Конспект семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

Наталья Михайловна НЕТРУСОВА
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

Алексей Иванович СГИБНЕВ
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

На седьмом и восьмом заседаниях семинара ***Г.Б. Шабат*** сделал доклады на тему **«Геометрия как источник исследовательских тем для школьников»**. Для удобства чтения эти доклады объединены.

Геометрия отвечает на вопросы: «Где мы живем?» (классическая постановка), «Какие возможны миры?» (современная постановка).

Ответ: плоскость или пространство. Какое оно: плоское или кривое?

Интересно, что ответ «плоское» не описывает реальный мир.

С чего начинается геометрия?

Подумаем об аксиоматике геометрии.

I постулат: Через две разные точки проходит прямая и только одна.

V постулат (или *аксиома параллельности*): Через точку, не лежащую на прямой, проходит прямая, параллельная данной, и только одна[1].

(Ещё для нетривиальности геометрии нужно ввести:

0-й постулат: На плоскости есть хотя бы один треугольник.)

Мы покажем, что с этими постулатами уже возможны содержательные геометрические задачи.

---

[1] Как обычно на плоскости, прямые называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Три языка геометрии

Чертёж (как язык вроде бы никем не описан). Понятие чертежа эволюционирует. Видимо, будущее за цветными и анимированными чертежами. Встаёт вопрос о чертежах, которые можно было бы понимать без дополнительных пояснений.

Естественный язык. Состоит из правильно построенных с точки зрения русского языка фраз с математическим смыслом, например I постулат: «Через две разные точки проходит прямая и притом только одна».

Формальный язык. Например, тот же I постулат: $\forall P,Q; [P \neq Q] \Rightarrow \exists! l; [l \ni P] \wedge [l \ni Q]$.

Лингвисты мечтают о точно описанных языках, потому что с ними легко работать. Но от таких записей они приходят в уныние – уж очень не похоже на привычные им языки – и не торопятся описать формальный язык. В связи с такими записями вспоминается шутка: «Математики – странные люди: говорят одно, а пишут другое».

Здесь возникает педагогическая проблема: как эти языки сочетать?

Возможные проекты по формальным языкам:

1. Компьютерная проверка правильности фразы на формальном языке.
2. Удобный редактор для ввода формальных фраз.

Если это сделать, то формализуется доказательство, и тогда возможна компьютерная проверка правильности доказательства.

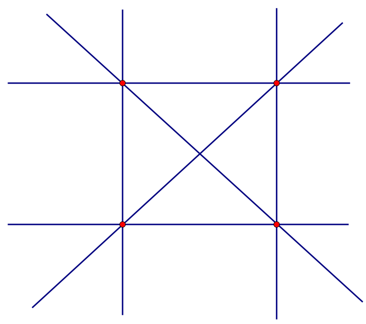
Тема 1: Квазиплоскости

Будем рассматривать *квазиплоскости*, т.е. множества, в которых выделены некоторые подмножества, именуемые прямыми, и в которых выполнены 0, I и V постулаты. Встаёт вопрос об описании всех квазиплоскостей.

Квазиплоскостей много.

Пример: $\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_2)$.

Четыре точки и шесть прямых (в центре точки нет!):



Обобщение: аффинная плоскость над конечными полями $\mathcal{A}^2(\mathcal{F}_p)$.

Точкой назовём пару чисел (x, y), где $x, y \in \mathcal{F}_p$.

Прямой назовём множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b, c принадлежат $\mathcal{F}_p$, причем a и b не равны нулю одновременно.

Упражнение. Доказать, что это действительно квазиплоскость (т.е. что для такого множества выполнены I-й и V-й постулаты).

Первые теоремы о квазиплоскостях

Рассмотрим две пересекающиеся прямые – «оси». Через точку, не принадлежащую этим прямым, проведём 2 прямые, параллельные осям. Каждая прямая пересечёт другую ось (почему?). Эта конструкция показывает, что справедлива:

Теорема 1. Существует биекция плоскости на произведение двух прямых (т.е. на множество всех пар (x, y), где x – точка одной прямой, а y – точка другой прямой).

