятор .
7. Наиболее рание технические средства вычисления такие как абак
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Абак_(математика) ,
   суаньпань
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Суаньпань ,
   счеты
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Счёты ,
   соробан
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Соробан ,
   палочки Непера http://all-hitech.msk.ru/inf/history/p_0_12.html,
   арифмометор

http://ru.wikipedia.org/wiki/Арифмометор ,
Арифмометор „Феликс“ http://ru.wikipedia.org/wiki/Феликс_(арифмометор)

8. [10; С. Б. Гашков. *Системы счисления и их применения.* Для 9–11 кл.]. Стоиться модель абстрактных счет. См. Приложение: Что можно вычислить на счетах? (с.49–51);
http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.29.pdf .

1.1.9. *Эффективность алгоритма по числу арифметических операций.*

Литература.

1. [8; *Математическая энциклопедия.* Гл. редактор И. М. Виноградов. Т1, 1977. Для преподавателей] См. ст. „Алгоритма сложность вычислений“(столб. 210),
http://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_сложности_вычислений .
2. [6; А Белов., В Тихомиров. Сложность алгоритмов // Квант. Для 9–11 кл.] Рассматриваются вопросы оценки количество необходимых элеменатрных опреаций. Для получения результата при сложении и умножении двух n-значных чисел в общем случае необходимо n операций. Придуманный А. А. Карацубой в 1962 году метод умножения таких чисел требует в 3/4 раза меньше элементарныных операций. Метод Карацубы в следующе году был обобщен А. Тоомом для умножения многочленов, что привело к следующй оценке количества элементарных операций необходмых для умножения двух n-значных чисел: $T(n) \leqslant c(\epsilon)n^{1+\epsilon}$. Здесь ϵ — произвольно фиксированное положитеьное число, $c(\epsilon)$ — положительная константа, зависящая от выбора ϵ.
В данной статье предлогается задача для исследования на с. 11.
http://kvant.mirror1.mccme.ru/pdf/1999/02/kv0299belov.pdf
3. [10; С. Б. Гашков. *Системы счисления и их применения.* Для 9–11 кл.]. На доступном для школьника языке рассказывается о быстром возведении в степень (§ 2–3), которое играет важную роль при построении мнгих современных быстодействующих алгоритмов. Рассатриваются оценки длины аддитиыных цекочек (последовательность, начинающаяся с единицы, каждый поледующий её член равен сумме двух предыдущих или удвоенному каого-то) и применение их к доказательсту минимальности оперций в двоичной системе счисления (§ 3). § 2. Взвешивание с помощью гирь и возведение в степень. § 3. Аддитивные цепочки и фляги с молоком. § 4. Краткая история двоичной системы. § 5. Почему двоичная система удобна? § 11. Д. И. Менделеев и троичная система. § 17. Минимальные формы двоичной записи с цифрами 0 и ± 1 и первая попытка уменьшить сложность умножения. § 18. Быстрое умножение многочленов. § 19. Быстрое умножение чисел.
http://www.math.ru/lib/files/pdf/mp-seria/book.29.pdf .
4. [11; С. Б. Гашков. *Современная элементарная алгебра в задачах и решениях.* Для 9–11 кл.]. Доказывается способ быстрого возведения в степень (бинарный метод). См. § 3. 6. Аддитивные цепочки (с. 161); 3. Задачи и упражнения к § 3. 6. содержат 19 заданий, среди них есть и

нерешенные, как проблема Шольца задача 14 (с. 164). § 3. 11. Быстрое умножение (с. 192); 2.
http://www.alleng.ru/d/math/math104.htm .

5. [12; С. Б. Гашков, В. Н. Чубариков, В. А. Садовничий. *Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений.* 3-е изд.–2005]. §17. Быстрое вычисление с целыми числами, многочленами и дробями. Задачи № 17.1–19 (с. 145–148).
http://rapidshare.com/#!download|331tg2|87286626|Gashkov_Chubarikov_Sadovnichy-Arifme_Algor_Slozh_vichisl.rar|2963
6. [2; Алфутова Н. В., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сб. задач для матшкол. Для 9–11 кл.]. Бинарнцй метод возведения в степень дается в задачах № 5.69–71 § 5. 3. Двоичная и троичная системы счисления гл. 5. Числа, дроби и системы счисления.
http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf .

§ 2. Исследовательские задания по теме I.1.1

Логика построения путеводитля непостредственно приводит к исследовательским задачам такого сорта.

1. Изучение и развитие вычислительных методов, а также закономерностей на основании формы представления чисел (см., например, [5], [16], [17], [18] [21] [26], [32], [35]. Проше говоря, построение вычислительных приемов для частных видов чисел, а также описание множества чисел, дающие после применения к ним одного и того же алгоритма получаются, числа с наперед заданной закономерностью в их записи или свойствами.
2. Обощение метода решение задач на переливание посрдедством математических бильярдов на количество сосудов более трех (см. 9)/
3. Построение и обоснование алгоритмов арифметических задач с ненатуральным основание (см. 1.1.7).
4. Оценка сложности арифметических опрераций алгоритмов, рассматриваемых в [5], [16], [17], [18] [21] [26], [32], [35]
5. Построение собственного алгоритма для конктреной арифметической операции в одной из систем счисления и желательно эффективного по сравнению с известными алгоритмами такого же типа. Это может быть и десятичная система счисления, в качестве примера, см. ссылку 4 к вопросу 1.1.6.
6. Сотсавление арифметических ребусов с осмысленными фразамиили какой-нибудь оригинальной идеей(см. вопрос 1.1.3)э
7. В ссылке 7 к вопросу 1.1.3 говорится о методе исправления ошибок посредсвом цифры 9 в десятеричной системе счисления. Вопрос — какие числа можно взять для построения метода исправления ошибок в произвольно фиксированной системе счисления?
8. Определение характеристик, исходя из формы записи числа в системе счисления Бергмана (см. замечание **??** и пункт 3 вопроса 1.1.7), по

которым можно было бы сказать — является или нет иррациональным числом.

9. См. исследовательскую задачу на стр. 11 в [6].

Список литературы

[1] Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Учпедиздат, 1938. — 480 с.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/teor_arifm.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/klassik/teor_arifm.djvu .
Аннотация. Книга состоит из двух частей — учения о числе в его последовательных обобщениях и начальных глав теории чисел в обычном смысле слова. Здесь читатель найдет теорию количественного натурального числа по Кантору, теорию натуральных чисел и двустороннего натурального ряда Грассмана, теорию пар для введения отрицательных, дробных и комплексных чисел, теорию сечений Дедекинда, сходящихся последовательностей Кантора, краткие сведения о трансфинитных числах, теорию кватернионов в геометрическом изложении и элементарные сведения из теории гиперкомплексных чисел.

