Конспект семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната «Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На двенадцатом заседании семинара (22.12.2009) ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Замечательные точки треугольника и кубические кривые»**.

Тема оказалась на стыке «детской» и «взрослой» математики (соответственно, геометрия треугольника и эллиптические кривые).

Введём понятие изогонального сопряжения двумя способами. Предварительно зафиксируем треугольник.

Определение 1. Возьмём произвольную точку A внутри треугольника. Проведём через неё чевианы и отразим их относительно соответствующих биссектрис. Новые лучи пересекутся в одной точке B. Эту точку назовём *изогонально сопряжённой* точке A (рис. 1).

Определение 2. Возьмём произвольную точку A внутри треугольника. Опустим из неё перпендикуляры на стороны. Проведём описанную окружность полученного треугольника. Она пересечёт стороны исходного треугольника ещё в трёх точках (в случае касания – в тех же). Восстановим в них перпендикуляры. Они пересекутся в одной точке B. Эту точку назовём *изогонально сопряжённой* точке A (рис. 2).

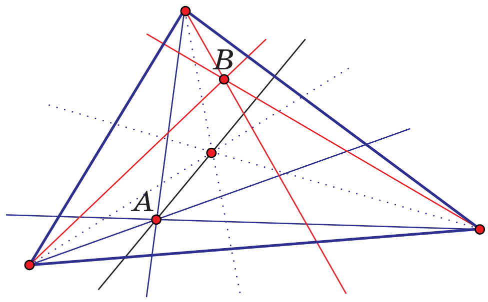

Рис. 1.

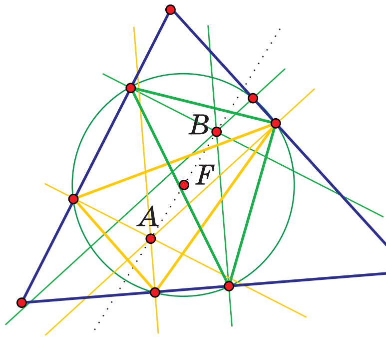

Рис. 2.

Упражнение 1. Докажите корректность и эквивалентность определений.

Упражнение 2. Какая точка будет изогонально сопряжена точке *B*?

Упражнение 3. Что дадут определения, если точка *A* окажется вне треугольника?

Замечание. С точки зрения «взрослой» математики изогональное сопряжение – это квадратичное преобразование плоскости.

Зафиксируем в плоскости треугольника точку *F* («центр вращения»). *Отметим все точки A, изогонально сопряжённые к которым точки B лежат на прямой FA.*

Утверждение. Получится кубическая кривая *C*.

Факт. Если в качестве центра вращения *F* выбрать замечательную точку треугольника, то на кривой *C* тоже будет лежать много замечательных точек.

Примеры.

1. Кубика Томсона. Центр вращения *F* – точка пересечения медиан. Кривая *C* проходит через ортоцентр, центр описанной окружности, середины сторон, середины высот.

2. Кубика Дарбу. Центр вращения *F* – точка, симметричная ортоцентру относительно центра описанной окружности. Кривая *C* проходит через ортоцентр и центр описанной окружности.

(Подробности и доказательства см.: *Прасолов В.В.* Рассказы о числах, многочленах и фигурах. – М.: Фазис, 1997. Глава 21.)

В последние годы открыто множество замечательных точек треугольника (всего более 3000). Существуют общества их любителей, сайты, каталоги и т.д. Мы предлагаем свой подход к их классификации, объединяющий «взрослую» и «детскую» математику, – по кубическим кривым.

Проект (коллективный). Создать каталог замечательных точек, расклассифицировав их по кубическим кривым.

К сожалению, построение кубических кривых затруднительно в программе «Живая геометрия», так как она создана не для этого. Зато такое построение нетрудно реализовать, скажем, в Maple (записав аналитически лучи, симметричные относительно биссектрис), однако эти «взрослые» программы не приспособлены для работы с треугольниками.