Теорема 2. Между любыми двумя прямыми существует биекция, следовательно, они равномощны.

Следствие. Если плоскость конечна, то количество её точек – полный квадрат.

Примеры конечных плоскостей:

4 точки – уже было

9 точек – легко строится

16 точек – посложнее. Можно через поле $\mathcal{F}_4$, а можно синтетическими рассуждениями

25 точек – для школьников непросто, но реально

36 точек не бывает, как нет и поля $\mathcal{F}_6$

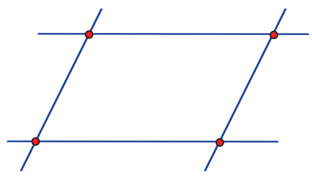
Компьютерный проект: перебрать все квазиплоскости.

Берем n^2-элементное множество, разбиваем его каким-то образом на подмножества и проверяем, не являются ли эти подмножества прямыми (т.е. не выполняются ли для них I и V постулаты).

Посмотрим, что интересного можно найти на квазиплоскостях.

Тема 2: Параллелограммы на квазиплоскостях

Назовём фигуру из четырех прямых, изображённых на рисунке, параллелограммом.



Факт: Если у одного параллелограмма диагонали параллельны, то и у всех параллелограммов диагонали параллельны.

Если диагонали не параллельны, то можно рассматривать точку их пересечения. Назовем её серединой отрезка. Это даёт определение середины, не использующее понятие длины.

Упражнение. Проверить корректность определения (почему середина не зависит от выбора параллелограмма?). Она не следует из аксиом I, V.

Оказывается, корректность определения следует из дезарговости плоскости.

Дезарговость плоскости означает следующее: если есть два треугольника ABC и abc в пространстве такие, что Aa, Bb и Cc пересекаются в одной точке, то точки пересечения прямых AB и ab, AC и ac, BC и bc лежат на одной прямой. Другими словами: два треугольника обладают центром перспективы $\Leftrightarrow$ они обладают осью перспективы.

Отметим, что в пространстве теорема Дезарга легко выводится только из аксиом, относящихся к инцидентности точек, прямых и плоскостей. Поэтому дезарговость плоскости равносильна вложимости плоскости в пространство.

Открытая задача: перечислить все конечные недезарговы плоскости.

Итак, уже около самых оснований геометрии есть содержательная и красивая математика!

Две картинки на тему теоремы Паскаля

Вернёмся к бесконечным плоскостям.

Блез Паскаль в шестнадцать лет доказал теорему о «Мистическом шестиугольнике» (см. чертёж 1). Это не просто случайный факт, а одна из центральных теорем геометрии: «Если шестиугольник вписан в конику, то три точки пересечения продолжений пар противоположных сторон лежат на одной прямой».

Обратное утверждение (см. чертёж 2) показывает, как конику можно построить с помощью только точек и прямых. Это значит, что в упрощённой геометрии, о которой шла речь выше, есть место для коник!

На восьмом заседании семинара *17 мая 2009 г.* были заслушаны доклады учеников. Доклад **«Двуквадратные числа»** помещен в настоящем номере журнала «Полином» (см. с. 53–62). Остановимся на других работах.

1. Андрей Блинов «Пространственные шахматы» (*10 класс, школа «Интеллектуал», научный руководитель Я.И. Абрамсон*)

Задача. На бесконечном поле король играет против нескольких ладей. Смогут ли ладьи поставить королю мат? Если да, то сколько их понадобится? Ладья бьёт три ряда: горизонтальный, вертикальный и продольный.

Решение. Рассмотрим проекцию игры на горизонтальную плоскость. Каждая ладья бьёт вертикальный ряд, т.е. «сжигает» одну клетку в плоскости проекции. Если король попадёт в замкнутую фигуру из сожжённых клеток, то победа ладьям обеспечена. Будем ставить ладей по высоте очень далеко от плоскости короля, чтобы он заведомо не смог до них добраться за время игры. Тогда игра полностью сводится к двумерным шахматам между королём и игроком, сжигающим клетки.

