Условия, решения, комментарии и критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов.

I. Решите задачи.

1. Квадраты. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали большой квадрат. Из него, также по линиям сетки, вырезали меньший квадрат. После этого от большого квадрата осталось ровно 79 клеток. Обязательно ли вырезанный квадрат содержал одну из угловых клеток большого?

А. Шаповалов

Ответ: да, обязательно.

Решение. Пусть большой квадрат содержал N^2 клеток, а вырезанный квадрат – M^2 клеток, тогда $N^2 - M^2 = 79$, то есть $(N - M)(N + M) = 79$. Так как 79 – простое число, то $\begin{cases} N + M = 79, \\ N - M = 1 \end{cases}$. Решением этой системы является $N = 40$, $M = 39$, следовательно, вырезанный квадрат примыкал к двум сторонам большого, то есть содержал одну из его угловых клеток.

Отметим, что заключительный вывод можно сделать и не решая систему. Он следует из равенства N – M = 1.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*

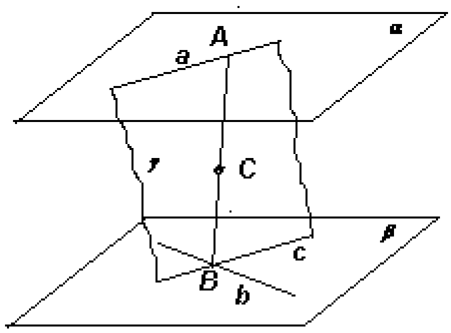
Приведено верное, в целом, рассуждение, в котором есть мелкие пробелы или неточности – 8 баллов.

Приведен только верный ответ – 1 балл.

2. Прямые. Даны две скрещивающиеся прямые. Все прямые, которые пересекают обе данные, красят в синий цвет. Укажите все точки пространства, которые останутся неокрашенными.

Фольклор, предложил Д. Шноль

Ответ: неокрашенными останутся все точки двух параллельных плоскостей, каждая из которых содержит одну из данных прямых, за исключением точек, принадлежащих этим прямым.



Решение. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b. Проведем через прямую a плоскость α, а через прямую b – плоскость β так, чтобы α и β были параллельны.

Пусть точка *C* лежит в плоскости α, но не принадлежит прямой a. Тогда любая прямая, проходящая через *C* и пересекающая a, лежит в плоскости α. Такая прямая не может пересечь b, поскольку $b \parallel \alpha$. Значит, все такие точки *C* будут неокрашенными.

Пусть точка *C* не лежит в плоскости α, тогда проведем плоскость γ через *C* и a. Так как γ пересекает α, то она пересекает и β по некоторой прямой c, причем $c \parallel a$ (см. рис.). Следовательно, прямая c не параллельна прямой b, но они лежат в одной плоскости, значит, c и b пересекаются в некоторой точке *B*. Тогда прямая *BC*, лежащая в плоскости γ, пересекает прямую a. Значит, все такие точки *C* будут окрашенными.

Если же точка *C* принадлежит прямой a, то выбираем любую точку В на прямой b и прямая *BC* будет окрашена.

Для плоскости β все рассуждения аналогичны.

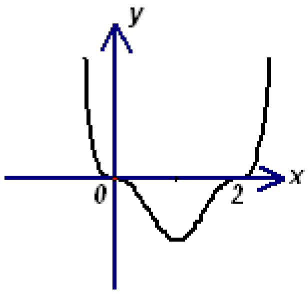
Таким образом, если точка *C*, не принадлежащая данным прямым, лежит в плоскости, содержащей одну из этих прямых и параллельной другой прямой, то точка *C* будет неокрашенной. В противном случае она будет окрашенной.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*

Приведено верное, в целом, рассуждение, получен верный ответ, но в обоснованиях есть пробелы или недочеты – 7-9 баллов.
Приведено верное, в целом, рассуждение, но не рассмотрены точки, принадлежащие данным прямым – 8 баллов.
Доказано, что точки, лежащие в плоскостях α и β и не лежащие на данных прямых, не окрашены, но не доказано, что других неокрашенных точек нет – 4 балла.
Приведен только верный ответ – 2 балла.