Также на двенадцатом семинаре прозвучали два доклада школьников. **Василий Болбачан** (г. Ставрополь, школа № 6, 9 класс) сделал доклад «Короткое элементарное доказательство формулы Гийера-Сондова». История этой удивительной работы такова. Вася учится в обычной школе. Заинтересовавшись высшей математикой, он купил справочник, в котором формулы приведены без доказательств. Узнав о степенных и тригонометрических рядах, он подумал, почему бы не быть логарифмическим рядам, стал пробовать, и пришёл к формуле

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}C^{k}{}_{m}\frac{(-1)^{k+1}}{m}\ln(ku+1).$$

Сначала это была только догадка, потом Вася получил длинное доказательство формулы, затем смог упростить его. Короткое доказательство было послано на Московскую математическую конференцию школьников (ММКШ) и рассмотрено А.Б. Скопенковым. Оказалось, что формула была получена в последние годы Гийером и Сондовым (J. Guillera, Spain, and J. Sondow, USA – специалисты по теории чисел), однако неэлементарными средствами. Сам Сондов счёл доказательство Василия новым и поздравил его с успехом. В результате Василий получил Научную премию конференции ММКШ (второй раз в истории конференции). Текст работы В. Болбачана (на английском языке) можно найти по ссылке http://arxiv.org/pdf/0910.4048v1.

Прямо во время доклада Г.Б. Шабат проверил формулу в программе Maple, взяв около 30 слагаемых. Сходимость получилась плохая, и Г.Б. усомнился, действительно ли ряд сходится. Василий на это ответил, что биномиальные коэффициенты при таких значениях индексов очень большие, и ошибки округления в Maple быстро накапливаются. И в самом деле, после повышения точности вычислений сумма стала сходиться гораздо лучше.

Вторым был доклад одиннадцатиклассника **Андрея Блинова** (г. Москва, школа-интернат «Интеллектуал», 11 класс, руководитель Я.И. Абрамсон) «Критерий выпуклости». Замечательно, что Андрей также сам является автором задачи. Легко доказать, что если на плоскости есть выпуклое замкнутое множество, то расстояние от произвольной точки плоскости до него достигает минимума в одной и только в одной точке множества. Андрей поставил обратную задачу: известно, что для любой точки вне замкнутого множества расстояние до точек множества достигает минимума в единственной точке; верно ли, что множество выпуклое? Задача была им полностью решена, правда, по ходу изложения слушатели выловили некоторые неточности, которые Андрей потом устранил. Как потом выяснили участники семинара, задача также оказалась уже решена (и даже для произвольной размерности n), однако более «тяжёлыми» средствами. Ответ положительный (в гильбертовых же пространствах вопрос остаётся открытым).

Участники семинара желают успехов Василию и Андрею на математическом поприще и в жизни.

На тринадцатом (19.01.2010), четырнадцатом и пятнадцатом заседаниях семинара ***Г.Б. Шабат*** сделал доклады на тему «Комбинаторика».

I. Комбинаторика и её привлекательность для начинающих математиков.

1. Прямые задачи комбинаторики отвечают на вопрос «*сколько*?»

Детская задача: найти количество подмножеств в пятиэлементном множестве (5 удобно потому, что можно загибать пальцы). Для решения этой задачи нужно ввести порядок на множестве и уметь сравнивать ответы.

Взрослый пример: та же задача для n-элементного множества.

2. Обратные задачи комбинаторики (термин А.К. Звонкина)

Пусть в прямой задаче 1 и в прямой задаче 2 оказались одинаковые ответы. Задача: построить биекцию между перечисляемыми объектами.

Примеры.

А. Разные определения чисел Каталана.

Б. Количество прямоугольников в клетчатом квадрате $n \times n$ равно количеству кубиков в решётчатом кубе $n \times n \times n$.

В. (Эйлер). *Разбиением* натурального числа n назовём его представление в виде суммы невозрастающих натуральных чисел: $n = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, где $x_i \in N$, $x_1 \geq x_2 \geq \ldots$.

Выделим среди всех разбиений числа n два подвида:

Нечестные: $x_1 > x_2 > \ldots$. Обозначим их число Uneven (n).

Нечётные: x_i, $i_n = 2N + 1$. Обозначим их число Odd (n).