Утверждается, что игрок, сжигающий клетки, всегда может победить. Предлагается следующая стратегия: запираем короля в квадрат со стороной 545 клеток. Будем строить контур квадрата, сжигая вначале 1 клетку через 16. Там, куда пойдёт король, будем постепенно сгущать контур. Можно доказать, что мы всегда успеем достроить кусок забора до прихода к нему короля (правда, докладчик не предъявил полного доказательства, но убедил слушателей).

Была показана компьютерная программа, демонстрирующая проекцию игры на плоскость.

Комментарии к докладу.

Г.Б. Шабат:

1) в презентации лучше видеть ладей и королей, чем зелёные и красные квадратики;

2) интересно было бы сделать софт для пространственных шахмат;

3) ещё можно играть в шахматы на торе.

К.В. Медведев:

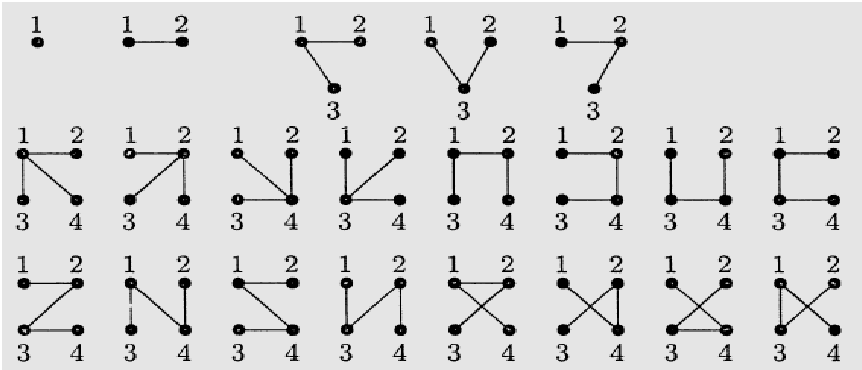
1) было бы интересно найти оптимальную стратегию, но это сложно; стоит «добить» хотя бы эту стратегию – показать, что при ней данный размер квадрата минимальный, и т.д.;

2) нетрудно запрограммировать и легко изучать игру со случайным блужданием короля.

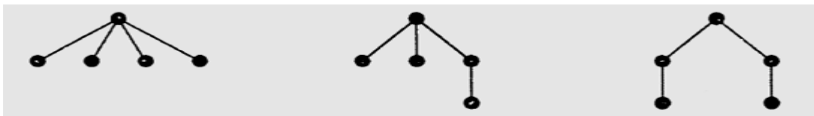
2. Дима Горбунов «Подсчёт числа пронумерованных деревьев» (7 класс, *школа «Интеллектуал», научный руководитель А.И. Сгибнев*).

Задача. Какое количество деревьев можно построить на n пронумерованных вершинах?

Очевидно, что на 1-й вершине можно построить лишь 1 дерево с 0 ребрами. На 2-х вершинах – 1 дерево. На 3-х вершинах – 3 дерева. На 4-х – 16. Ниже показаны способы для таких количеств вершин.



Пусть $n = 5$. Теперь прямой подсчёт уже достаточно сложен. Подсчитаем количество неизоморфных деревьев. Их три:



Первое из них можно пронумеровать 5 способами, второе – $\frac{5!}{2!} = 60$ способами, третье – тоже $\frac{5!}{2!} = 60$ способами. Сложим всё это: 5 + 60 + 60 = 125. Соберём данные в таблицу:

Количество вершин	1	2	3	4	5
Количество деревьев	1	1	3	16	125

Выдвигаем гипотезу.

Теорема. Количество деревьев, которые можно построить на n пронумерованных вершинах, равно n^{n-2}.

Теперь докажем эту теорему. Перед этим введём новые понятия.

Определения. Помеченным деревом называется дерево, в котором выделены две вершины, одну из них будем называть левым концом, а другую – правым. (Например, можно отмечать левый конец кружочком, а правый – квадратом.)