3. График. На рисунке схематически изображен график многочлена (*график касается оси x в двух точках*). Какую наименьшую степень может иметь этот многочлен?

Д. Шноль



Ответ: шестую степень.

Решение. График многочлена касается оси *x* в двух точках, но «при переходе» через каждую из них вид монотонности не изменяется. Значит, в этих точках производная многочлена имеет нули и «при переходе» не меняет знак, то есть это нули четной кратности. Еще один нуль производная имеет в точке минимума функции. Следовательно, производная имеет, как минимум, пять корней (с учетом кратности), то есть является многочленом степени не меньше пяти. Значит, исходный многочлен имеет степень не меньше шести.

Приведем пример многочлена шестой степени, удовлетворяющего условию задачи: $P(x) = ax^3(x-2)^3$, $a > 0$. Его производная равна $P'(x) = 6ax^2(x-2)^2(x-1)$. Тогда *x* = 1 – точка минимума *P*(*x*):, а *x* = 0 и *x* = 2 – точки касания его графика с осью абсцисс, которые также являются его точками перегиба.

Оценку можно также сделать, рассмотрев вторую производную многочлена, график которого изображен на рисунке. Так как данный график имеет четыре точки перегиба (две точки в нулях функции и две – между нулями и точкой минимума), то вторая производная является многочленом, степень которого не меньше четырех. Следовательно, степень исходного многочлена не меньше шести.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*
Приведено верное, в целом, рассуждение, но некоторые использованные и неочевидные утверждения не обоснованы – 8-9 баллов.
Приведено верное, в целом, рассуждение, но допущена арифметическая ошибка – 8-9 баллов.
Доказано только, что степень многочлена не меньше шести – 7 баллов.
Приведены только верный ответ и пример – 3 балла.
Приведен только верный ответ – 2 балла.

4. Уравнение. Докажите, что при всех натуральных *n* уравнение $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = n^2$ имеет хотя бы один рациональный корень, принадлежащий интервалу (1; 2).

Р. Хонсбергер

Решение. Докажем, что данное уравнение имеет корень $\frac{n+1}{n}$, принадлежащий интервалу (1; 2).

Первый способ. Разделим многочлен $nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + ... + 3x^2 + 2x + 1 - n^2$ на $x - \frac{n+1}{n}$, записав это деление в виде схемы Горнера (во второй строке таблицы показаны промежуточные вычисления).

	n	$n-1$	$n-2$	..	3	2	$1-n^2$
		$\frac{n+1}{n} \cdot n + n - 1$	$\frac{n+1}{n} \cdot 2n + n - 2$	..	$\frac{n+1}{n}(n-3)n + 3$	$\frac{n+1}{n}(n-2)n + 2$	$\frac{n+1}{n}(n-1)n + 1 - n^2$

$\frac{n+1}{n}$	n	$2n$	$3n$	..	$(n-2)n$	$(n-1)n$	0

Так как многочлен разделился без остатка, то $\frac{n+1}{n}$ – его корень, тогда этот же корень имеет и исходное уравнение.

<u>Второй способ</u>. Преобразуем данное уравнение, умножив обе его части на $x - 1$ (*это не приведет к появлению посторонних корней на интервале (1; 2)*). Получим: $-1-x-x^2-x^3-...-x^{n-1}+nx^n=n^2\left(x-1\right)$. Далее используем формулу суммы геометрической прогрессии: $-\frac{x^n-1}{x-1}+nx^n=n^2\left(x-1\right)$. Затем, умножив еще раз обе части на $x - 1$, получим: $nx^{n+1}-\left(n+1\right)x^n+1=n^2\left(x-1\right)^2$. При подстановке в это уравнение $x = \frac{n+1}{n}$ получим верное равенство, значит, это число является как его корнем, так и корнем исходного уравнения.