[2] Алфутова Н. В., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М: МЦНМО, 2005. — 320 с.
http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf .
Аннотация. Настоящее пособие представляет собой сборник задач по математвке, предназначенный прежде всего для учеников старших классов с углубленным изучением математики, интересующихся точными науками. Он также будет полезен преподавателям математвки и студентам, изучающим математику в высших учебных заведениях. Значительная часть материала может быть использована для исследовательской работы школьников. Основу сборника составляют задачи к курсу алгебры, который в 1995–2000 годах читался в школе-клттеркате им. А. Н. Колмогорова при МГУ.
Ссылки в данном путеводителе:

[3] Бабаш А. В., Шанкин Г. П. История криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2002. — 240 с.
Аннотация. Дается краткое изложение возникновения криптографии с известного в настоящее время момента создания этой науки (Древняя Греция, Рим) до конца XVIII века. Показаны и разъяснены появлявшиеся в историко-хронологическом порядке криптографические идеи, конкретные способы шифрования и даны характеристики культуры конкретных исторических эпох, в которых эти идеи и шифры возникали. Для лиц, занимающихся одним из наиболее мощных способов защиты информации - использованием шифров, а так же всех тех, кого интересуют загадки истории.

[4] Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975. — 112 с.
http://reslib.com/book/Zadachi_matematicheskih_olimpiad
Аннотация. Сборник составлен в основном из задач, рекомендованных для обласных олимпиад, задач самих олимпиад и подготовительных к ним. Использованы главным образом задачи смоленских олимпиад, а также московских и саратовских, некоторые задачи сборника „Всероссийские математические олимпиады“ и заочной математической школы при МГУ.

[5] Баврин И. И. Сельский учитель С. А. Рачинский и его задачи устного счета. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 112 с.
Аннотация. Книга воспроизводит задачник Сергея Александровича Рачинского "1001 задача для умственного счета". Впервые публикуется биография этого замечательного русского педагога и просветителя, а также некоторые из

его оригинальных приемов устного счета. Книга воспроизводит задачник Сергея Александровича Рачинского „1001 задача для умственного счета“. Впервые публикуется биография этого замечательного русского педагога и просветителя, а также некоторые из его оригинальных приемов устного счета. См. [8; БС] и [9; БС].

[6] Белов А., Тихомиров В. Сложность алгоритмов // Квант, 1999, № 2. С. 8–11 (Для 9–11 кл.).
http://kvant.mirror1.mccme.ru/pdf/1999/02/kv0299belov.pdf .
Аннотация. Рассматриваются вопросы оценки количество необходимых элеменатрных опреаций. Для получения результата при сложении и умножении двух n-значных чисел в общем случае необходимо n операций. Придуманный А. А. Карацубой в 1962 году метод умножения таких чисел требует в 3/4 раза меньше элементарныых операций. Метод Карацубы в следующе году был обобщен А. Тоомом для умножения многочленов, что привело к следующй оценке количества элементарных операций необходмых для умножения двух n-значных чисел: $T(n) \leqslant c(\epsilon)n^{1+\epsilon}$. Здесь ϵ — произвольно фиксированное положитеьное число, $c(\epsilon)$ — положительная константа, зависящая от выбора ϵ. Доказательство, построено на методе инерполяции, то есть восстановления коэффициентов многочлена по его занчениям.
В данной статье предлагается задача для исследования на с. 11.

[7] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. 18. БМК. Для 8–11 кл. М.: Наука, 1988. — 288 с. (Имеется тематический путеводитель по задачам на стр. 261 – 270), см. **??**,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/index.htm ,
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.djvu .
Аннотация. Содержит около 450 задач, предлагавшихся на заключительных турах математических олимпиад СССР, начиная с самых первых. Задачи расположены в хронологическом порядке и снабжены решениями. Многие из них являются своеобразными математическими исследованиями, позволяющими читателям ознакомиться с идеями и методами современной математики. Имеется тематический путеводитель по здачам: 1. Метод индукции. Задачи со специфической идей многократного деления пополам (или удвоения): задачи № 155, 200, 277. 2. Целые числа. Делимость. 3. Цифры и системы счисления. 4. Числа рациональные и иррациональные. 5. Квадратный трехчлен. Непрерывные функции, графики и корни уравнений. 6. Алгебра многочленов. 7. Тожества, уравнения и системы. 8. Неравенства. 9. Принцип Дирихле. 10. Комбинаторика. 11. Графы, отображения 12. Четность, раскраски. Задачи на решетках. 13. Операции и инварианты. 14. Расстановка цифр и целых чисел, их преобразования. Турниры. 15. Планиметрия. 16. Стереометрия. 17. Комбираторная геомерия. 18. Геомерические неравенства, оценки, экстремымы. 19. Векторы. 20. Оценки и эквтремальные наборы чисел и таблиц. 21. Последовательности. 22. Игры, преследования, стратегии и алгоритмы. 23. Интересные примеры и конструкции.

[8] Математическая энциклопедия: Гл. редактор И. М. Виноградов. Т1. М.: „Советская энциклопедия“, 1977.
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ справочное издание по всем разделам математики. Основу энциклопедии составляют обзорные статьи, посвященные важнейшим направлениям математики. Основное требование к статьям такого типа — возможная полнота обзора современного состояния теория при максимальной доступнпости изложения; эти статьи в целом доступны студентам-математикам старших курсов, аспирантам и специалистам в смежных областях математики, а в определенных случаях — специалистам в других областях знания, примепяющим в своей работе математические