Эйлер открыл, что Uneven (n) = Odd (n).

Интересно было бы *доказать этот факт, построив биекцию между нечётными и нечестными разбиениями*.

Задача доступна и младшим школьникам: сколькими способами кучу из n шишек можно разложить на меньшие кучки? (Формулировка А.К. Звонкина, Г.Б. Шабата для летней школы в Переславле, 1990.)

3. Производящие функции

Пусть c_0, c_1, c_2, ... – количества перечисляемых объектов в «серийной» задаче.

Факт. *Для огромного количества глубоких задач комбинаторики оказывается, что*

$$f(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

– замечательная функция.

Пример. Сколько есть k-элементных подмножеств в n-элементном множестве?

Обозначив искомое количество через $\binom{n}{k}$, имеем: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$.

Более сложный пример. Найти комбинаторный смысл производящей функции

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^y = \sum c_k(y) x^k.$$

Интересно и вычисление производящей функции по данным числам c_0, c_1, c_2, ... и, наоборот, нахождение чисел c_0, c_1, c_2, ... по данной производящей функции.

4. Асимптотическая комбинаторика

Если ответ в задаче сложный и плохо вычисляется, то изучить *тенденцию роста* часто легче. (Особенно активно этим пользуются в статистической физике.)

Пример. Формула Стирлинга приближённо выражает факториал числа:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(т.е. отношение левой части равенства к правой стремится к 1 при $n \to \infty$).

Удивительно, что для выражения произведения целых чисел понадобились два трансцендентных числа – π и e.

Реально получить красивые асимптотические формулы в следующей задаче:

Проект. Сколько существует трёхвалентных графов?

Трёхвалентным называется граф, у которого из каждой вершины выходит три ребра или полуребра.

Исходные трёхвалентные графы изображены на рис. 3.

Известны три операции получения нового трёхвалентного графа из имеющегося:

1) пристыковка «сковородки» к ребру;
2) вставка перемычки между двумя рёбрами;
3) вставка двух рёбер внутрь имеющегося.

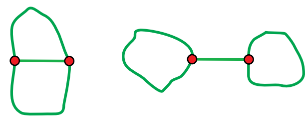

Рис. 3. «Тета» и «очки»

Теорема. Применяя к «тете» и «очкам» эти операции, можно получить все трёхвалентные графы.

Это даёт алгоритм, генерирующий список всех графов (без пропусков, но с повторениями). Отсюда можно получить оценки на количество таких графов. Интересно уточнить эти оценки, придумывая процедуры, сокращающие повторы. Для этого надо ввести процедуры сравнения.

II. Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля – единственный известный докладчику математический объект, который может увлечь и младшеклассника, и студента-гуманитария.

Когда мы работаем с комбинаторикой, то плодотворный подход – дать много определений одного объекта.

Введём пять определений биномиальных коэффициентов.

1) $\binom{n}{k} := \#\,\{k$-элементных подмножеств n-элементного множества$\}$.

2) Определение через производящие функции:

$$(1+x)^n =: \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

3) Индуктивное определение:

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1,\quad \binom{n}{k}:=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k},\ \text{где } 0<k<n.$$

4) Определение явной формулой:

$$\binom{n}{k}:=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

5) Определение через протоколы (записи испытаний Бернулли):

$$\binom{n}{k} := \{\textit{протоколы}(\omega_1,\ldots,\omega_n) \mid \#\,\textit{успехов} = k\},\ \text{где}\ \omega_i \in \{\textit{успех},\ \textit{неудача}\}.$$

Зачем много определений?

Логическая экономия: вместо десяти равносильностей хватит пяти.

Можно выбирать наиболее лёгкий «маршрут» доказательства. В нашем случае, например: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 3$, $2 \Leftrightarrow 5$, $1 \Leftrightarrow 5$.

Разные свойства очевидны из разных определений. Например, из определения 1) следует, что $\binom{n}{k}$ – натуральное.

Разные определения провоцируют разные обобщения. Так, определение 2) подсказывает, что надо рассмотреть производящую функцию $(1+x+y)^n$. Определение 4) – рассмотреть выражения вида $\dfrac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$. Определение 5) – рассмотреть вместо испытаний Бернулли испытания с тремя, четырьмя и т.д. исходами.