<u>Третий способ</u>. Рассмотрим функцию $F(x) = x + x^2 + x^3 +... + x^n$. Так как $F'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + nx^{n-1}$, то данное уравнение имеет вид: $F'(x) = n^2$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, получим, что на интервале (1; 2) $F\left(x\right)=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}$. Найдем ее производную: $F'\left(x\right)=\frac{\left(\left(n+1\right)x^n-1\right)\left(x-1\right)-\left(x^{n+1}-x\right)}{\left(x-1\right)^2}=\frac{n\cdot x^{n+1}-\left(n+1\right)x^n+1}{\left(x-1\right)^2}$.

Теперь уже несложно проверить, что $x = \frac{n+1}{n}$ является корнем уравнения $F'\left(x\right)=n^2$.

Можно также сразу подставить $x = \frac{n+1}{n}$ в исходное уравнение и доказать полученное равенство методом математической индукции.

Угадать корень уравнения помогает теорема о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами и решение данного уравнения при n = 2, 3, 4.

<u>Критерии проверки</u>. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*
Рациональный корень угадан верно, но не показано, что он действительно является корнем данного уравнения – 3 балла.
Доказано, что уравнение имеет корень на интервале (1; 2), но не доказано, что он рациональный – 0 баллов.

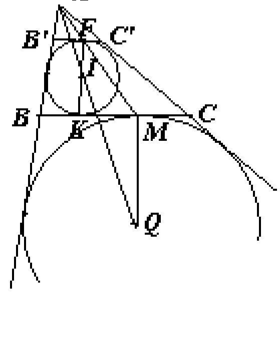
Некоторые участники указывали, что при n = 1 уравнение становится числовым равенством, поэтому говорить о его корнях бессмысленно. Наличие или отсутствие этого соображения никак не влияло на оценку, выставляемую жюри.

5. Треугольник. В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL – ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC.

Фольклор

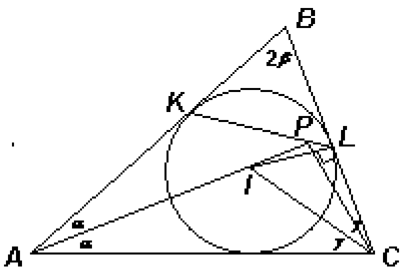
Решение. Предварительно докажем две леммы.

<u>Лемма 1</u>. Пусть в треугольнике ABC вписанная и вневписанная окружности касаются стороны BC в точках K и M соответственно. Точки I и Q – центры этих окружностей, точка F на вписанной окружности диаметрально противоположна точке K (см. рис.). Тогда точки A, F и M лежат на одной прямой.



Доказательство. Рассмотрим гомотетию с центром A, при которой образом точки Q является точка I. Тогда образом касательной BC к вневписанной окружности является касательная $B'C'$ к вписанной окружности, причем $B'C' \parallel BC$. Так как $QM \perp BC$, то $QM \parallel KF$, значит, образом точки M при этой гомотетии является точка касания $B'C'$ и вписанной окружности, которая совпадает с точкой F.

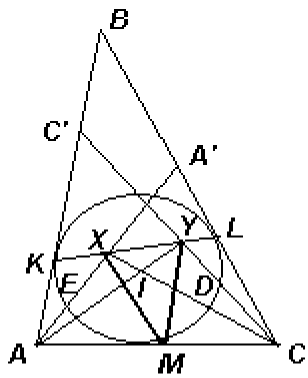
Лемма 2. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно, а биссектриса угла BAC пересекает отрезок KL в точке P. Тогда $\angle APC = 90°$.



Доказательство. Пусть I – центр вписанной окружности, тогда $IL \perp BC$ (см. рис.). Введем стандартные обозначения для углов треугольника: $\angle A = 2\alpha$; $\angle B = 2\beta$; $\angle C = 2\gamma$. Тогда $\angle BKL = 90° - \beta$; $\angle APK = 90° - \beta - \alpha = \gamma = \angle ICL$. Следовательно, четырехугольник $IPLC$ – вписанный, значит, $\angle APC = \angle IPC = \angle ILC = 90°$.

Теперь – решение предложенной задачи.