методы, инженерам и преподавателям математики. Предусмотрены, далее, средние по размеру статьи по отдельным конкретным проблемам и методам математики; эти статьи предназначены для более узкого круга читателей, поэтому изложение в них может быть менее доступным. Наконец, еще один тип статей —- краткие справки-определения. В конце последнего тома энциклопедии помещен предметный укааатель, куда войдут не только вазвакия всех статей, но и мыогие понятия, определения которых будут приводиться внутри статей первых двух типов, равно как и упоминаемые в статьвх наиболее важные результаты. Большинство статей энцоклопедии сопровождается списком литературы с порядковыми номерами у каждого названия, что дает возможность цитирования в текстах статей. В конце статей (как правило) указал автор или источник, если статья уже была опубликована ранее (в основном — это статьи Большой Советской Энциклопедии). Имена иностранных (кроме древних) ученых, упомипаемые в статьях сопровождаются латинским написаньем (если нет ссылки на список литературы). Принцип расположения статей в Эвциклопедии — алфавитный. название каждой статьи дано жирвым прописнным шрифтом; в отдельных случаях продолжение названия статьи дается в р а з р я д к у. Если назнание статьи — термин, имеющий синоним, то последний приводится после основного и также выделяется при помощи разрядки. Разрядка применяется и внутри текста статей, если дается определение п о н я т и я, необходимого для понимая данной статьи, или формулируется теорема, правило и т. д., имеющее специальное название. Во многих случаях названия статей состоят на двух и более слов, В атих случаях термины даются либо в наиболее распространенном виде, либо на нервое место выносится главное по смыслу слово. Если в названии статьи входит собственное имя, оно выносится на первое место (в списке литературы к таким статьям, как правило, содержится перноисточник, обьясняющий название термина). Названия статей даются преимущественно в единственном числе.
В энциклопедия широко используется система ссылок на другие статьи, где читатель найдет дополнительную к рассматриваемой теме информацию. Ссылка на другие статьи выделяется курсивом. В дефиниции не дается ссылка на термин, фигурирующий в названии статьи. С целью экономии места в статьях приняты обычные для эвциклопедий сокращения некоторых слов.

[9] Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. Биб. „Квант“. Вып. 77. М.: Наука, 1991. — 192 с. (Для старшеклассников).
http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant/billiards.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-kvant/billiards.djvu
Аннотация. Рассказывается о поведении бильярдного шара на столе произвольной формы без луз. Описание этого поведения приводит к решению разнообразных вопросов математики и механики: задач о переливании жидкости, об освещении зеркальных комнат, об осциллографе и фигурах Лиссажу и др. На доступном школьникам языке вводятся понятия конфигурационного и фазового пространства, понятия геодезических на простейших двумерных поверхностях, предлагаются (с решениями) многочисленные интересные задачи. Для школьников 9–10-х классов.

[10] Гашков С. Б. Системы счисления и их применения. М.: МЦНМО, 2004. — 52 с.
Аннотация. Различные системы счисления используются всегда, когда появляется потребность в числовых расчётах, начиная с вычислений младшеклассника, выполняемых карандашом на бумаге, кончая вычислениями, выполняемыми на суперкомпьютерах. В брошюре кратко изложены и занимательно описаны некоторые из наиболее популярных систем счисления, история их возникновения, а также их применения, как старые, так и новые, как забавные, так и серьёзные. Большая её часть доступна школьникам 7–8 кл., но и опытный читатель может найти в ней кое-что новое для себя. Текст книжки

написан на основе лекций, прочитанных автором в школе им. А.Н. Колмогорова при МГУ и на Малом мехмате МГУ. Книжка рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников, учителей.
Рассматриваются аддитивные цепочки и их применение к оценке количества операций.

[11] Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и решениях. М.: МЦНМО, 2006. — 328 с. (Для старшеклассников).
http://www.alleng.ru/d/math/math104.htm .
Предлагаемая вниманию читателя книга представляет собой учебное пособие по алгебре для учащихся 10-х и 11-х классов физико-математических школ. Его основу составили записи лекций, читавшихся автором в специализированном учебно-научном центре МГУ им. М.В.Ломоносова - школе имени академика А. Н. Колмогорова, более известной под названиями ФМШ МГУ и интернат МГУ. Книга покрывает курс алгебры для учащихся 10-х классов СУНЦ (и аналогичных ему учебных заведений) и содержит основную часть обязательного курса алгебры для 11-х классов.
По традиции, установленной А.Н.Колмогоровым, курс алгебры для «ФМШат», который читали в разное время сам А.Н.Колмогоров, В.И.Арнольд, В.М.Алексеев, Н. Б. Алфутова, В.В.Вавилов, О.Н.Василенко, И.Б.Гашков, С.Б.Гашков, А.А.Егоров, А. Н. Земляков, В.А.Колосов, Ю. В. Нестеренко, В. Ф. Пахомов, А.А.Русаков, Т. Н. Трушанина, А.В.Устинов, О. А. Чалых, В. Н. Чубариков (приношу свои извинения тем, кого не вспомнил или о ком не знал), состоит из двух частей: некоторого обязательного набора понятий, конструкций и теорем (эта часть является общей для всех лекционных курсов алгебры, читавшихся в этой школе) и решения некоторой интересной содержательной проблемы (например, построение циркулем и линейкой правильных л-угольников, теорема Абеля—Руффини о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, квадратичный закон взаимности и т. п.). Вторую часть курса лектор определяет в соответствии со своими вкусами. В этой книге излагается первая часть курса, а также некоторый вариант дополнительных глав. В ней много задач, в основном довольно трудных. Она может служить учебным пособием по алгебре и для студентов вузов.
Автор выражает глубокую благодарность В. А. Колосову, материалы которого существенно использовались при подготовке книги, а также А. В. Устинову за тщательное редактирование. Автор приносит извинения за оставшиеся в книге неточности и небрежности и за то, что не успел подготовить ее к 40-летию ФМШ МГУ и 100-летию А.Н.Колмогорова.

[12] Гашков С. Б., Чубариков В. Н., Садовничий В. А. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. М.: Дрофа, 3-е изд. — 2005.
http://rapidshare.com/#!download|331tg2|87286626|Gashkov_Chubarikov_Sadovnichy-Arifme_Algor_Slozh_vichisl.rar|2963
Аннотация. В учебном пособии (2-е изд. — 2002 г.) впервые в отечественной литературе рассматривается связь вопросов арифметики с современными проблемами кибернетики. Книга представляет собой сборник задач по арифметике и теории сложности арифметических алгоритмов и позволяет получить систематические знания в этих областях математики.

[13] Генкин С. А., Итенберг И. А., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. Киров: АСА, 1994. — 272 с.
http://www.math.ru/lib/files/djvu/len-kruzhki.djvu
Аннотация. Книга обобщает опыт, накопленный многими поколениями преподавателей школьных математических кружков при математико-механическом факультете ЛГУ и ранее недоступный массовому читателю. Книга построена в форме задачника, отражающего тематику первых двух лет работы типичного кружка. Она вполне обеспечивает материалом

2–3 года работы школьного математического кружка или факультатива для учащихся 6–9, а отчасти и 10–11 классов. Все тематические главы снабжены методическими комментариями для учителя.