III. Числа Каталана

n	0	1	2	3	4	5	...
c_n	1	1	2	5	14	42	...

Рекурсивное определение:

$$c_0 = 1,$$
$$c_{n+1} = c_0c_n + c_1c_{n-1} + \ldots + c_nc_0. \qquad (*)$$

Для гуманитариев понятнее так:

$$1\cdot 1 = 1$$
$$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$$
$$1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 5 \text{ и т.д.}$$

Введём *категории Каталана* – систему множеств C_0, C_1, …:

$$\#\,C_0 = 1,$$
$$C_{n+1} \cong (C_0 \times C_n) \amalg (C_1 \times C_{n-1}) \amalg \ldots \amalg (C_n \times C_0).$$

Здесь $\amalg$ – копроизведение, а $\cong$ – взаимное соответствие.

Примеры.

1. Скобочные «слова»

$C_0 = \{\ \}$ – пустое скобочное слово.

Определим сцепление скобочных слов: U + V := (U)V.

Каждое новое скобочное слово получается сцеплением уже имеющихся.

Упражнение. Определить, какой набор правил описывает правильные скобочные слова. (*Ответ*: 1. В слове количество открывающихся скобок *равно* количеству закрывающихся. 2. В любой части слова от начала до текущего положения количество открывающихся скобок *не меньше* количества закрывающихся.)

$C_n = \{$«слова» длины $2n\}$.

Интересно сравнить операцию сцепления со сложением:

• нет коммутативности,

зато

• есть однозначная расцепляемость!

2. Триангуляция многоугольников

C_n = «триангуляция $(n+2)$-угольника»

У треугольника выделена одна сторона и есть триангуляция (что равносильно занумерованности вершин).

Определим сцепление триангуляций (рис. 5). Они также расцепляемы (проверьте!).

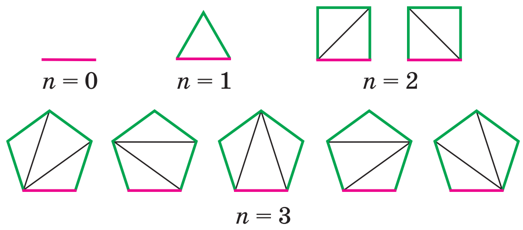

Рис. 4. Триангуляции многоугольников

Упражнение (связь 1 и 2)**.** Постройте взаимно однозначное соответствие между скобочными словами и триангуляциями (используйте однозначную расцепляемость тех и других).

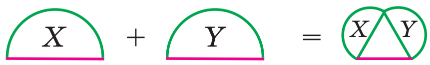

Рис. 5. Сцепление триангуляций

3. Плоские корневые деревья

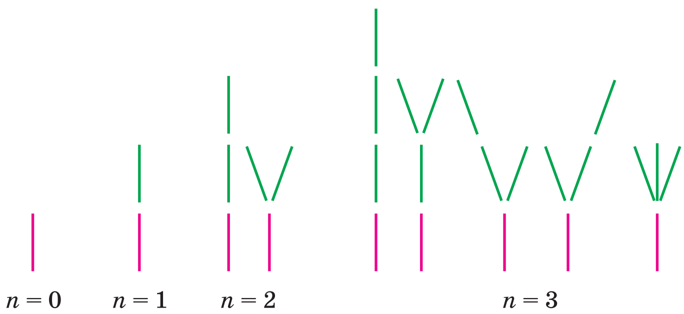

Рис. 6. Плоские корневые деревья

Упражнение (связь 1 и 3). Пусть плоское корневое дерево нарисовано на школьной доске, и его против часовой стрелки, начиная с корня, обползает учёная муха. Около доски стоит школьник с мелом и, глядя на движущуюся муху, пишет последовательность из открывающихся и закрывающихся скобок: когда муха ползёт вдоль ребра первый раз, школьник ставит открывающуюся скобку, а когда второй раз – закрывающуюся. Докажите, что, когда муха доползёт обратно до корня, школьник напишет правильное скобочное слово.