Из условия $3AC = AB + BC$ следует, что $BK = BL = \dfrac{AB + BC - AC}{2} = AC$. Пусть лучи AE и CD пересекают стороны BC и AB в точках A' и C' соответственно (см. рис.). Из того, что DK и EL – диаметры окружности, по лемме 1 следует, что A' и C' – точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно. Так как точки касания вписанной и вневписанной окружностей с одной и той же стороной треугольника симметричны относительно середины этой стороны, то $A'C = AC = AC'$, то есть треугольники ACA' и CAC' – равнобедренные.



Пусть CX – биссектриса треугольника ACA', тогда $\angle AXC = 90°$, то есть точка X лежит на отрезке KL (см. лемму 2). Аналогично, основание Y биссектрисы AY треугольника CAC' также лежит на KL. Так как $\angle AXC = \angle AYC = 90°$, то четырехугольник $AXYC$ – вписанный с диаметром AC. Середина M стороны AC – центр окружности, поэтому $MX = MY$.

Использованная лемма 2 – это задача №255 из задачника И.Ф. Шарыгина «Геометрия 9 – 11», на которую опирается решение многих геометрических задач.

Существуют и другие способы решения.

Критерии проверки. *Полное обоснованное решение – 10 баллов.*
Приведено верное, в целом, рассуждение, а использованные леммы (или аналогичные утверждения) только сформулированы, но никак не обоснованы – 8 баллов.
Приведены верные идеи решения, но до конца оно не доведено – 1-3 балла.

Отметим, что счетные решения (методом декартовых или барицентрических координат, векторным методом и пр.) оценивались положительно только в том случае, если были доведены до конца

II. Методический блок.

В заданиях №6 и №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и приведите верное решение.

6. Делители. «Задача». Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

«Ответ»: 10.

«Решение». У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

Предложил Д. Шноль

Комментарий. «Решение» содержит две ошибки. Число, которое имеет ровно четыре делителя, представимо либо в виде $p\cdot q$, либо в виде p^3 (где p и q – различные простые числа). Последний случай в «решении» упущен и тем самым потеряно число 5^3 = 125. Кроме того, среди простых чисел, меньших 40, пропущено число 2. Таким образом, верный ответ: 12.

<u>Критерии проверки</u>. *Указаны оба пропущенных числа, объяснено, из-за чего пропущено число 125 и показано, что других решений нет – 10 баллов*.
Указано, что пропущено число 125, объяснено, из-за чего это произошло, показано, что других решений не возникает, но пропущенный делитель 2 не замечен – 6 баллов.
Указаны оба пропущенных числа, но никаких объяснений нет, то есть указана только ошибка в «ответе» – 4 балла.
Указано только, что пропущен делитель 2 или пропущено число 125 – 2 балла.
Приведен только верный ответ – 1 балл.

7. Значение выражения. «Задача». Положительные числа *x*, *y* и *z* таковы, что $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1$. Какие значения может принимать выражение $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$?

«Ответ»: 0.

«Решение». Заметим, что $\frac{x^2}{y+z}+x$ = $\frac{x^2+xy+xz}{y+z}$ = $\frac{x}{y+z}(x+y+z)$. Аналогично, $\frac{y^2}{z+x}+y$ = $\frac{y}{z+x}(x+y+z)$ и $\frac{z^2}{x+y}+z$ = $\frac{z}{x+y}(x+y+z)$.

Сложим почленно три полученных равенства, введя следующие обозначения: $A=\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$, $B=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$, и вынося за скобки в правой части выражение *x* + *y* + *z*. Тогда *B* + (*x* + *y* + *z*) = (*x* + *y* + *z*)*A*. По условию *A* = 1, поэтому *B* = 0.

Использована идея задачи из математической регаты 9 класса (2013/14 уч./г.)