[14] Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1965. — 416 с. (см. **??**)
http://www.math.ru/lib/book/djvu/istoria/depman.djvu ,
http://math.ru/lib/files/djvu/istoria/depman.djvu .
Аннотация. Книга является собранием очерков по истории арифметики. Автор стремился лишь осветить исторически все основные разделы арифметики, составляющие содержание школьного курса. Сведения, приведенные в книге, могут включаться учителем в урок, а в более широком плане служить материалом для работы кружков. В книге даны указания на источники, в которых читатель найдет более расширенное изложение рассматриваемых вопросов или дальнейшие сведения по существу их.

[15] Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. М.: Мир, 2000. — 333 с.
Аннотация. Английский мастер головоломок Генри Э.Дьюдени по праву считается классиком занимательной математики. Многие его задачи, породив обширную литературу и вызвав многочисленные подражания, вошли в ее золотой фонд. В предлагаемой книге собрано 520 задач и головоломок Дьюдени по арифметике, алгебре, геометрии, разрезанию и составлению фигур. Читателя ждет встреча с постоянно действующими героями Дьюдени - семейством Крэкхэмов, профессором Рэкбрейном и др. Книга доставит удовольствие всем любителям занимательнойматематики, особенно учащимся старших классов, а также может быть полезной в работе преподавателям математики школ и колледжей.
См. Арифметические и алгебраические задачи. С. 9–71. Задачи № 1–253.

[16] Игнатьев Е. И. В царстве смекалки. М.: Наука, 1984. – 192 с.
http://reslib.com/book/V_carstve_smekalki
Эту книгу издания 1915 г. можно посмотреть по арему:
http://math.ru/lib/book/djvu/smekalka/kniga3.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/smekalka/kniga3.djvu
Аннотация. Книга содержит задачи занимательного характера, иеющие различную степень трудности. Как правило, задачи решаются с привлечевем минимальных сведений из арифметики и геометрин, но требуют сообразительности и умения логически мыслить, в книге содержатся как задачи, доступные детям, так и задачи, представляющие интерес для взрослых. Так нак с момента первого выхода книги Е. И. Игватьсва (в З-х томах) прошло 70 лет, для современного издания книги пришлось существенно переработать. Для второго современного издания книга подверглась дальнейшей переработке заново отредактированы условия и решения некоторых задач, изменена структура книги — ответы и решения задач вынесены в отдельный раздел. Четвертое издание печатется без изменений. См. [5; БС].

[17] Кордемский Б. А. Математические завлекалки. М.: ОНИКС.АЛЬЯНС-В, 2000. — 512 с.
http://www.alleng.ru/d/math/math498.htm .
Аннотация. Книга мастера отечественной научно-популярной литературы Бориса Анастасьевича Кордемского — сборник математических миниатюр: разнообразных занимательных эссе и сказочек, фантазий и просто задач. Все, кто увлекается математикой, — независимо от возраста — получат возможность потренировать мышление, находчивость и изобретательность.
Кордемский Борис Анастасьевич (23.05.1907–1999) — математик, методист, канд. педагогических наук (1956), доцент (1957), популяризатор занимательной математики. Преподавал (с 1939) в ряде московских вузов. Автор свыше 70

статей и книг по занимательной математике: „Очерки о математических задачах на смекалку“ (1958), „Математика изучает случайности“ (1975), „Увлечь школьников математикой“ (1981), „Великие жизни в математике“ (1995), „Удивительный мир чисел“ (совместно с А.А. Ахадовым) (2 изд., 1996), „Геометрия помогает арифметике“ (2 изд., 1994; совместно с А.И. Островским), „Математическая смекалка“ (10 изд., 1994), „Удивительный квадрат“ (2 изд., 1994; совместно с Н.В. Русалевым). Подготовил к печати книгу „Математические завлекалки“. См. [**?**; БС].

[18] Кордемский Б. А., Ахадов А. А. Удивительный мир чисел. М.: Просвещение 1997. — 159 с.
http://www.koob.ru/kordemskiy_b/world_numbers
http://www.klex.ru/9b3 .
Аннотация. Данная книга содержит более двухсот задач по преимуществу арифметических и алгебраических, направленных на воспитание гибкости математического мышления и развитие инициативы и сообразительности. Книга рассчитана в основном на учащихся старших классов средней школы.
Аннотация. Данная книга содержит более двухсот задач по преимуществу арифметических и алгебраических, направленных на воспитание гибкости математического мышления и развитие инициативы и сообразительности. Книга рассчитана в основном на учащихся старших классов средней школы.

[19] Островский А. И., Кордемский Б. А. Геометрия помогает арифметике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1960. — 168 с.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/geom_help.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/geom_help.djvu
Аннотация. В этой книге рассматривается применение некоторых геометрических (графических и графико-вычислительных) приемов к решению разнообразных арифметических и алгебраических задач. Решение задач осуществляется при помощи чертежей — диаграмм и графиков. Построение этих чертежей дает возможность «увидеть» задачу — установить и исследовать связи, существующие между величинами, входящими в задачу, выбрать кратчайший путь решения. Книга предназначена для самостоятельной работы и для школьных математических кружков.

[20] Рукшин С. Е. Математические соревнования в Ленинграде – Санкт-Петербурге. Первые 50 лет. Ростов н/Д, 2000. — 320 с.
Аннотация. Ленинград (теперь Санкт-Петербург) является колыбелью наших математических олимпиад. Это взвросшее чадо на интеллекте и интузиазме ленингдраских математиков до настояшего времени проялвяет свою мощь и крепость вплоть до международных олимиад. Не зрая Санкт-Петербург назывют математической столицей школьников — каждый школьник, желающий узнать в своем юном возрасте, сто такое математка, должен посетить эту „Мекку“. Задачник представляет собой великолепную подборку олимпиадных задач как по разнообразнию тематик, так и по оригинальности методов решения. Прекрасное пособие по воспитанию цепкого и дарзского ума. Имеется тематический указатель (с. 313).
Геометрические неравенства. ГТМ, векторы, построения. Графы, турниры. Игры, погони. Комбинаторная геометрия. Комбинаторные задачи. Конструкции, примеры. Логические задачи. Многочлены. Неравенства. Планиметрия. Правило „крайнего“. Принцип Дирихле. Прогрессии, последовательности, функции. Раскраски. Стереометрия. Тождества. Уравнения, системы. Четнотность, инварианты. Числовые задачи.