Научитесь по правильному скобочному слову рисовать плоское корневое дерево.

Факт. Во всех известных Г.Б. Шабату категориях Каталана на C_n действуют инволюции (т.е. преобразования, двукратное применение которых даёт тождественное). Например, в триангуляциях и скобочных словах это – осевая симметрия. Но часто они не соответствуют друг другу!

Проект. Изучить наборы инволюций в категориях Каталана (порядки групп и т.д.).

4. Производящая функция $C(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\dots$. Нетрудно проверить, что (*) эквивалентна тому, что

$$xC^2-C+1=0 \Rightarrow C(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Разлагая полученную функцию в ряд, будем узнавать коэффициенты – числа Каталана.

Заметим, что

$$\frac{c_1}{c_0}=\frac{1}{1}=\frac{2}{2},\ \frac{c_2}{c_1}=\frac{2}{1}=\frac{6}{3},\ \frac{c_3}{c_2}=\frac{5}{2}=\frac{10}{4},\ \dots\ \frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{4n+2}{n+2}.$$

Последнюю формулу можно доказать наглядно.

Упражнение. Составьте таблицы триангуляций с отмеченной невыделенной стороной и с отмеченным направленным ребром (рис. 7). Сделайте вывод.

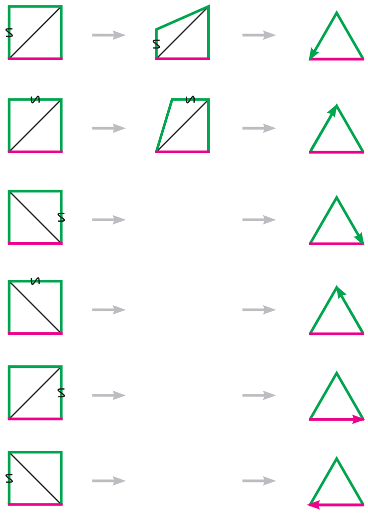

Рис. 7.

На тринадцатом заседании семинара (19.01.2010) ***Андрей Валентинович Зязин*** сделал доклад на тему **«История криптографии как источник исследовательских задач для школьников».**

Вначале докладчик перечислил конкурсы, связанные с криптографией:

• Олимпиада по математике и криптографии (проведено уже 20), 8–11 класс, участвуют 18 субъектов Федерации;

• Заочный конкурс по математике и криптографии (6–11 класс);

• Конкурс проектов по истории криптографии для старшеклассников (рефераты, математические работы, программистские работы).

Есть задачи, которые на олимпиаду не очень годятся, потому что требуют долгого осмысления. Из них можно сделать исследовательские задачи.

Примеры.

Задача 1. Дан зашифрованный текст (простая замена – сдвиг каждой буквы текста на одно и то же число букв по алфавиту), надо найти в нём слово "подъезд"».

В задаче возможны постепенные продвижения. Приведём этапы решения задачи с критериями оценки:

1) найти два одинаковых символа на расстоянии в три буквы (таких мест 7) [–+]

2) отобрать те, в которых остальные буквы не повторяются (их 4) [+–]

3) подставить узнанные буквы в остальной текст и отсеять бессмыслицу (останется 1) [+]

4) использовать частоты употребления букв [+!]

Заметим, что частота появления символов является инвариантом простой замены. С этим борются, вставляя пустышки из 2–3 символов.

Частое слово можно заменять одним символом, это же делают стенографистки и архиваторы.

Задача 2 (диск Альберти). Для зашифрования текста использовался вращающийся диск, центр которого находится на оси, закреплённой на неподвижном основании. Диск разделен на 32 равных сектора, в которые в неизвестном порядке вписаны все буквы русского алфавита (по одной в каждый сектор; буквы Е и Ё не различаются). На основании, по одной напротив каждого сектора, выписаны буквы в алфавитном порядке по часовой стрелке. Каждое положение диска, получающееся из исходного поворотом на угол, кратный величине сектора, задает соответствие между буквами на основании и на диске. При зашифровании очередной буквы текста её заменяли соответствующей ей буквой при текущем положении диска, после чего диск поворачивался на один сектор по часовой стрелке.