Предложил А. Блинков

Комментарий. Заметим, что полученный «ответ» не может быть верным, так как при положительных значениях *x*, *y* и *z* выполняется неравенство $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$ > 0. При этом рассуждения в «решении» ошибок не содержат. Значит, некорректно условие «задачи». Это можно обосновать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Преобразуем равенство из условия «задачи»: при *x* > 0, *y* > 0 и *z* > 0

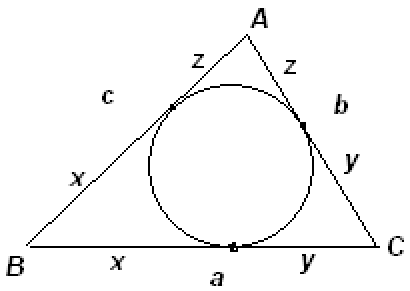
$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}=1 \Leftrightarrow x(z+x)(x+y)+y(y+z)(x+y)+z(y+z)(z+x) = (x+y)(y+z)(z+x).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим равенство: x^3 + y^3 + z^3 + 3*xyz* = 0, которое не может быть верным при положительных значениях всех переменных.

<u>Второй способ</u>. Докажем, что при *x* > 0, *y* > 0 и *z* > 0 выполняется неравенство $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq 1{,}5$.

Пусть *x* + *y* = *a*, *y* + *z* = *b*, *z* + *x* = *c*, тогда $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}$. Выразим *x*, *y* и *z*: $x=\frac{a+c-b}{2}$, $y=\frac{a+b-c}{2}$, $z=\frac{b+c-a}{2}$. Таким образом, $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$ = $\frac{a+c-b}{2b}$ + $\frac{a+b-c}{2c}$ + $\frac{b+c-a}{2a}$ = $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}-1+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}-1\right)$ ≥ $\frac{3}{2}$, так как сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна двум.

Доказанное неравенство – это №6.79 из задачника М.Л. Галицкого, А.М. Гольдмана, Л.И. Звавича для 8-9 классов. Кроме того, использованная замена переменных имеет еще и геометрическую интерпретацию. Рассмотрим треугольник ABC (со сторонами a, b и c) и вписанную в него окружность, тогда x = p – b, y = p – c, z = p – a (2p – периметр ABC) – это расстояния от вершин треугольника до точек касания окружности с его сторонами (см. рис.).



В некоторых работах было приведена такая схема рассуждения «от противного»: обосновывалось, почему приведенный «ответ» не может быть верным, затем объяснялось, что в «решении» ошибок нет, после чего делался вывод о некорректности условия «задачи».

С формальной точки зрения это верное рассуждение, но оно никак не отражает «повседневную работу учителя», поскольку не показывает суть ошибки, допущенной в условии. Тем не менее, жюри засчитывало такое решение, если оно не содержало логических ошибок (в частности, если не указывалось, что все преобразования в "решении" равносильны, что не соответствует действительности, так как, на самом деле, имеет место следствие).

Критерии проверки. *Верно и полностью объяснено, почему условие «задачи» некорректно (любым из способов) – 10 баллов.*
Приведено рассуждение «от противного», содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов.
Доказано только, что приведенный «ответ» не может быть верным – 3 балла.
Некорректность условия указана без обоснования – 1 балл.

8. **Неравенство Птолемея**. *На уроке было предложено такое доказательство известного неравенства Птолемея: для любого четырехугольника ABCD (в том числе и не плоского) $AB\cdot CD + BC\cdot AD \geq AC\cdot BD$.*

«Доказательство». 1) «Лемма». Для любых точек *A*, *B*, *C* и *D* пространства верно равенство: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}-\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ = 0.

Действительно, так как $\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}$, $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$ и $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$, то, подставив это в нужное равенство, получим: $\overline{AB}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right)-\overline{AC}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AB}\right)+\overline{AD}\cdot\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)$ = 0. При раскрытии скобок все слагаемые в левой части сокращаются и получается верное равенство 0 = 0.

2) Используем доказанное равенство и неравенство $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\leq\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$. Тогда $AC\cdot BD$ = $\left|\overline{AC}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|=\left|\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right|\leq$ $\left|\overline{AB}\cdot\overline{CD}\right|+\left|\overline{AD}\cdot\overline{BC}\right|\leq\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{CD}\right|+\left|\overline{AD}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|$ = $AB\cdot CD + BC\cdot AD$, что и требовалось.

Укажите все ошибки и недочеты этого «доказательства» (если таковые имеются).