[21] Савин А. П. Я познаю мир: Математика: Дет. энцикл./ Авр. сост. А. П. Савин и др. Для младших школьников. — М.: ООО „Изд-во АСТ“: ООО „Изд-во

Астрель“, 2002. — 475 с.
Аннотация. „Математика“ — очередной том новой популярной энциклопедии для детей издательства АСТ „Япозваю мир“. Об истории развития математики и великих ученых, о различных логических и компьютериых играх и задачах и даже о том, в каком банке лучше хранить деньги, рассказывают юным читателям авторы. 06 уникальности и неординарности книги говорит тот факт, что весь авторский коллектив уже много лет сотрудничает в популярном математичесном журнале „Квант“. Издание хорошо иллюстрировано, снабжено предметно-именным указателем, что позволяет использовать его как справочник. Рекомендуется в качестве дополнительного пособия для учащихся младших и средних классов школ, лицеев и гимназий. Дет. энцикл. имеет огромное число небольших статей, связанных с историей арифметических вычислений, и доступных младшим и средним классам.

[22] Сборник задач московских математических олимпиад. Составитель, автор решений и указаний А. А. Леман. Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965. — 384 с.
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.htm
http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/olimp/leman.djvu
Аннотация. Настоящая киига представляет собой плод многолетней коллективной работы школьного математического кружка при МГУ, работы, активное участие в которой принимали многие студенты и преподаватели МГУ, а также школьники — участники кружка.
В. Г. Болтянский, И. М. Яглом. Школьный математический кружок при МГУ и Московские математические олимпиады. Литература 47.

[23] Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. Москва•Ижевск: РХД, 2004. — 160 с.

[24] Соминский И. С. Метод математической индукции. ПЛпМ. Вып.3. М.: Наука, 1961. — 48 с.
http://www.math.ru/lib/book/plm/v03.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/plm/v03.djvu . *Аннотация.* Часто при решении задач возникает вопрос о справедливости некоторого утверждения, которое верно в нескольких случаях, но все частные случаи рассмотреть невозможно. Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого методом математической индукции. В брошюре приведено доказательство принципа мат. индукции, а также большое число задач с решениями на применение этого метода.

[25] Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О Математической индукции. М.: Наука, 1967. — 144 с.

[26] Сорокин А. С. Техника счета (Методы рациональных вычислений). М.: Знание, 1976. — 120 с.
http://rutracker.org/forum/viewtopic.php?t=766343 .
Аннотация. Автор дает систематическое изложение приемов, упрощающих сложение, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня. Книга рассчитана на студентов технических вузов, инженеров и экономистов. Она может быть полезна учителям средней школы при организации лекций по устному счету, а также слушателям народных университетов естественнонаучных знаний и всем, кому приходится иметь дело с вычислительными операциями.
Излагается многочисленное количество приемов как устного счета, так и интересных высислитеьных алгоритмов. Книга выпущена изд. „Знание“, которое занималось пропогандой наиболее значимых и востребованных

вопросов в свое время. Эта книга еще интересна тем, что в ней предлагаются быстрдействующие вычислитеьные алгоритмы, которые можно использовать для исследовательских задач.

[27] Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике: Кн. ждя учащихся 5–7 классов. М: Просвещение, 2002. — 207 с.
Аннотация. В книге широко представлены задачи по математике, предлагавшиеся на занятиях математических кружков и олимпиадах. основное её содержание — классические, проверенные временем арифметические задачи, которые учат правильно рассуждать и считать, кроме них, есть геометрические задачи, требующие фантазии и изобретательности, и просто забавные шутки. Книга будет иитересна и полезна как более старшим, так и более младшим школьникам, а также учителям и родителям.

[28] Статья А. П. Стахов „Система счисления Бергмана и новые свойства натуральных чисел“ по адресу:
www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321068.htm .
В данной статье рассматриваются с/с с иррациональным основание $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Устанавливется представление натурального числа в этой с/с и получает их некоторые свойства.

[29] Статья А. П. Стахов „«Золотая» арифметика как основа информационных технологий 21-го века и важный прикладной результат «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию «Математики Гармонии»)“ по адресу:
http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321122.htm .
В доступной для школьника форме рассказывается о алгоритмах арифметический операций в с/с Бегмана, а также — о сравнени чисел.

[30] Фомин С. В. Системы счисления. ППЛМ. Вып.40. М.: Наука, 1980. — 48 с.,
http://www.math.ru/lib/book/plm/v40.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/plm/v40.djvu .
Аннотация. В брошюре рассказывается об истории возникновения, свойствах и применении различных систем счисления: десятичной, двоичной и некоторых других. В связи с двоичной системой счисления даются элементарные сведения о вычислительных машинах.

[31] Фибоначчиеву систему счисления см. по адресу:
http://ru.wikipedia.org/wiki/Фибоначчиева_система_счисления .
Аннотация. Любое неотрицательное целое число $a = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ можно единственным образом представить в виде последовательность 0 и 1 посредсвом равенства $a = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k F_k$, $\epsilon_k = 0,\ 1$ причём последовательность $\{\epsilon_k\}$ содержит лишь конечное число единиц, и не имеет пар соседних единиц: В основе лежит теорема Цекендорфа (1939) — *любое неотрицательное целое число представимо в виде суммы некоторого набора чисел Фибоначчи, не содержащего пары соседних чисел Фибоначчи. Причём представление такое единственно.*

[32] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – 6-е издание. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 480 с.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu
http://www.math.ru/lib/files/djvu/bib-mat-kr/shk-1.djvu
Аннотация. Книга содержит 320 задач относящихся к алгебре, арифметике и теории чисел. По своему характеру эти задачи значительно отличаются от стандартнька школьных задач. Большинство из них предлагалось в школьных математическжх кружках при МГУ и на математических олимпиадах в Москве. Книга рассчитала на учащихся старших классов средней школы. Задачи, доступные учащимся седьмых-восьмых классов отмечены особо. Даны подробные решения всех задач: более трудные задачи снабжены указаниями.

[33] Энциклопедия для детей. Т11. Математика. М.: Аванта+,2002. — 688 с.
Аннотация. В томе „Математмка“ серии „Энциклопедмя для детей“ содержатся сведения по самым разным разделам современной математики — как включённым в школьную программу, так и выходящим за её рамки. Это и справочное пособие для школьников, и популярная книга для чтения, которую отличают полнота содержания и достугтность изложения. Авторы статей — ведущие учёные, опытные популяризаторы и преподаватели. Яркие и красочные иллюстрации, схемы, графики пробуждают интуицию и воображение. Пёстрая мозаика примеров, задач и формул складывается в единую картину великолепной, стройной и неисчерпаемой науки Математики.