Пусть F_n – количество помеченных деревьев на n вершинах, а K_n – количество деревьев на n вершинах графа.

Для доказательства потребуется лемма.

Лемма. $F_n = K_n n^2$.

Доказательство. Действительно, берём дерево и выбираем одну из вершин n способами и другую – n способами. Итого – $K_n n^2 = F_n$, ч.т.д.

Доказательство теоремы. По лемме $F_n = K_n n^2$. Если мы докажем, что $F_n = n^n$, то $K_n = \frac{F_n}{n^2} = \frac{n^n}{n^2} = n^{n-2}$.

Рассмотрим множество помеченных деревьев на n вершинах и множество ориентированных графов, у которых: 1) из каждой вершины идёт ровно одно ребро; 2) между двумя вершинами не более двух рёбер; 3) разрешены петли.

Количество способов построить такой ориентированный граф – n^n, поскольку из первой вершины ребро можно провести n способами (петля и $n - 1$ вершина), из второго – тоже n и т.д., в результате получается n^n.

Докажем, что множества помеченных деревьев и ориентированных графов равномощны. Рассмотрим какой-либо ориентированный граф и попробуем превратить его в помеченное дерево. Введём новое множество M_1, в которое включим все вершины циклов графа, причем номера вершин идут в порядке возрастания. Введём функцию $f(x)$ – номер вершины, в которую идёт ребро из вершины с номером x. Пусть $M_1 = \{a, b, c, d, ..., z\}$ и $M_2 = \{f(a), f(b), f(c), ..., f(z)\}$. Соединим все вершины множества M_2 рёбрами: из $f(a)$ в $f(b)$, из $f(b)$ в $f(c)$ и т.д. При этом отметим $f(a)$ левым концом, а $f(z)$ – правым. Все остальные вершины (не включённые в множество M_2) соединим точно так же, как и в ориентированном графе. Получилось помеченное дерево, так как мы убрали все циклы.

Нетрудно получить и обратный результат – из дерева сделать ориентированный граф. Возьмем P – путь из левого конца в правый и включим его без изменений в множество M_2. Расположим числа в множестве P в порядке возрастания и включим результат в множество M_1. $M_1 = \{a, b, c, d, ..., z\}$. $M_2 = \{f(a), f(b), f(c), ..., f(z)\}$. Строим циклы ориентированного графа по этим двум множествам. Оставшиеся вершины подключаем так же, как они подключены к вершинам циклов, по направлению к ним. Получился ориентированный граф.

Таким образом, мы установили взаимнооднозначное соответствие, поскольку из каждого помеченного дерева получается ориентированный граф, а из него получается то же самое помеченное дерево. Из двух ориентированных графов не может получиться одно и то же дерево, так как тогда это дерево даёт 2 ориентированных графа, а этого быть не может. Аналогично и с деревьями – из двух помеченных деревьев не может получиться один ориентированный граф, так как из него тогда получается два дерева. Противоречие. Значит, установлено взаимнооднозначное соответствие, поэтому эти множества равномощны. Теорема доказана.

Комментарий руководителя о ходе работы. Дима за несколько дней угадал формулу с помощью последовательного перебора помеченных деревьев с 1, 2, 3, 4 и т.д. вершинами. Затем около месяца безуспешно пытался её доказать (я ему особенно не помогал, чтобы он почувствовал сложность задачи). Когда Дима начал уставать, я стал давать ему подсказки, стараясь навести на то решение, которое знал сам[2]. Однако в результате он придумал другое доказательство. Угаданная формула подсказывает путь доказательства: построить биекцию с множеством из n элементов, каждый из которых принимает одно из n значений. Дима нашёл такое множество и смог пройти этим путём. И это поучительная демонстрация того, что когда учитель не пытается всё жёстко распланировать, может «вырасти» что-то новое для него самого!

Вернуться к содержанию

[2] Имеется в виду кодирование. См.: *Сгибнев А.И., Нетрусова Н.М.* О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике // Полином. 2009. № 2. С. 95.