Вопросы:

1. Как крутить, чтобы шифр был устойчивым?
2. Запрограммируйте диск Альберти.
3. Какой шифр лучше: вначале простая замена, потом диск Альберти или наоборот? (С точки зрения математики здесь надо изучить группы подстановок.)

Энигма – знаменитая немецкая шифровальная машина времён Второй мировой войны – сделана из композиции трёх дисков Альберти. Первый компьютер создан ради чтения шифра энигмы.

Среди нескольких вариантов расшифровки человек сразу отличает нормальный текст от «абракадабры». Интересно научить делать это компьютер.

Особенности криптографии как источника исследовательских тем:

• тема может уйти в историю, в программирование, в математику;

• есть ясная для школьника практическая мотивация (современная экономика держится на шифрованных электронных переводах денег, спам-фильтры и т.д.).

Математические идеи, которые понадобятся школьникам для работы:

• подстановки;

• вероятность;

• комбинаторика;

• сложность / оптимизация алгоритмов.

Материалы по криптографии можно найти на сайте http://cryptolymp.ru/ и в книжке: *Зубов А.Ю.* Олимпиады по криптографии и математике. М.: МЦНМО, 2006.

На пятнадцатом заседании семинара (16.03.2010) ***А.Б. Скопенков*** сделал доклад на тему **«Летние конференции Турнира городов»** (о них см.: сайт http://www.turgor.ru/lktg и книгу «Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы». Выпуск 1. М.: МЦНМО, 2009).

Особенности летних конференций:

• отбор участников по итогам олимпиад высокого уровня;

• мотивировка: школьники приходят к теоремам естественным путём – решая задачи;

• проверка: жюри серьёзно читает письменные решения, возможна доработка решений по советам жюри;

• свобода: выбор из 5–6 задач, нерегламентированные занятия;

• продолжение темы после конференции – единичные случаи.

Набираются 50–80 человек после 9-го и 10-го классов. Длительность конференций около недели.

Задачи:
• учебные (не новые, но малоизвестные):
• классическая геометрия;
• комбинаторика;
• теория групп, теория чисел;
• комбинаторная геометрия;
• алгебра (реже).

Примеры задач.

1. Сложность суммирования

(http://olympiads.mccme.ru/lktg/2003/summ.ru/index.htm).

За одну копейку автомат вычисляет сумму двух чисел. За какую минимальную сумму он вычислит:

1. $x_1 + x_2 + ... + x_{100}$;
2. $x_1 + x_2 + ... + x_{100}$ и $x_{50} + x_{51} + ... + x_{150}$;
3. ...

...

$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}\,x_2 + ... + a_{in}x_n$, где $i = 1, ..., m$?

Результаты. Обозначим через $L(m, n)$ наименьшую сумму, за которую автомат при любых коэффициентах a_{ij} гарантированно вычислит $y_1, ..., y_m$. Тогда

$$\frac{c_1 n^2}{\log_2 n} < L(n,n) < \frac{c_2 n^2}{\log_2 n}.$$

Левое неравенство строится из мощностных соображений, а правое – конструированием явной схемы.

2. Плетение корзинок (http://www.turgor.ru/lktg/2004/lines.ru/index.htm)

Изобразим несколько прямых так, чтобы было видно – одна проходит над другой или под другой. Тогда некоторые картинки реализуются, а другие – нет.

Простейший пример нереализующейся картинки – с 4 прямыми.

Теорема 1. Существует бесконечное семейство нереализуемых картинок, все подкартинки каждой из которых реализуемы.

Изотопией назовём сдвиг прямых, при котором не возникают пересечения прямых по три и который не переносит прямую за «точку встречи» двух других.

Теорема 2. Реализуемость неинвариантна относительно изотопии (есть пример с 6 прямыми).

Вариант задачи. Даны горизонтальные и вертикальные прямые. Каждая точка встречи прямых описывается 0 (горизонтальная выше) или 1 (вертикальная выше). Как по матрице пересечений проверить реализуемость картинки?

Вернуться к содержанию