[34] *Энциклопедия элементарной математики.* Книга 1. Арифметика. Под ред. П. С Александров, А. И. Маркушевич, А. Я. Хинчин. Москва – Ленинград: Гос. изд. ТТЛ, 1951. — 448 с.
http://www.math.ru/lib/book/djvu/encikl/enc-el-1.djvu ,
http://www.math.ru/lib/files/djvu/encikl/enc-el-1.djvu .
Аннотация. Издание „Энциклопедии элементарной математики“ задумано Академией педагогических наук РСФСР как пособие для учителей математики средней школы и студентов физико-математических факультетов педагогических и учительских институтов. Его назначение — дать систематическое изложение научных основ школьного предмета математики. Книга не может служить для первоначального изучения предмета. Она предназначена для людей, изучавших элементарную математику и уже ставших или готовящихся стать преподавателем элементарной математики. Она не следует, как правило ни порядку, ни способу изложения математики в средней школе, так как то и другое обусловлено возрастными особенностями учащихся и образовательными целями средней школы, т.е. соображениями, которые не играют роли по отношению к подготовленному читателю-профессоналу. Логика издания — это логика систематического, по возможности простого и доступного, изложения тех вопросов математической науки, из которых строится школьный курс, а также и тех, которые хотя и не находят в этом курсе прямого выражения, однако необходимы для правильного и сознательного его понимания и создают перспективы для дальнейшего развития содержания и методов школьного курса. *Аннотация* к книге I. Книга начинается статьей, посвященной системам счисления и нумерации. Далее идет статья о построении теоретических основ арифметики — рассматриваются весьма общие математические понятия (множества, группы, кольца и поля), а также аксиоматическое изложение теории натуральных чисел, на основе которой вводится теория целых, рациональных, действительных и комплексных чисел. Следующая статья посвящена вопросам, связанным с теорией делимости, в частности, теории цепных дробей. Последняя статья посвящена вопросам округления чисел, правилам приближенных вычислений, подсчета погрешностей и вспомогательным средствам вычислений.

[35] Яглом И. М. Системы счисления. // Квант. 1970. № 6.
http://kvant.mirror1.mccme.ru/1970/06/sistemy_schisleniya.htm *Аннотация.* В этой статье показывется какими числами могут выступать в качестве цифр того или иного разряда рассматриваемого числа в заданной системе счисления.

[36] 1. Bergman G. A. A number system with an irrational base. // Mathematics Magazine, 1957, No. 31, 98–119.

М. М. Галламов
E-mail: gallamov@gmail.com

Поступила в редакцию
11.02.2011 г.

§ 3. Биографическая справка (БС)

Список литературы

[1] Справка об П. С. Александров 25.4(7.5).1896 (Богородск (ныне Ногинск)) – 16.11.1982 (Москва)). Павел Сергеевич Александров — известный советский математик. В 1917 году окончил Московский университет. Ученик Д. Ф. Егорова и Н. Н. Лузина. Большое влияние на него оказала совместная работа с П. С. Урысоном, а также сотрудничество с учёными Гёттингенского университета — Д. Гильбертом, Р. Курантом и особенно Э. Нётер.
Основные работы в области топологии. Ввёл новое понятие компактности, (сам Александров называл его «бикомпактностью», а «компактными» называл лишь счётно компактные пространства, как и было принято до него). Вместе с Урысоном Александров показал всё значение этого понятия, в частности доказал знаменитую теорему о компактификации любого локально компактного хаусдорфова пространства путём добавления единственной точки. Александров вводит понятие нерва покрытия, что привело его (независимо от Э. Чеха) к открытию т. н. (ко)гомологий Чеха. Большое значение имеют его работы в области размерности и топологической двойственности. Павел Сергеевич никогда не мыслил научной деятельности вне педагогического воздействия, вне контакта с учениками.
Научная и педагогическая деятельность Павла Сергеевича органически сочеталась с общественной и административной. Во время международных поездок, начавшихся с 1923 г., он встречался с Гильбертом, Брауером, Хаусдорфом, Хопфом, Курантом и многими другими зарубежными математиками, с некоторыми из них он долгое время сотрудничал и дружил. Образовавшиеся таким образом международные контакты Павла Сергеевича служили поднятию престижа советской математической науки и содействовали росту и расцвету московской математической школы. С 1958 по 1962 г. П. С. Александров был вице-президентом Международного математического союза.
[2] http://www.math.ru/history/people/arnold_iv .
Справка о И. В. Арнольд (06.03.1900 – 20.10.1948) Доктор педагогических наук, профессор. Член-корреспондент АПН РСФСР с 21 февраля 1947г. Состоял в Отделении методик преподавания основных дисциплин в начальной и средней школе. В 1941 г. он защитил диссертацию на ученую степень доктора педагогических наук по методике математики. Предметом защиты была рукопись «Теоретическая арифметика», 480 стр., изданная в 1938 г. в качестве пособия для математических отделений физмата педагогических институтов. В предисловии автор писал: «Изложение теории натурального числа и последовательное проведение операторной точки зрения позволяют, по моему мнению, осветить возникающие в связи с указанной установкой методические вопросы с большей ясностью, нежели это было бы возможно в пределах классических формальных теорий. Кроме того, я считал, что с точки зрения интересов читателя здесь следовало предпочесть проникнутое определенным мировоззрением изложение более, быть может, легкому и менее ответственному сухому перечислению математических фактов. В этих двух обстоятельствах я видел достаточное оправдание для включения указанных выше вопросов и указанных методов изложения в книгу, предназначенную для заполнения весьма существенного пробела в нашей учебной литературе». До этой работы И.В. Арнольда в России и СССР не было работ по теоретической арифметике, отражающих современные математические идеи, тогда как «Теоретическая арифметика» И.В. Арнольда построена на «множественной идее»; в ней

систематически изложена идея развития понятия числа от натурального до кватернионов и гиперкомплексных чисел. В работе особое внимание уделено теории построения действительного числа —- по Кантору, по Дедекинду и по Вейерштрассу.
Коротка была жизнь замечательного ученого методиста математики: три года (1945—1948), когда он вплотную занялся этими вопросами, оставили яркий след в развитии передовых идей в методике. Перегрузка занятиями вызвала переутомление, И.В. Арнольд надорвал свое здоровье и попал в больницу. Он умер, оставя незавершенной часть своих работ.
Отец В.И.Арнольда

[3] Бородин А. И., Бугай А. В. Выдающиеся математики. Библиографический словарь-справочник. Киев: Радянська школа, 1987. — 656 с.