Предложил А. Блинков

Комментарий. 1) Приведённая в начале рассуждения лемма верна, но её доказательство изложено неудачно. Верное равенство 0 = 0 получено как следствие доказываемого равенства, однако верное следствие какого-либо утверждения, вообще говоря, не гарантирует справедливости самого утверждения (*например, из неверного равенства 1 = –1 следует верное равенство $1^2 = (-1)^2$*). Надо либо сослаться на равносильность доказываемого и всех записанных равенств, либо преобразовать левую часть доказываемого равенства и привести ее к правой, записав это, например так: поскольку $\overline{CD}=\overline{AD}-\overline{AC}$, $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$ и $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$, то $\overline{AB}\cdot\overline{CD}-\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}$ = $\overline{AB}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AC}\right)-\overline{AC}\cdot\left(\overline{AD}-\overline{AB}\right)+\overline{AD}\cdot\left(\overline{AC}-\overline{AB}\right)$ = $\overline{AB}\cdot\overline{AD}-\overline{AB}\cdot\overline{AC}-\overline{AC}\cdot\overline{AD}+\overline{AC}\cdot\overline{AB}$ + $\overline{AD}\cdot\overline{AC}-\overline{AD}\cdot\overline{AB}$ = 0, что и требовалось.

Кроме того, допущена ошибка в терминологии: слагаемые не сокращаются, а взаимно уничтожаются.

2) Само «доказательство» неравенства содержит грубую ошибку. «Равенство» $|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|=|\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}|$, присутствующее в нём, означает, что $|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|=|\overline{AC}\cdot\overline{BD}|$, что, в общем случае, неверно. (Нас бы устроило даже неравенство $|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|\le|\overline{AC}\cdot\overline{BD}|$, но тут как раз имеет место обратное неравенство $|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|\ge|\overline{AC}\cdot\overline{BD}|$, так что это рассуждение «спасти» не удаётся.)

3) Можно «придраться» также и к неравенству $|\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}|\le|\overline{AB}\cdot\overline{CD}|+|\overline{AD}\cdot\overline{BC}|$. По логике автора «доказательства» оно получено применением неравенства $|\bar{a}+\bar{b}|\le|\bar{a}|+|\bar{b}|$. Однако реально это неравенство применяется не к векторам, а к числам – скалярным произведениям векторов. Разумеется, для чисел аналогичное неравенство также верно, поэтому это, скорее, недочёт, а не ошибка.

Критерии проверки. *Баллы за 1 – 3 суммируются.*

1. Указана основная ошибка в «доказательстве», см. пункт 2) – 6 баллов.

2. Указана логическая ошибка в доказательстве «леммы» – 2 балла.

3. Указаны недочеты терминологии, см. пункты 1) и 3) – по 1 баллу за каждый.

9. Ящики. *На олимпиаде была предложена следующая задача*:

На первом складе в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия, а на втором складе – по 6. С первого склада на второй перевезли 50 ящиков, и среднее количество бракованных изделий в ящике на каждом из складов уменьшилось на 1. Сколько всего ящиков на двух складах?

Из всего класса только Вася взялся за эту задачу и решил ее так:

«Решение». Пусть на первом складе было x ящиков, а на втором – y ящиков. Тогда на первом складе – $3x$ бракованных изделия, а на втором – $6y$. После перевозки пятидесяти ящиков число бракованных изделий на первом складе будет $3x – 50\cdot3$ и это равно $(x – 50)\cdot2$, так как среднее число бракованных изделий стало 2. Из уравнения $3x – 150 = 2x – 100$ находим, что $x = 50$.

Аналогично, на втором складе стало $6y + 150$ бракованных изделий, что равно $(y + 50)\cdot5$. Тогда $y = 100$. Общее количество ящиков: $x + y = 150$.

«Ответ»: 150.

1) В чем ошибся Вася?

2) Приведите верное решение.

3) Как убедить Васю и остальных учеников класса, что его «решение» неверное, не указывая конкретно, где ошибка? Как помочь школьникам найти ошибку, а затем и верное решение?