[4] http://letopisi.ru/index.php/Депман,_Иван_Яковлевич
Справка о Депмане И. Я. (1885–1970). Иван Яковлевич Депман — учёный, профессор, историк математики, педагог-математик, создал историко-методическую школу, подготовил многих творчески работающих учеников, оставил многочисленные труды и библиотеку.
В 1917 году математик – педагог получает назначение в Вятский педагогический институт. Здесь он выявляет в исследовании свои математические интересы, связанные с изучением теории вероятностей. В 1925 году И.Я. Депман переводится в Ленинград и становится преподавателем Педагогического института имени М.Н. Покровского и Педагогический институт имени А.И. Герцена и получает звание профессора математики. Здесь протекает его плодотворная работа в течение 45 лет. За эту творческую деятельность Депман выпускает более 200 печатных работ, которые можно разделить на четыре категории:
1.История математики (общая и Росии) – около 60 работ. Среди этих работ: «Карл Гаусс и Дерптский университет», «Новое о Н.И. Лобачевском», «Новое о деятельности академика М.В. Остроградского», «К биографии С.В. Ковалевской», «К биографии Леонарда Эйлера», «Забытый перевод «Начал» Евклида на русский язык», «История арифметики» (два издания), «Русские математические журналы».
2.Методика математики (общая и специальная) – около 50 работ. Среди этих работ: «Научно – атеистическая работа учителя на уроках математики», «О воспитательном значении математики», «О математической культуре учащихся», «Исторический элемент в преподавании математики в средней школе», «Первые уроки математической логики в школе», «Математические увлечения в школе М.И. Лермонтова».
3.Популяризация математики и естествознания как для младших, так и средних и старших классов школы – более 40 книжек. Среди этих работ: «Из истории арифметики», «Возникновение системы мер и способы измерения величин», «Рассказы о математике», «Мир чисел и фигур», «Русско – эстонский математический словарь», «Переписка Ньютона», «Математика на службе обороны страны», «Задачи Л.Н. Толстого».
4.Рецензии и краткие биографии замечательных математиков мира – около 50 работ. «Сто рефератов в реферативном журнале «Математика»», «Бурбаки и единая математика», «Средневековая логика и возникновение математической физики», «Из истории математики на территории Эстонской ССР», «Академик В.А Стеклов в Петербургском университете», «Замечательные славянские вычислители Г. Вега и Я.Ф. Кулик», «Русские учёные во Французской Академии наук». И.Я. Депман читал лекции по истории математики в ленинградских педагогических институтах, городском и областном институтах усовершенствования учителей, а также в Ленинградском университете.

26 июля 1970 года в возрасте 85 лет в Ленинграде он скончался после непродолжительной болезни.

[5] http://www.math.ru/history/people/ignat
Справка о Е. И. Игнатьеве (23.12.1869 – 13.08.1923).
Емельян Игнатьевич Игнатьев родился в деревне Выдренка Чермховского уезда Могилевской губернии, до 8 лет жил в курной избе. Окончил Киевскую гимназию (1887), физмат Киевского ун-та (1891); там же в 1889 получил серебряную медаль за работу „Приближенное вычисление определенных интегралов". В 1901 переехал в Петербург, в 1905 арестован и осужден на шесть лет ссылки за агитацию рабочих. С 1909 преподавал в одной из петерб. школ, после Октябрьской революции в мае 1919 командирован Петроградским РКП(б) в Тулу для «для организации пролетарского университета, крайне необходимого на оружейно-патронном заводе», в Туле преподавал в институте народного образования, был организатором и руководителем Тульской губсовпартшколы и коммунистического университета, первым заведующим Тульского рабфака. Первый небольшой сборник «Математические игры и развлечения» был издан в 1903 году , "книжка-смекалка"для «Читальни народной школы» появилась в 1907 году за подписью Е.М.Ельянов. Умер в Туле 13 августа 1923 года, похоронен в центре Тулы в сквере коммунаров, его имя выгравировано на горизонтальной плите... Источник: Н. С. Орлова „Емельян Игнатьевич Игнатьев" // Математика в школе, №3, 1981, с. 68-69

[6] http://ru.wikipedia.org/wiki/Колмогоров_Андрей_Николаевич
Справка о А Н. Колмогорове (12(25).04.1903, Тамбов — 20.10.1987, Москва). Андрей Николаевич Колмогоров — один из основоположников современной теории вероятностей, им получены фундаментальные результаты в топологии, геометрии, математической логике, классической механике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории функций, теории тригонометрических рядов, теории меры, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, функциональном анализе и в ряде других областей математики и её приложений. Колмогоров также автор новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики.
Реформа школьного математического образования.
К середине 1960-х гг. руководство Министерства просвещения СССР пришло к заключению, что система преподавания математики в советской средней школе находится в глубоком кризисе и нуждается в реформах. Было признано, что в средней школе преподаётся лишь устарелая математика, а новейшие её достижения не освещаются. Модернизация системы математического образования осуществлялась Министерством просвещения СССР при участии Академии педагогических наук и Академии наук СССР. Руководство Отделения математики АН СССР рекомендовало для работы по модернизации академика А. Н. Колмогорова, который играл в этих реформах руководящую роль.
В 1966 г. Колмогорова избирают действительным членом Академии педагогических наук СССР. В 1963 г. А.Н. Колмогоров выступает одним из инициаторов создания школы-интерната при МГУ и сам начинает там преподавать (см. Специализированный учебно-научный центр МГУ). В 1970 вместе с академиком И. К. Кикоиным создает журнал „Квант". Под руководством А. Н. Колмогорова разработаны программы, созданы новые учебники по математике для средней школы. Результаты этой деятельности академика были оценены неоднозначно и продолжают вызывать много споров. См. также
http://ru.wikipedia.org/wiki/Специализированный_учебно-научный_центр_МГУ
,
http://ru.wikipedia.org/wiki/Квант_(журнал) .