Использована задача из ОММО – 2012. Предложили А. Иванищук и И. Раскина

Комментарий. 1) Условие «в каждом ящике в среднем по 3 бракованных изделия» относится ко всем вместе взятым ящикам с первого склада. Вася же, умножая 50 на 3, применяет его к пятидесяти перевезенным ящикам. Но если бы в пятидесяти перевезенных ящиках среднее число бракованных изделий было таким же, как и на всем складе, то и в оставшихся ящиках оно бы тоже не изменилось. А по условию задачи оно уменьшилось. Поэтому в перевезенных пятидесяти ящиках было в среднем более чем по 3 бракованных изделия.

Отметим, что по данным задачи нельзя найти количество ящиков на каждом складе, а можно только найти общее количество ящиков на двух складах, которое действительно равно 150, то есть Вася получил верный ответ при неверном решении.

2) Пусть вначале на первом складе было x ящиков, а на втором – y ящиков. Тогда на первом складе $3x$ бракованных изделий, а на втором – $6y$. После перевозки на первом складе бракованных изделий стало $2(x – 50)$, а на втором $5(y + 50)$. Так как суммарное количество бракованных изделий на двух складах не изменилось, то $3x + 6y = 2(x – 50) + 5(y + 50)$. Из этого уравнения следует, что $x + y = 150$.

3) Приведем возможную беседу со школьниками в форме вопросов и ответов.

Как проверить решение? Подставить полученные результаты в условие. Сколько ящиков было на складах до перевозки? На первом было 50, а на втором – 100 ящиков. А сколько стало после перевозки? На первом стало 0, а на втором 150 ящиков. Но какой смысл говорить о среднем числе бракованных деталей в НУЛЕ ящиков? Что-то здесь не так. Что именно?

Вас не удивляет, что уменьшилось среднее число бракованных изделий в ящике НА ОБОИХ складах одновременно? Подумаем, по какой причине на складе могло уменьшиться среднее число бракованных изделий в ящике. Если бы в каждом ящике было ровно по 3 бракованных изделия, оно бы изменилось? Нет. Значит, в каких-то ящиках их было больше трех, а в каких-то меньше трех, и увезли те ящики, в которых в среднем было больше трех бракованных деталей. Например, в пятидесяти ящиках по было 2 детали, а в других пятидесяти ящиках – по 4. Что произойдет со средним числом бракованных изделий, если увезти по 25 ящиков каждого вида? Оно не изменится. А какие ящики надо увезти, чтобы оно уменьшилось до 2? Те, в которых по 4 бракованных изделия.

А что происходит на втором складе? Там было в среднем по 6 бракованных изделия в ящике (проще всего считать, что ровно по 6 в каждом ящике). Привезли 50 ящиков с четырьмя бракованными изделиями в каждом и среднее число бракованных деталей уменьшилось до 5. Сколько же ящиков с 6 бракованными изделиями было? Столько же, сколько привезли, то есть 50 (можно считать, что из каждого такого ящика переложили по одному бракованному изделию во вновь привезенный ящик). Итак, мы подобрали пример, соответствующий условию задачи. В нем на первом складе было вначале 100 ящиков, на втором 50 а всего 150 ящиков.

С чего бы нам так повезло: стали строить какой попало пример, и все сошлось? Можно ли считать задачу решенной? Нет. Зато стало ясно, почему Вася не должен был умножать 50 на 3. Интересно, что произойдет при попытке построить другой пример? Например, пусть вначале на первом складе в 20 ящиках было по 2 бракованных изделия, в 20 ящиках – по 3 и в 20 ящиках – по 4. Оставили 10 ящиков, в которых было по два бракованных изделия, а остальные 50 ящиков увезли. Чтобы на втором складе после перевозки в каждом ящике стало по 5 бракованных изделия, надо в эти 50 ящиков доложить $10\cdot3 + 20\cdot2 + 20 = 90$ бракованных изделий. Откуда их взять? По одному из 90 ящиков, в которых раньше лежало по 6 бракованных изделий. Мы построили новый пример, в котором на первом складе вначале было 60 ящиков, а на втором 90, а всего 150.

Можно ли по условию задачи найти количество ящиков на каждом складе? Стоит ли составлять уравнение, содержащее только x или только y? Заметим, что нас и не просят находить x или y по отдельности. А что просят? Найти $x + y$. Это значит, что для решения может хватить и одного уравнения с двумя переменными. Какую величину можно посчитать двумя способами и приравнять? Суммарное количество бракованных деталей.

Любой из двух подчеркнутых фраз достаточно, чтобы доказать, что Вася ошибся (но вторая фраза еще и показывает, в чем ошибка). Подбор конкретных примеров не нужен для поиска решения. Но если школьники не решили задачу, значит, они плохо понимают, что такое среднее значение, и числовые примеры могут здесь помочь. Кроме того, они помогают доказать, что найти количество ящиков на каждом складе по отдельности невозможно, а, тем самым, довести Васино «решение» до верного также невозможно. Учитель не должен настаивать на своих примерах, лучше, если их предложат ученики.

Разумеется, жюри не считает предложенную беседу заведомо наилучшей, и не подразумевает, что участники конкурса будут писать столь обширный и подробный текст.

Критерии проверки. *Баллы за ответы на вопросы 1) – 3) суммируются.*

1) Верно указана ошибка Васи и пояснена ее суть – 3 балла.

2) Приведено верное решение – 3 балла.

3) Приведены разумные наводящие вопросы, соображения и идеи – 1-4 балла (в зависимости от полноты и глубины).

10. **Производная**. *На уроке был предложен следующий способ доказательства известного неравенства* $\sin x \le x \le \mathrm{tg}x$ *для любого x из промежутка* $[0; \frac{\pi}{2})$.

«Доказательство». $(\sin x)' = \cos x$; $(x)' = 1$; $(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; для любого x из промежутка $[0; \frac{\pi}{2})$ выполняется неравенство $\cos x \le 1 \le \frac{1}{\cos^2 x}$ и $\sin 0 = \mathrm{tg} 0 = 0$. Следовательно, из трех рассматриваемых функций первая растет «медленнее» всех, а третья – «быстрее» всех.

Как Вы считаете, имеет ли смысл знакомить школьников с таким рассуждением? Подробно аргументируйте свою позицию.

Предложил А. Блинков

Комментарий. Само по себе приведенное рассуждение не содержит ошибок. Действительно, если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке a совпадают и на интервале $(a; b)$ выполняется неравенство $f'(x) < g'(x)$, то $f(x) \le g(x)$ на промежутке $[a; b)$. Для обоснования этого факта достаточно рассмотреть вспомогательную функцию $h(x) = g(x) - f(x)$ и применить к ней достаточное условие возрастания функции на интервале *(a; b)*.

Тем не менее, приведенное рассуждение не может считаться доказательством неравенства $\sin x \le x \le \mathrm{tg}x$ (*), так как в этом случае возникает логический «порочный круг». При доказательстве неравенства (*) используется тот факт, что $(\sin x)' = \cos x$, однако при традиционном способе вывода формулы производной синуса используется первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, при доказательстве которого, в свою очередь, применяется неравенство (*).

Поэтому если обсуждать приведенное рассуждение со школьниками, то следует объяснить, почему его нельзя считать строгим доказательством. При этом, приведенное рассуждение является одной из самых простых и доступных иллюстраций метода доказательства неравенств с помощью производной, значит, в этом контексте знакомить с ним школьников, на наш взгляд, вполне уместно.

Критерии проверки. *Приведены разумные соображения как о «строгости» доказательства, так и о его «полезности» или «вреде» для школьников – 10 баллов.*
Приведено только объяснение, почему «доказательство» не строгое – 8 баллов.
Приведены только аргументы о целесообразности или нецелесообразности использования приведенного рассуждения, не связанные с возникновением «порочного круга» – 1-2 балла (в зависимости от подробности аргументации).

Отметим, что мнения о «полезности» или «вреде» для школьников приведенного рассуждения зависит от личных вкусов учителя и контингента учащихся. Поэтому в работах участников конкурса оценивалась только глубина и полнота аргументации.