[7] http://ru.wikipedia.org/wiki/Кордемский,_Борис_Анастасьевич (Справка о Б А. Кордемском (23.05.1907 — 29.03.1991), см. ??).
Борис Анастасьевич Кордемский (23.05.1907–1999) — математик, методист, канд. педагогических наук (1956), доцент (1957), популяризатор занимательной математики. Преподавал (с 1939) в ряде московских вузов. Автор свыше 70 статей и книг по занимательной математике: „Очерки о математических задачах на смекалку“ (1958), „Математика изучает случайности“ (1975), „Увлечь школьников математикой“ (1981), „Великие жизни в математике“ (1995), „Удивительный мир чисел“ (совместно с А. А. Ахадовым) (2 изд., 1996), „Геометрия помогает арифметике“ (2 изд., 1994; совместно с А. И. Островским), „Математическая смекалка“ (10 изд., 1994), „Удивительный квадрат“ (2 изд., 1994; совместно с Н. В. Русалевым). Подготовил к печати книгу „Математические завлекалки“.

[8] http://ru.wikipedia.org/wiki/Рачинский_Сергей_Александрович Справка о С. А. Рачинском (15.05.1833 – 15.05.1902). Сергей Александрович Рачинский родился в селе Татево, Бельский уезд, Смоленская губерния, — российский учёный, педагог, просветитель, профессор Московского университета, ботаник и математик, Член-корреспондент Императорской Санкт-Петербургской Академии Наук.
Строитель и учитель в первой в России сельской школы с общежитием для крестьянских детей. В первый период учительской деятельности Рачинский вел поиски в русле идей Л. Н. Толстого (28.08.1828 – 7.11.1910) и немецкого педагога К. Стоя (1815–1885) и , с которыми вел переписку. В 1880-е гг. он стал главным в России идеологом церковно-приходской школы, начавшей конкурировать со школой земской. «Заметки о сельских школах», публикуемые им в «Русском вестнике», «Руси», «Церковных ведомостях» способствовали развитию национальной педагогики. В то время Рачинский пришёл к выводу, что „первая из практических потребностей русского народа... есть общение с Божеством“; „не к театру тянется крестьянин в поисках искусства, а к церкви, не к газете, а к Божественной книге“. Рачинский считал, что если человек научится читать по-церковнославянски, ему будут понятны и Данте, и Шекспир, а кто освоит древние церковные «роспевы», тот без труда поймет Бетховена и Баха. Победоносцев К. П. писал о нём императору Александру III в 1883 г.: „Вы изволите припомнить, как несколько лет тому назад я докладывал Вам о Сергее Рачинском, почтенном человеке, который, оставив профессорство в Московском университете, уехал на житье в свое имение, в самой отдаленной лесной глуши Бельского уезда Смоленской губернии, и живет там безвыездно вот уже более 14 лет, работая с утра до ночи для пользы народной. Он вдохнул совсем новую жизнь в целое поколение крестьян... Стал поистине благодетелем местности, основав и ведет, с помощью 4 священников, 5 народных школ, которые представляют теперь образец для всей земли. Это человек замечательный. Все, что у него есть, и все средства своего имения он отдает до копейки на это дело, ограничив свои потребности до последней степени“

[9] http://ru.wikipedia.org/wiki/Устный_счет._В_народной_школе_С._А._Рачинского
Сравка о картине „Устный счет. В народной школе С. А. Рачинского“. Картина русского художника Н. П. Богданова-Бельского, написанная в 1895 году. На картине изображена деревенская школа XIX века во время урока устного счёта. Учитель — реальный человек, Сергей Александрович Рачинский. Он был профессором Московского университета, ботаником и математиком. На волне народничества в 1872 году Рачинский вернулся в родное село Татево, где создал школу с общежитием для крестьянских детей, разработал уникальную методику обучения устному счёту. Эпизоду из жизни школы с творческой атмосферой, царившей на уроках, посвятил своё произведение Богданов-Бельский, сам в

прошлом ученик Рачинского.

[10] http://ru.wikipedia.org/wiki/Серпинский,_Вацлав
Вацлав Франциск Серпинский (14.03.1882 – 21.10.1969) — выдающийся польский математик. Известен своими трудами по теории множеств, аксиоме выбора, континуум-гипотезе, теории чисел, теории функций, а также топологии. Автор более 700 статей и 50 книг. Именем Серпинского названы: числа Серпинского, треугольник Серпинского, ковёр Серпинского, кривая Серпинского.

М. М. Галламов
E-mail: gallamov@gmail.com

Поступила в редакцию
11.02.2011 г.

3.1. Обозначения.

1. БМК — библиеотека математического кружка.
2. БС — биографическая справка.
3. дет. — детский.
4. док-во — доказательство.
5. ИЗиТЭМ. АиА. — избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра.
6. кл. — класс.
7. ЛМК — Ленинградские математические кружки.
8. мат. — математический.
9. матмех ЛГУ — математико-механический факультет Ленинградского государственного университета.
10. ММИ — метод математической индукции.
11. ММО — Московские математические олимпиады.
12. изд. — издательство.
13. сб. — сборник.
14. см. — смотри.
15. СПб — Санкт-Петербург.
16. с/с — система счисления.
17. столб. — столбец.
18. стр. или с. — страница.
19. энцикл. — энциклопедия.
20. ЭЭМ — энциклопедия элементарной математики.
21. N — множество натуральных чисел.
22. $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.
23. Z — множество целых чисел.
24. $A \Rightarrow B$ — из утверждения A следует утверждение B.
25. $A \Leftrightarrow B$ — из утверждения A следует утверждение B и, наборот, из B следует A.
26. Знак двоеточие в записи математической уртверждения, обозначает следующее: либо „такое, что“, либо „обладает свойством“, лбо каким-нибудь другим словосочетанием по смыслу заменяющим указанные.
27. $b|a$ — b делит нацело a или a делится нацело на b. В этой записи считается, что $b \neq 0$, чтобы в это дальнейшем специально не оговаривать.
28. $b \nmid a$ — b не делит нацело a или a не делится нацело на b.
29. $a = b (\mathrm{mod}\, p)$, если $a = pq_1 + r$ и $a = pq_2 + r$, то есть остатки от деления целых чисел на такое число p совпадают.

30. $\tau(n)$ — количество положительных делителей натурального числа n.
31. НОД $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — наибольший общий делитель целых чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n$.
32. НОК $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ — наименьшее общее кратное натуральных чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n$.
33. $[a]$ — целая часть числа a; наибольшее целое число не превосходящее a.
34. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.
35. $|a|$ — абсолюная величина числа a.
36. $|A|$ — порядок (количество элементов) множества A.
37. $A \backslash B$ — операция удаления элементов из множества A, принадлежащих как множеству A, так и множеству B.